9.- ¿Cuál de las siguientes es una desigualdad condicional suponiendo $x \in R$?

0) $|x - 3 > 2$ 1) $x^2+2 > 2x$ 2) $|3 > -1$
3) $x^2 + 2 > 0$

4-5 INECUACIONES LINEALES Y GRÁFICAS NUMÉRICAS.

Una *inecuación* es una desigualdad en la que hay una o más cantidades desconocidas (incógnitas) y que solo se verifica para determinados valores de las incógnitas. Las *inecuaciones* se llaman también *desigualdades condicionales*.

Así, la desigualdad $\{x \in R |\ 2x - 3 > x + 5\}$ es una inecuación porque tiene la incógnita x y solo se verifica para cualquier valor de x mayor que 8.

En efecto; para $x = 8$ se convertirá en igualdad y para $x < 8$ se convertirá en una desigualdad de signo contrario.

Resolver una *inecuación* es hallar los valores de las incógnitas que satisfacen la inecuación. La resolución de las inecuaciones se funda en las propiedades de las desigualdades, expuestas anteriormente y en las *consecuencias* que de las mismas se derivan.

Ejemplo 1.

Resolver la inecuación $\{x \in R |\ 2x - 3 > x + 5\}$

Pasando x al primer miembro y(-3) al segundo; $2x-x>5+3$; reduciendo $\{x \in R\ x > 8\}$. 8 es el límite inferior de x, es decir que la desigualdad dada solo se verifica para los valores de x mayores que 8 y el conjunto solución de la inecuación es "todos los números dirigidos mayores que 8.

La gráfica correspondiente queda así:

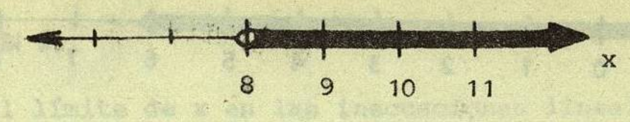

Fig. 1.

Observamos que el 8 no está incluído en el conjunto y que la flecha llena representa continuidad hasta el infinito del conjunto de los números reales.

Ejemplo 2.

Hallar el límite de x en la inecuación:

$$\{x \in R |\ 7 - \frac{x}{2} \geq \frac{5x}{3} - 6\}$$

Suprimiendo denominadores:

$$42 - 3x \geq 10x - 36$$

Trasponiendo, $-3x - 10x \geq -36 - 42$

$$-13x \geq -78$$

Cambiando el signo a los dos miembros, lo cual hace cambiar el signo de la desigualdad, se tiene:

$$13x \leq 78$$

Dividiendo por 13:

$$x \leq 78/13$$

o sea, $\{x \in R |\ x \leq 6\}$

6 es el límite superior de x, es decir, que la desigualdad dada solo se verifica para los valores de x menores o iguales que 6.

La gráfica del conjunto solución correspondiente queda así:

Fig. 2.

Observamos que el 6 está incluído en el conjunto y que la flecha llena representa continuidad hasta menos infinito en el conjunto de los números reales.

Ejemplo 3.

Hallar el límite de x en la inecuación:

$$\{x \in R \mid (x+3)(x-1) < (x-1)^2 + 3x\}$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$x^2 + 2x - 3 < x^2 - 2x + 1 + 3x$$

suprimiento x^2 en ambos miembros y trasponiendo:

$$2x + 2x - 3x < 1 + 3 \qquad \{x \in R \mid x < 4\}$$

4 es el límite superior de x.

La gráfica del conjunto solución queda:

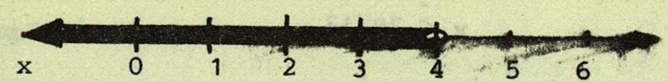

Fig. 3.

AUTOEVALUACION 2.

Hallar el límite de x en las inecuaciones lineales siguientes y la gráfica del conjunto solución en el sistema unidimensional.

1.- $\{x \in R \mid x - 5 < 2x - 6\}$

2.- $\{x \in R \mid 5x - 12 > 3x - 4\}$

3.- $\{x \in R \mid x - 6 > 21 - 8x\}$

4.- $\{x \in R \mid 3x - 14 < 7x - 2\}$

5.- $\{x \in R \mid 2x - 5/3 > x/3 + 10\}$

6.- $\{x \in R \mid 3x - 4 + x/4 \leq 5x/2 + 2\}$

7.- $\{x \in R \mid (x-1)^2 - 7 \geq (x-2)^2\}$

8.- $\{x \in R \mid (x+2)(x-1) + 26 \leq (x+4)(x+5)\}$

4-6 DESCRIPCION DE SUBCONJUNTOS DE UN PLANO MEDIANTE DESIGUALDADES.

