SOLUCIÓN DE PROBLEMAS VÈRBALES.

LECCIÓN 4.

3-29 INTRODUCCIÓN.

Una ecuación, es una expresión que contiene un signo de igualdad y por lo menos una letra. En una fórmula, se utilizan letras para representar términos conocidos, como L para longitud, V para volumen y D para diámetro, etc.

El propósito de aprender cómo resolver ecuaciones, es el de construir una base sobre la cual se puedan resolver problemas complejos.

El planteo de una ecuación es semejante al de una traducción. Plantear una ecuación, es expresar por medio de símbolos matemáticos una condición formulada en palabras, es traducir el lenguaje llano, a fórmulas matemáticas. Las dificultades que podemos tener en plantear la ecuación de un problema son idénticas a las que nos ofrece una traducción.

Para traducir una frase del español al inglés, dos cosas son necesarias: primero, comprender a fondo la frase española y segundo, estar familiarizado con las formas de expresión propias del inglés.

La situación es muy semejante, cuando se trata de expresar en símbolos matemáticos, una condición propuesta en palabras. Se requiere el comprender a fondo la condición, y estar familiarizados con las formas de expresión matemáticas.

Cuando se puede hacer literalmente, palabra por palabra, resulta bastante fácil traducir al inglés un texto en español, para las cuales ello no es posible. Si el texto contiene expresiones de este tipo, la traducción resulta difícil:

deberemos dedicar más atención al sentido general del texto, que a las palabras mismas, y antes de traducirlo, tendremos sin duda que cambiarlo.

Sucede exactamente igual en el planteo de una ecuación. En los casos sencillos, el enunciado verbal se divide casi automáticamente en diversas partes, cada una de las cuales, puede ser inmediatamente transcrita en términos matemáticos. En los casos más complicados, la condición comprende elementos que no pueden ser de inmediato traducidos en símbolos; deberemos entonces, dedicar menos atención al enunciado para concentrarnos más en el sentido. En tales casos, antes de poner fórmulas por escrito, deberemos transformar primero la condición, aunque teniendo presentes todos los recursos del lenguaje matemático.

3-30 TRATANDO DE ENTENDER LAS RELACIONES NUMÉRICAS.

El éxito en la resolución de problemas en álgebra, dependerá, entre otras cosas, de la habilidad para leer e interpretar las relaciones entre los números. Si no se comprende bien el significado de palabras claves, tales como "disminuido en", "números consecutivos", "recíproco", etc., tendremos dificultad para resolver problemas. Debemos estar capacitados también para relacionar, comparar y operar. Los siguientes ejemplos ayudarán a desarrollar estas habilidades.

Ejemplos.

1) ¿Cuánto queda si a 15 le quitamos un octavo de ocho?

$$x = 15 - (\frac{1}{8})(8)$$
$$= 15 - 1$$
$$= 14$$

2) ¿Qué número excede a 3 en 5 unidades?

$$x = 3 + 5$$
$$= 8$$

3) ¿Cuánto es un medio de una mitad?

$$x = (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})$$
$$= 1/4$$

4) ¿Cuántas monedas de cinco centavos son equivalentes a 4 monedas de 50 centavos?

x = monedas de cinco centavos

50 centavos = 10 monedas de cinco centavos

x = (4)(10) = 40 monedas de cinco centavos

5) Juan es dos años más joven que Federico que tendrá 18 años dentro de 4. ¿Cuántos años tiene Juan?

La edad actual de Federico = 18 - 4 = 14

La edad de Juan = Edad actual de Federico -2

= 14 - 2

= 12

6) Un tercio de p, más dos.

$$x = 1/3\ p + 2$$

7) La tercera parte de la suma de p y dos.

$$x = \frac{(p+2)}{3}$$
$$= \frac{1}{3}(p+2)$$

AUTOEVALUACIÓN 1.

Contesta las siguientes preguntas sin usar papel ni lápiz.

