contrar la fracción original.

3-32 SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PLANTEO MEDIANTE EL USO DE ECUACIONES EN UNA VARIABLE.

Un problema que se puede resolver mediante una ecuación, comprende varias cantidades de las cuales unas son conocidas y otras desconocidas. Igualmente contiene datos que permiten observar la igualdad entre dos combinaciones de esas cantidades. Si el problema se puede resolver mediante una ecuación de una variable, entonces las cantidades desconocidas deben de expresarse en términos de una sola letra.

El procedimiento para resolver un problema mediante el uso de una ecuación no siempre es fácil y para lograr cierta aptitud se requiere una práctica considerable. Para ello te sugerimos el siguiente esquema.

1.- Leer cuidadosamente el problema y estudiarlo hasta que quede perfectamente clara la situación que plantea.

2.- Identificar las cantidades comprendidas en el problema, tanto las conocidas como las desconocidas.

3.- Elegir una de las cantidades desconocidas y representarla mediante una letra, generalmente "x".

Después, expresar las otras cantidades desconocidas en términos de esta letra.

4.- Buscar en el problema los datos que indiquen qué cantidades o qué combinaciones de éstas son iguales.

5.- Formular la ecuación, igualando las cantidades o combinaciones apropiadas encontradas en el paso anterior.

6.- Resolver la ecuación obtenida y comprobar la solución.

A continuación se expondrán algunos ejemplos de los varios tipos de problemas que pueden resolverse mediante el uso

CAPILLA ALFONSINA

de ecuaciones.

Problemas que implican movimiento a velocidad uniforme.

Generalmente los problemas de este tipo establecen una relación entre distancias recorridas, entre velocidades o entre tiempos empleados. La fórmula fundamental para estos problemas es:

$$d = vt$$

en donde "d" representa la distancia; "v" la velocidad; y "t" el tiempo. Esta fórmula se puede resolver para "v" o para "t" y obtener las dos fórmulas adicionales siguientes:

$$v = d/t$$

$$t = d/v.$$

Ejemplo 8.

Un grupo de deportistas efectúan un recorrido de 380 Km. en 7 horas durante una expedición de caza. Durante 4 horas viajan a lo largo de una carretera pavimentada y el resto del tiempo en un camino de herradura. Si la velocidad media en el camino de herradura es de 25 Km/hr menor que la velocidad media en la carretera, encuéntrese la velocidad media y la distancia recorrida en cada uno de aquellos tramos de camino.

Solución:

Las cantidades desconocidas en el problema son las dos velocidades y la distancia en cada tramo del camino. Las cantidades conocidas son la distancia total, 380 Km, el tiempo total, 7 horas y el tiempo empleado en la carretera, 4 horas y la cantidad en la cual la velocidad en la carretera es mayor que la velocidad en el camino de herradura, 25 Km/hr. Evidentemente, el tiempo empleado en el camino de herradura fue de:

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA

7 horas - 4 horas = 3 horas y ladistancia total es igual a la suma de las distancias recorridas en cada tramo.

Si hacemos, x = velocidad en la carretera entonces, $x-25$ = velocidad en el camino de herradura, además, $4x$ = distancia recorrida en la carretera, $3(x-25)$ = distancia recorrida en el camino de herradura y, $4x + 3(x-25)$ = distancia total. Por tanto,

$$4x + 3(x-25) = 380$$

Esta es la ecuación deseada y se puede resolver como se indica a continuación:

$4x+3x-75 = 380$ (se han eliminado los paréntesis).

$4x+3x = 380+75$ (se han transpuesto los términos).

$7x = 455$ (se han efectuado sumas).

$x = 65$ (Km/hr en la carretera).

$x-25 = 40$ (Km/hr en el camino de herradura).

$4(65) = 260$ (Km recorridos en la carretera).

$3(40) = 120$ (Km recorridos en el camino de herradura).