La gráfica de cualquier ecuación de primer grado en dos variables es una línea recta e inversamente, cualquier línea recta en un plano coordenado es la gráfica de alguna ecuación de primer grado en dos variables. En esta sección exáminaremos algunas *desigualdades de primer grado* en *dos variables* y determinaremos sus gráficas. A continuación se presentan tres desigualdades de primer grado en dos variables.

$$\{(x,y) \in R \mid y > x\}$$

$$\{(x,y) \in R \mid 2x + y < 0\}$$

$$\{(x,y) \in R \mid 1/2\ x < y\}$$

Ejemplo 4.

Grafica el conjunto solución de $\{(x,y) \in R \mid y > x\}$.

Para determinar si cualquier par ordenado dado (x,y) satisface la desigualdad $y > x$, reemplazamos "x" por la primera componente del par ordenado y "y" por la segunda componente; si la proposición resultante es verdadera, entonces el par ordenado es una solución de la desigualdad.

Así, cualquier par ordenado (x,y) cuya segunda componente sea mayor que su primera componente será una solución de $y > x$. ¿Pertenece el par ordenado (2,3) al conjunto solución de $y > x$? ¿El (2,-3)?

Ahora construiremos la gráfica del conjunto solución de $\{(x,y) \in R \mid y > x\}$. Vea la fig. 4. Observe que cualquier punto sobre la recta corresponde a una solución de la ecuación $y = x$. ¿Cuáles de los puntos desde P_1 hasta P_{12} corresponden a soluciones de $y > x$?

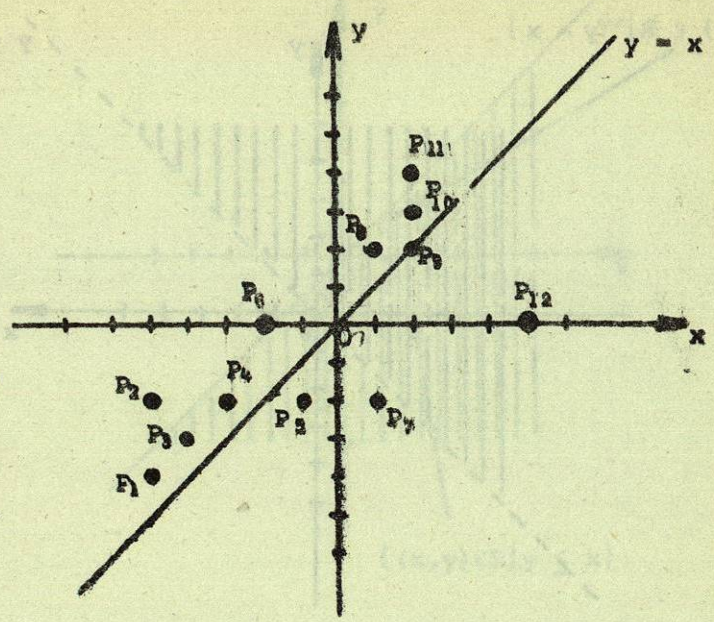

Fig. 4.

Note que la recta en la figura 4, como cualquier recta en un plano coordenado separa los puntos del plano que no están sobre la recta endos conjuntos disjuntos de puntos! Los dos conjuntos de puntos a cada lado de la recta, cada uno de los cuales se llama un *semiplano abierto*.

La unión de la recta con uno de los semiplanos abiertos que determina, se llama un *semiplano cerrado*. Así, podemos describir la gráfica de, $\{(x,y) \in R \mid y > x\}$ como el semiplano "arriba" de la recta que es la gráfica de $y = x$. La gráfica de, $\{(x,y) \in R \mid y > x\}$ se muestra en la figura 5. El objeto de la recta interrumpida es indicar que los puntos que limitan el semiplano no son parte de la gráfica o del conjunto solución de la desigualdad.

