CAPITULO 4.

DESIGUALDADES E INECUACIONES LINEALES.

LECCIÓN 1.

4-1 INTRODUCCIÓN.

Aún cuando las relaciones matemáticas más importantes son las expresadas por ecuaciones, existen otras relaciones, de un tipo indefinido, en las que la correspondencia entre un conjunto de variables y otro conjunto no está dada por una función, sino por una relación de grado. Las que son tema de ésta lección se denominan "*desigualdades*", pero son muy distintas de la desigualdad expresada por el signo "*no es igual a*" ($\neq$). Cuando se escribe $x \neq y$, lo único que se está expresando es que "x" no es igual a "y". Lo anterior dice poco acerca de las variables. A menudo se desea expresar el hecho de que una variable es mayor o menor que otra variable o un número específico, o el de que la variable está contenida en un cierto conjunto de valores. El uso apropiado de los símbolos y términos que expresan este tipo de relaciones extenderá nuestro vocabulario matemático.

El tema de las *desigualdades* es de gran importancia, según veremos en muchas partes del álgebra y también observaremos ciertas analogías entre *igualdades y desigualdades*.

Al concepto de mayor y menor entre dos números corresponde el de ordenación. La relación de orden queda restringida a los números reales y se puede interpretar geométricamente en un sistema coordenado unidimensional. En otras palabras, todo nuestro estudio con desigualdades se limitará a los números reales. No tiene sentido decir que un número

4-2 LOS AXIOMAS DE ORDEN.

Hemos introducido un conjunto de elementos indefinidos R, llamados *números reales*, que poseen las propiedades concretadas en los seis *axiomas de campo*. Los números reales que satisfacen a los axiomas de campo, se dice que forman un *campo*. Atribuimos ahora propiedades adicionales al conjunto R requiriendo que este conjunto satisfaga a los *axiomas de orden*. Los símbolos de *orden* son y se describen como sigue:

$<$ significa "es menor que"

$>$ significa "es mayor que"

Un *campo* que satisface los *axiomas de orden* es llamado un *campo ordenado*.

Axioma 1. El axioma de tricotomía.

Si a y b $\in$ R, entonces una y solo una de las siguientes relaciones es válida.

$a < b$ $\qquad$ $a = b$ $\qquad$ $a > b$

Axioma 2. El axioma de transitividad.

Si a, b y c $\in$ R, tal que $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.

Axioma 3. El axioma de adición.

Si a, b y c $\in$ R, tales que $a > b$, entonces $a+c > b+c$.

Axioma 4. El axioma de multiplicación.

Si a, b y c $\in$ R, tales que $a > b$ y $c > o$, entonces $ac > bc$

No es difícil establecer las relaciones de orden en el sistema de los números reales. En efecto, si consideramos dos enteros tales como -3 y 5, podemos decir a la vista, cual es mayor, pero cuando tenemos números racionales tales como 13/23 y 9/17, no es fácil decidir de inmediato cual es mayor. En esta lección daremos un método para tomar tal decisión. La investigación del orden de dos números racionales particulares, tales como 9/17 y 13/23 nos ayudará a hallar un método general. Convertiremos estas dos fracciones a un común denominador y entonces estableceremos el orden comparando sus numeradores. Usaremos el elemento de identidad para la multiplicación como ayuda.

$$\frac{13}{23} = \frac{13}{23} \cdot \frac{17}{17} = \frac{13.17}{23.17} = \frac{221}{17.23}$$

$$\frac{9}{17} = \frac{9}{17} \cdot \frac{23}{23} = \frac{9.23}{17.23} = \frac{207}{17.23}$$

Puesto que $13.17 > 9.23$, o sea, $221 > 207$, vemos que $13/23 > 9/17$.

4-3 DEFINICIONES.

Se dice que una cantidad "a" es mayor que otra cantidad "b" cuando la diferencia (a-b) es *positiva*. Así, 4 es mayor que (-2) porque la diferencia 4-(-2) = 6 es *positiva;* (-1) es mayor que (-3) porque (-1)-(-3) = 2 es una cantidad *positiva*.

Se dice que una cantidad "a" es menor que otra cantidad "b" cuando la diferencia (a-b) es *negativa*. Así (-1) es menor que 1 porque la diferencia -1 -1 = -2 es *negativa;* (-4) es menor que (-3) porque la diferencia (-4)-(-3) = -1 es *negativa*.