Comprobación:

$$260 + 120 = 380.$$

Problemas que implican la realización de un trabajo.

Los problemas que comprenden la rapidez para hacer determinadas labores, se pueden resolver frecuentemente encontrando primero la fracción del trabajo realizado por cada individuo en la unidad de tiempo y encontrando después la relación entre las fracciones.

Cuando se emplea este método, la unidad, el número uno, representa el trabajo total por realizar.

Ejemplo 9.

Un agricultor puede arar un terreno empleando un tractor en 4 días y un ayudante suyo puede hacer el mismo trabajo con un tractor más pequeño en 6 días.

¿En cuántos días pueden arar el campo si trabajan conjuntamente?

Solución:

Si hacemos, x = número de día que se requieren para arar el campo cuando trabajan juntos;

entonces, $\frac{1}{x}$ = parte del campo arado en un día por los dos;

sin embargo, $\frac{1}{4}$ = parte del campo arado por el agricultor en un día.

y, $\frac{1}{6}$ = parte del campo arado por el ayudante en un día;

por tanto, $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{x}$

$$3x + 2x = 12$$

$$5x = 12$$

$$x = 2\frac{2}{5} \text{ días.}$$

Comprobación:

Si entre los dos aran el campo en 2 2/5 días, entonces hacen tanto como $\frac{1}{2\frac{2}{5}}$ = 5/12 en un día. Además, uno ara 1/6 del campo en un día y el otro 1/4, esto es:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{2+3}{12} = \frac{5}{12}$$

CAPILLA ALFONSINA
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA U.A.N.L.

Ejemplo 10.

Si en el ejemplo anterior el ayudante trabajó un día solo con el tractor pequeño, y hasta el segundo día el agricultor empezó a ayudarle, ¿en cuántos días terminaron de arar el resto del campo?

Solución:

El ayudante aró 1/6 del campo en el primer día, y por tanto quedaron sin arar 5/6.

Sea, x = número de días requeridos para terminar el trabajo;

entonces, $\frac{x}{4}$ = parte del campo arado por el agricultor en x días.

y, $\frac{x}{6}$ = parte del campo arado por el ayudante;

por tanto, $\frac{x}{4} + \frac{x}{6} = \frac{5}{6}$

$$3x + 2x = 10$$

$$5x = 10$$

$$x = 2 \text{ días.}$$

Comprobación:

El agricultor aró en dos días 2/4, o sea 1/2 del campo y el ayudante 2/6, o sea 1/3 del mismo, esto es:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

Problemas sobre mezclas.

Muchos problemas implican la combinación de ciertas sustancias de concentración conocida, generalmente expresada en porcentaje para formar una mezcla de concentración fija con respecto a una de las sustancias. Otros implican la mezcla de ciertos artículos de diversos precios. En tales problemas debe recordarse que la cantidad total de una componente en una mezcla, es igual a la suma de las cantidades que de esa componente hay en cada una de las sustancias combinadas o que el valor de una mezcla es la suma de los valores de las sustancias agrupadas.

Ejemplo 11.

¿Cuántos litros de un líquido que tiene 74 % de alcohol se debe mezclar con 5 litros de otro líquido que tiene 90 % de alcohol si se desea obtener una mezcla de 84 % de alcohol?

Solución:

Si hacemos, x = número de litros de la solución de 74 % de alcohol que deben emplearse;

entonces, $0.74x$ = número de litros de alcohol que aporta esa solución;

además, $0.90(5) = 4.5$ = número de litros de alcohol en la solución de 90 %;

por tanto, $0.74x + 4.5$ = número de litros de alcohol en la mezcla;

también, $x + 5$ = número total de litros en la mezcla;

entonces, ya que la mezcla tiene 84 % de alcohol, se tiene:

$0.84(x + 5)$ = número de litros de alcohol en la mezcla.