1.- ¿Cuál es la suma de veinte, la mitad de veinte y una quinta parte de veinte?

2.- ¿Cuánto queda si a 25 lo disminuimos en un cuarto de ocho?

3.- ¿Cuánto es un sexto del producto de cuatro y cinco?

4.- ¿Cuánto es un medio de la diferencia entre 15 y 7?

5.- ¿Cuál es el cociente al dividir la suma de 7 y 11 por 6?

6.- ¿Cuánto es tres cuartas partes de la diferencia entre 60 y 20?

7.- ¿Cuál es la suma de los siguientes tres números pares consecutivos mayores que 8?

8.- ¿Cuál es el resultado si al cociente de ocho dividido por cuatro, se le multiplica por el producto de 5 y 6?

9.- ¿Cuál es el cuadrado de la suma de 3 y 6?

10.- ¿Cuál es la suma de los cuadrados de 3 y 4?

Contesta lo siguiente:

11.- ¿Cuántas monedas de 10 centavos son equivalentes a 3 de 25 y 3 de 5?

12.- Si hay 4 1/3 de semanas en un mes, como promedio, ¿cuántas semanas hay en tres meses?

3-31 CAMBIO DE ORACIONES VERBALES A PROPOSICIONES ABIERTAS.

Cuando las proposiciones verbales expresan relaciones entre números se suelen llamar "enunciados de problemas". El conjunto solución de la proposición abierta consta del conjunto de soluciones del problema. Unos problemas son prácticos y se presentan en la vida diaria y otros pueden catalogarse como simples pasatiempos. Pero aún los pasatiempos constituyen una buena práctica de analizar las situaciones que presenta el problema y formular las proposiciones matemáticas abiertas correspondientes.

Practiquemos primero el cambio de oraciones verbales a proposiciones matemáticas abiertas, (planteo del problema).

Ejemplo 1.

Juan y Paco hicieron un total de 46 puntos en un juego de basket ball. Juan marcó 8 puntos más que Paco. ¿Cuántos puntos hizo cada jugador?

Solución:

Para formular la proposición matemática correspondiente razonamos así:

Sea x = al número de puntos logrados por Paco; puesto que Juan marcó 8 puntos más que Paco, el número de puntos hechos por Juan es x + 8.

La proposición verbal establece que:

$$\underbrace{\text{Número de puntos logrados por Paco:}} + \underbrace{\text{Número de puntos logrados por Juan}} = 46$$

$$x + (x+8) = 46$$

Probablemente puedas encontrar el conjunto solución de esta proposición abierta pero, por ahora, solamente cambiaremos proposiciones verbales a proposiciones abiertas, es decir, plantearemos el problema.

Ejemplo 2.

Dos trenes salen de un pueblo en direcciones opuestas con velocidades de 45 y 50 Km por hora. ¿Al cabo de cuánto tiempo estarán separados 285 Km?

Solución:

Antes de intentar escribir la proposición abierta, analicemos las relaciones que hay en el problema. Si un tren camina a 45 Km por hora, recorrió 45 x 1 = 45 Km en una hora. En dos horas, el tren habrá recorrido, 45 x 2 = 90 Km. En "h" horas, el tren caminará 45 "h" Km. El diagrama siguiente nos ayudará a visualizar el problema:

Trayectoria del primer tren	punto de partida	Trayectoria del segundo tren

$$\longleftarrow\!\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\!\longrightarrow$$

Suma de las distancias = 285 Km

Sea "h", el número de horas que han estado caminando los trenes. Entonces, 45 "h" = distancia recorrida por el primer tren y 50 "h" = distancia recorrida por el segundo tren.

$$\underbrace{\text{Distancia recorrida por el primer tren}}_{45\ h} + \underbrace{\text{Distancia recorrida por el segundo tren}}_{50\ h} = \underset{=\ 285\text{ Km}}{285\text{ Km}}$$

Ejemplo 3.