De acuerdo con lo anterior, cero es mayor que cualquier cantidad negativa; así, 0 es mayor que (-1) porque 0-(-1) es positiva. *Desigualdad* es una expresión que indica que una cantidad es mayor o menor que otra. Los signos de desigualdad son >, que se lee mayor que, y < que se lee menor que. Así, 5 > 3 se lee 5 mayor que 3; -4 < -2 se lee -4 menor que -2.

Lo mismo que en las *igualdades*, en toda *desigualdad*, los términos que están a la izquierda del signo mayor o menor forman el *primer miembro* de la desigualdad, y los términos a la derecha forman el *segundo miembro*. Así en a+b > c-d el primer miembro es a+b y el segundo c-d.

Los *términos* de una desigualdad son las cantidades que están separadas de otras por los signos + o -, también la cantidad que está sola en un miembro. En la desigualdad anterior los *términos* son a, b, c y -d.

Dos desigualdades son del mismo signo o subsisten en el mismo sentido cuando sus primeros miembros son mayores o menores ambos que los segundos. Así, a > b y c > d son desigualdades del *mismo sentido*.

Dos desigualdades son de *signo contrario* o no subsisten en el mismo sentido cuando sus primeros miembros no son ambos mayores o menores que los segundos miembros. Así, 5 > 3 y 1 < 2 son desigualdades de sentido contrario.

De la definición de desigualdad, lo mismo que de la escala de los números algebráicos, se deducen las siguientes consecuencias.

1) *Todo número positivo es mayor que cero.*

   Así, 7 > 0; porque 7-0 = 7 (positivo)

2) *Todo número negativo es menor que cero.*

   Así, -10 < 0; porque -10-0 = -10 (negativo)

3) *Si dos números son negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto.*

   Así, (-20)>(-30); porque (-20)-(-30) = 10 (positivo)

El estudiante debe observar que, para ambos símbolos de desigualdad, la cantidad mayor queda siempre en el lado hacia el cual se abre el símbolo, mientras que el vértice apunta hacia la cantidad menor. También vamos a introducir otros dos símbolos útiles: a $\geq$ b, que se lee "a es mayor o igual que b" y c $\leq$ d que se lee "c es menor o igual que d". En particular, la desigualdad a $\geq$ o es un modo conveniente de afirmar que "a" representa a todo número no negativo.

Así como hay igualdades absolutas, que son las identidades, e igualdades condicionales que son las ecuaciones; así también hay dos clases de desigualdades: *las absolutas* y *las condicionales*.

Una desigualdad absoluta o incondicional es aquella que tiene el mismo sentido para todos los valores de las variables para los que están definidos sus miembros. Son ejemplos de desigualdades absolutas, 5 > -7 y $x^2 + 1 > 0$.

Una desigualdad condicional o inecuación es aquella que tiene el mismo sentido solo para ciertos valores de las variables, tomados entre los valores para los que sus miembros están definidos. Son ejemplos de desigualdades condicionales o inecuaciones: $x - 2 < 3$, válida solo si $x < 5$;
$x^2 > 4$, válida solo si $x > 2$ ó $x < -2$

4-4 PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES.

1) *Si a los dos miembros de una desigualdad se suma o resta una misma cantidad, el signo de la desigualdad no varía.*

Así, dada la desigualdad $a > b$ podemos escribir:
$a+c > b+c$ y $a-c > b-c$.

Consecuencia:

Un término cualquiera de una desigualdad se puede pasar de un miembro al otro cambiándole el signo.

Así, en la desigualdad $a > b+c$ podemos pasar "c" al primer miembro con signo - y quedará $a-c > b$, porque equivale a restar "c" a los dos miembros.

En la desigualdad $a-b > c$ podemos pasar "b" con signo + al segundo miembro y quedará $a > b+c$, porque equivale a sumar "b" a los dos miembros.

2) *Si los dos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por una misma cantidad positiva, el signo de la desigualdad no varía.*

Así, dada la desigualdad $a > b$ y siendo "c" una cantidad positiva, podemos escribir: $ac > bc$ y $a/c > b/c$.

Consecuencia:

Se pueden suprimir denominadores en una desigualdad, sin que varíe el signo de la desigualdad, porque ello equivale a multiplicar todos los términos de la desigualdad, o sea sus

dos miembros, por el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores.

3) *Si los dos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por una misma cantidad negativa, el signo de la desigualdad varía.*

Así, en la desigualdad $a>b$ multiplicamos ambos miembros por $-c$, tendremos: $-ac < -bc$ y dividiéndolos por $-c$, o sea multiplicando por $-1/c$, tendremos: $-a/c < -b/c$.