CAPILLA ALFONSINA

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA U.A.N.L.

por tanto, $0.74x + 4.5 = 0.84(x + 5)$

$$0.74x + 4.5 = 0.84x + 4.2$$

$$0.74x - 0.84x = 4.2 - 4.5$$

$$-0.10x = -0.3$$

$$x = 3 \quad \text{(litros que deben agregarse).}$$

Comprobación:

$$(0.74)\ 3 + 4.5 = 2.22 + 4.5 = 6.72$$

$$0.84(5+3) = (0.84)(8) = 6.72$$

Problemas diversos.

Además de los tres tipos anteriormente discutidos, existe una amplia variedad de problemas que se pueden resolver por medio de ecuaciones. El esquema fundamental es el mismo para todos, esto es, encontrar dos cantidades de las cuales una o las dos comprenden un valor no conocido, e igualarlas. Se mencionarán otros tres tipos y se delineará el principio general o fórmula que se emplea para su resolución.

a) Muchos problemas de física y de mecánica se refieren a palancas.

Una palanca es una barra rígida apoyada en un punto, colocado generalmente entre los dos extremos de la barra, y que se llama punto de apoyo. Si sobre la palanca se colocan dos pesos P_1 y P_2 a las distancia D_1 y D_2, respectivamente del punto de apoyo, y la palanca está en equilibrio, entonces $P_1D_1 = P_2D_2$; además, si una fuerza F situada a una distancia D del punto de apoyo, puede elevar un peso R situado a una distancia d del mismo punto de apoyo, entonces:

$$FD = Rd$$

b) Cuando se resuelvan problemas que tratan acerca de inversiones de dinero, generalmente se emplea la fórmula:

$$I = PRT$$

en donde P es el capital, o cantidad de dinero invertida; I es el interés, o cantidad devengada de la inversión; R, expresado en porcentaje, es la tasa de interés por unidad de tiempo total en que permanece el capital invertido.

c) Los problemas que comprenden los dígitos de un número dependen del principio empleado en nuestro sistema numérico, que asigna un valor al dígito de acuerdo con su colocación. Por ejemplo: si c es el dígito de las centenas en un número de tres cifras; d el dígito de las decenas y u el de las unidades; entonces el número es $100c + 10d + u$. Si se intercambian los dígitos de las centenas y de las unidades el número es $100u + 10d + c$.

Ejemplo 12.

Tres números están relacionados de tal modo que el segundo es dos unidades mayor que el primer número y el tercero es cuatro unidades mayor que el primero. Encuentra el número si la suma de sus cuadrados es 56 unidades mayor que tres veces el cuadrado del número menor.

Solución:

Si "x" es el primer número, "y" el segundo y "z" el tercer número, entonces: $y = 2 + x$; $z = 4 + x$ y por lo tanto "x" será el número menor.

Además, $x^2 + y^2 + z^2 = 56 + 3(x)^2$

y, $y^2 = (2+x)^2 = 4 + 4x + x^2$

$$z^2 = (4+x)^2 = 16 + 8x + x^2$$

por tanto, $x^2 + (2 + x)^2 + (4 + x)^2 = 56 + 3x^2$

Efectuando operaciones y sumando términos semejantes, queda:

$$12x + 20 = 56 \qquad y = 2 + x \qquad z = 4 + x$$

$$12x = 36 \qquad y = 2 + 3 \qquad z = 4 + 3$$

$$x = 3 \qquad y = 5 \qquad z = 7$$

Comprobación:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 56 + 3x^2$$

$$(3)^2 + (5)^2 + (7)^2 = 56 + 3\,(3)^2$$

$$9 + 25 + 49 = 56 + 27$$

$$83 = 83$$

Ejemplo 13.

La altura de un triángulo es 3/4 la longitud de su base. Si la altura se incrementa en 3 pies y la base se disminuyera en 3 pies, el área quedaría inalterada. Encuentra la longitud de la base y la altura.

Solución:

Si, "b" es la longitud de la base y "h" es la altura, tenemos, $h = 3/4 \times b$.