Separar 48 en dos partes tales que el doble de la menor sea 6 unidades más que el mayor.

Solución:

Sea x = la parte menor,

entonces, $48-x$ = la parte mayor.

Así, los dos números son x y $(48-x)$. Ahora, del dato del problema:

$$\underbrace{\text{El doble de la menor}}_{2x}\ \underset{=}{\text{es}}\ \underbrace{\text{6 más que la mayor}}_{(48-x)+6}$$

Ejemplo 4.

Hallar tres números consecutivos impares tales que la suma del primero y del segundo sea igual al tercero más 31.

Solución:

Así, tenemos que si fuera 1 el primer número impar, si le sumamos 2 tendríamos el segundo número impar (3). De igual manera si le sumamos al segundo número impar 2, tendríamos el tercer número impar consecutivo, o sea:

$$(1+2) + 2 = 1 + 4$$
$$= 5$$

Suponiendo ahora que sea x el primer número impar, entonces:

$x + 2$ = al siguiente número consecutivo impar.

$x + 4$ = al tercer número consecutivo impar.

Una vez encontrados los tres números impares consecutivos, o sea, x, $x+2$, y $x+4$, los ponemos en la proposición matemática verbal de la siguiente manera:

$$\underbrace{\text{primer número}}_{x} + \underbrace{\text{segundo número}}_{(x+2)} = \underbrace{\text{tercer número más 31}}_{(x+4)\ +\ 31}$$

Ejemplo 5.

Un hombre tiene ahora el triple de la edad que tiene su hijo. Dentro de 12 años el padre tendrá el doble de la edad que tendrá su hijo. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

Solución:

Separemos el "enunciado del problema", de la siguiente manera:

1) "Un hombre tiene ahora el triple de la edad que tiene su hijo". Si x representa la edad actual del hijo, entonces:

la edad actual del padre será = a el triple de la edad de x

la edad actual del padre = 3x

2) "Dentro de 12 años el padre tendrá el doble de la edad que tendrá su hijo". Si x y 3x representan las edades actuales del hijo y del padre respectivamente, entonces dentro de 12 años las edades serán: x + 12 y 3x + 12. Pero, como también la edad del padre será el doble de la de su hijo, tenemos que:

$$\underbrace{\text{la edad del padre}}_{3x + 12}\ \underbrace{\text{será}}_{=}\ \underbrace{\text{el doble de la edad del hijo}}_{2 \quad (x + 12)}$$

$$3x + 12 = 2(x + 12)$$

Hasta ahora hemos visto proposiciones simples. Las proposiciones "3 + 5 = 8", "x - 2 = 5", son ejemplos de *proposiciones simples*. Sin embargo, sabemos que las proposiciones pueden ser a veces *proposiciones compuestas*. La proposición "jugaré beisbol en la tarde e iré al cine en la noche" es un ejemplo de proposición compuesta. De una manera semejante, se presentan en matemáticas proposiciones compuestas, por ejemplo, "x + y = 5 y x - y = 1" que suelen escribirse en la forma siguiente:

$$x + y = 5$$
$$x - y = 1$$

Las proposiciones compuestas enunciadas son verdaderas sólo si ambas partes de cada proposición son verdaderas. Hemos considerado proposiciones compuestas formadas por el uso de la conjunción "y".

Estas proposiciones compuestas son útiles para resolver problemas. En muchos casos la proposición abierta nos conduce a una solución más simple que una proposición abierta simple porque podemos trabajar con dos variables.

Ejemplo 6.

En una tienda una persona compró 5 camisas y 4 corbatas por $ 30.00. Otro cliente compró dos camisas y 6 corbatas por $ 23.00. ¿Cuál es el precio de cada camisa y cada corbata?