Consecuencia:

Si se cambia el signo a todos los términos, o sea a los dos miembros de una desigualdad, el signo de la desigualdad varía porque equivale a multiplicar los dos miembros de la desigualdad por -1.

Así, en la desigualdad $a-b > -c$ cambiamos el signo a todos los términos y tendremos: $b-a < c$.

4) *Si cambia el orden de los miembros, la desigualdad cambia de signo.*

Así, si $a > b$ es evidente que $b < a$.

5) *Si se invierten los dos miembros, la desigualdad cambia de signo.*

Así, siendo $a>b$ se tiene que $1/a < 1/b$.

6) *Si los miembros de una desigualdad son positivos y se elevan a una misma potencia positiva, el signo de la desigualdad no cambia.*

Así, $5>3$; elevando al cuadrado $(5)^2>(3)^2$ o sea, $25 > 9$.

7) *Si los dos miembros o uno de ellos es negativo y se eleva a una potencia impar positiva, el signo de la desigualdad no cambia.*

Así, $-3 > -5$. Elevando al cubo: $(-3)^3 > (-5)^3$ o sea, $-27 > -125$.

$2 > -2$. Elevando al cubo: $(2)^3 > (-2)^3$ o sea, $8 > -8$.

8) *Si los dos miembros son negativos y se elevan a una misma potencia par positiva, el signo de la desigualdad cambia.*

Así, $-3 > -5$. Elevando al cuadrado: $(-3)^2 = 9$ y $(-5)^2 = 25$ y queda $9 < 25$.

9) *Si un miembro es positivo y otro negativo y ambos se elevan a una misma potencia par positiva, el signo de la desigualdad puede cambiar.*

Así, $3 > -5$. Elevando al cuadrado $(3)^2 = 9$ y $(-5)^2 = 25$ y queda $9 < 25$; *cambia* $8 > -2$, elevando al cuadrado $(8)^2 = 64$ y $(-2)^2 = 4$ y queda $64 > 4$; *no cambia.*

10) *Si los dos miembros de una desigualdad son positivos y se les extrae una misma raíz positiva, el signo de la desigualdad no cambia.*

Así, si $a > b$ y n es positivo, tendremos: $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

11) *Si dos o más desigualdades del mismo signo se suman o multiplican miembro a miembro, resulta una desigualdad del mismo signo (miembros positivos).*

Así, si $a > b$ y $c > d$, tendremos: $a+c > b+d$ y $ac > bd$.

12) *Si dos desigualdades del mismo signo se restan o dividen miembro a miembro, el resultado no es necesariamente una desigualdad del mismo signo, pudiendo ser una igualdad.*

Así, $10 > 8$ y $5 > 2$. Restando miembro a miembro: $10-5 = 5$ y $8-2 = 6$; luego queda, $5 < 6$; cambia el signo.

Si dividimos miembro a miembro las desigualdades $10 > 8$ y $5 > 4$, tenemos $10/5 = 2$ y $8/4 = 2$; luego queda $2 = 2$; igualdad.

AUTOEVALUACIÓN 1.

1.- Si $a \in R$, diga por qué la desigualdad $a > a$ es imposible.

2.- Si a, b, c, y $d \in R$, con $b > 0$ y $d > 0$, demuestre que $a/b > c/d$ si y sólo si $ad > bc$.

3.- Si $a \neq 0$, demuestre que $a^2 > 0$.

4.- Si $a > b$ y $c < 0$, muestre que $a/c < b/c$.

5.- ¿Cuál de las siguientes desigualdades es del mismo sentido que $3 < 4$?

0) $2 < x$ 1) $2 > 1$ 2) $2 > x$
3) $1 > 0$

6.- ¿Cuál de las siguientes desigualdades se deduce de $a+b < b^2$?

0) $a < b$ 1) $a > b$ 2) $a < b^2$
3) Ninguna.

7.- Si $ac < bc$ entonces $a < b$ si y solo si:

0) $c > 0$ 1) $c = -1$ 2) $c < 0$
3) $c = 0$

8.- ¿Cuál de las siguientes es una desigualdad absoluta suponiendo $x \in R$?

0) $x^3 + 1 > 0$ 1) $2x^2+2x+3 > 0$ 2) $x - 2 < 3$
3) $x^2(x+1) > 0$