Además, el área (A) de un triángulo es la mitad del producto de la base por la altura.

por tanto, $$A = \frac{bh}{2}$$

también, $$A = \frac{(b-3)(h+3)}{2}$$

igualando, $$\frac{bh}{2} = \frac{(b-3)(h+3)}{2}$$

por lo que, $$\frac{bh}{2} = \frac{(b-3)(h+3)}{2}$$

Efectuando operaciones, queda:

$$b - h - 3 = 0$$

y $$h = b - 3$$

Ahora tenemos, $$h = b - 3$$

$$h = \frac{3b}{4}$$

igualando, $$b-3 = \frac{3b}{4} \quad y \quad 4b - 12 = 3b$$

de donde, $$b = 12 \text{ pies} \quad y \quad h = (b-3) = 12-3 = 9 \text{ pies.}$$

Comprobación:

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{12 \times 9}{2} = 54$$

y a su vez, $$A = \frac{(b-3)(h+3)}{2}$$

$$A = \frac{(12-3)(9+3)}{2}$$

$$= \frac{9 \times 12}{2}$$

$$= 54$$

Ejemplo 14.

Un hombre puede hacer cierto trabajo en 21 horas, otro hombre puede hacer el trabajo en 28 horas y un muchacho puede hacer el trabajo en 48 horas. Encuentra cuánto tiempo se necesitará para hacer el trabajo si los tres trabajan juntos.

CAPILLA ALFONSINA

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA U.A.N.L.

Solución:

x = tiempo que requieren los tres hombres para efectuar el trabajo.

$\frac{1}{x}$ = parte del trabajo realizado en 1 hora por los tres.

$\frac{1}{21}$ = parte del trabajo realizado en 1 hora por el primer hombre.

$\frac{1}{28}$ = parte del trabajo realizado por el segundo hombre en una hora.

$\frac{1}{48}$ = parte del trabajo realizado por el muchacho en una hora.

Por tanto, $\frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \frac{1}{48} = \frac{1}{x}$

Encontrando el mínimo común múltiplo (M.C.M.) de los denominadores y sumando las fracciones, queda:

$$\frac{1}{x} = \frac{16 + 12 + 7}{336}$$

$$= \frac{35}{336}$$

de donde, $x = \frac{336}{35} = 9.6$ horas. 96

Ejemplo 15.

¿Cuántas onzas de plata pura deben ser agregadas a 18 onzas de una pureza del 60 %, para hacer una aleación que es plata pura en un 76 %?

CAPILLA ALFONSINA

Solución:

La ecuación debe establecerse observando que la cantidad de plata en las dos partes separadas es la cantidad de plata que hay en la mezcla. Representando con "x" al número de onzas de plata que han de agregarse, arreglamos la información de la siguiente manera:

x oz.	y 18 oz.	da (18+x)
100 % puro x oz. de plata	60 % puro 10.8 oz. de plata	76 % puro 0.76 (18+x) oz. de plata

Puesto que las 10.8 oz. originales de plata y las x onzas adicionales constituyen la totalidad de la plata en la mezcla, tenemos:

$$x + 10.8 = 0.76\,(18+x)$$

$$x - 0.76x = 13.68 - 10.8$$

$$0.24x = 2.88$$

$$x = \frac{2.88}{0.24}$$

$$= 12 \text{ onzas.}$$

21 = 3 28 = 7 4 = 4 48 = 6 8 = 8

1:7 1 1 1

Ejemplo 16.

Un hombre presta $ 5,000.00; una parte al 3 % de interés anual y el resto al 5.5 %. Encuentra el monto de cada préstamo, si el interés total por año que recibe es de $ 156.00.

Solución:

Si "x" es la parte del capital prestado al 3 % de interés anual y "y" el resto del capital prestado al 5.5 % de interés anual, tenemos:

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA U.A.N.L.