Solución:

Para plantear las ecuaciones, hagamos:

x = el precio de una camisa en $

y = el precio de una corbata en $

entonces, para encontrar las ecuaciones tenemos que un cliente compró 5 camisas a un precio "x", y 4 corbatas a un precio "y" que en total fueron $ 30.00. Entonces, tenemos:

$$5x + 4y = 30 \qquad (1)$$

De igual modo, tenemos que el otro cliente compró:

$$2x + 6y = 23 \qquad (2)$$

Luego, el planteamiento de este problema verbal es:

$$5x + 4y = 30 \qquad (1)$$
$$2x + 6y = 23 \qquad (2)$$

Ejemplo 7.

Un almacenista tiene dulces de $ 45.00 el kilo y otros de $ 70.00 el kilo. Quiere hacer una mezcla de 120 kilos que resulten a $ 55.00 el kilo, ¿cuántos kilos de cada clase debe rá poner?

Solución:

Sea x = el número de kilos de dulces de $ 45.00

y = el número de kilos de dulces de $ 70.00

Además, si suponemos lo anterior, tenemos que:

$$x + y = 120, \qquad (1)$$

ya que sumando ambas cantidades nos debe de dar los 120 kilos que nos piden. Para encontrar la segunda ecuacion, tenemos que el costo total de los 120 kilos es (120 x 55), o sea:

$$45x + 70y = (120)(55)$$

$$45x + 70y = 6{,}600 \qquad (2)$$

Luego, el planteamiento de este problema verbal es:

$$x + y = 120 \qquad (1)$$

$$45x + 70y = 6{,}600 \qquad (2)$$

AUTOEVALUACIÓN 2.

Escríbanse proposiciones abiertas para los problemas siguientes. Decir lo que significa cada variable usada en cada una. No se piden los conjuntos solución.

1.- Separar 53 en dos partes en tal forma que la mayor tenga 3 unidades más que la menor.

2.- Tres muchachos pesan respectivamente 120, 98 y 111 libras. ¿Cuál deberá ser el peso de un cuarto muchacho para que el peso promedio de los cuatro sea de 114 libras?

3.- Un equipo de beisbol hizo 17 carreras, entre juegos. En el primero hizo 5 carreras, en el segundo hizo el doble de las que logró en el tercero. ¿Cuántas carreras hizo en cada juego?

4.- El perímetro de un rectángulo es de 40 centímetros. El largo tiene 2 centímetros más que cinco veces el ancho. Encontrar el largo y el ancho del rectángulo.

5.- Al jugar basketball las canastas hechas por falta cuentan un punto cada una y una canasta de campo cuenta dos puntos. Un equipo registró 39 puntos en un juego, haciendo 6 canastas de campo más que las que hizo por faltas. ¿Cuántas canastas logró de cada clase?

6.- Juanita, María y Elena ganaron un total de $ 2,000.00 durante el mes de diciembre. Elena ganó $ 100.00 menos que María y Juanita $ 300.00 más que el doble de lo que ganó María. ¿Cuánto obtuvo cada una?

7.- Un hombre pagó $ 30.00 por 4 almuerzos y cinco comidas en un restaurante. Otra vez pagó $ 33.00 por 2 almuerzos y 7 comidas. ¿Cuál es el costo de un almuerzo y cuál el de una comida en ese restaurante?

8.- Un comerciante desea obtener 100 litros de aceite para venderlos a $ 19.00 el litro. Para ello, mezcla aceite de $ 20.00 el litro con otro de $ 16.00 el litro. ¿Cuántos litros de cada clase usó?

9.- La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 12. El dígito de las unidades excede al dígito de las decenas en 4. Hallar el número.

10.- Un químico tiene dos soluciones ácidas, una del 20 % y otra del 70 %. Hallar el número de litros que debe poner de cada una para obtener 50 litros de una solución al 60 %.

11.- Si le quitamos 4 al numerador de una fracción, el valor de la fracción es 1/3. Si agregamos 5 al denominador de la fracción original, su valor es igual a 1/2. Encon-