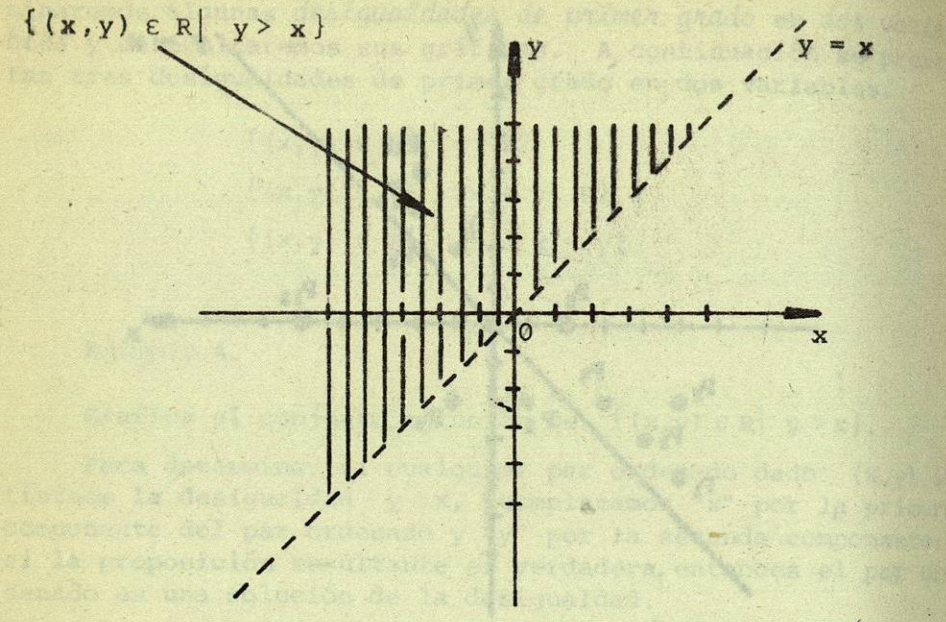

Fig. 5.

Sabiendo que la gráfica de $\{(x,y)\ \varepsilon\ R|\ y > x\}$ es el semiplano "arriba" de la línea interrumpida, describa la gráfica de $\{(x,y)\varepsilon\ R|\ y < x\}$

Ejemplo 5.

Grafica el conjunto solución de $\{(x,y)\ \varepsilon R|\ y \leq x\}$. Ya que el conjunto solución para $y \leq x$ es la unión de los conjuntos solución para $y=x$ y para $y < x$, vemos que la gráfica de $\{(x,y)\ \varepsilon\ R|\ y \leq x\}$ se muestra en la figura 6.

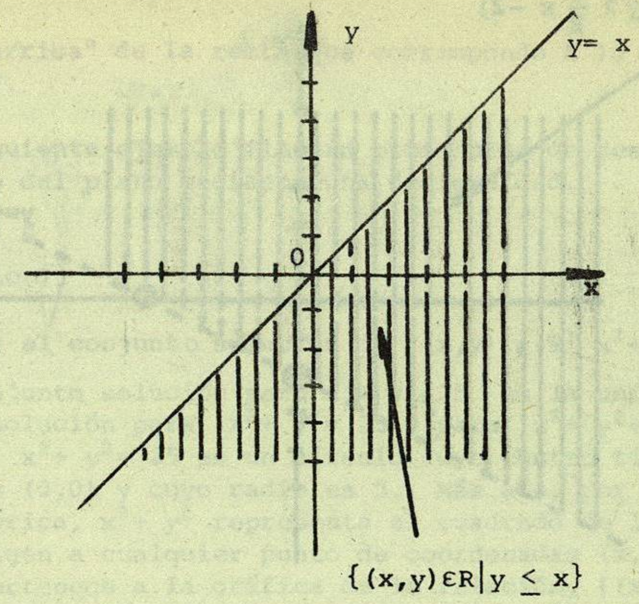

Fig. 6.

Note que la gráfica de $y \leq x$ es un *semiplano cerrado*. La recta llena límite indica que la recta pertenece al conjunto.

Ejemplo 6.

Grafica el conjunto solución de: $\{(x,y)\ \varepsilon\ R|y > \frac{1}{2}\ x-2\}$ Un par ordenado (a,b) es un elemento del conjunto solución de $y > 1/2\ x - 2$ si y solo sí $b > 1/2\ a - 2$. Por tanto, (a,b) no es una solución si,

$$b = \frac{1}{2}\ a - 2 \qquad \text{ó} \qquad b < \frac{1}{2}\ a - 2$$

¿Cuáles de los pares ordenados (4,5), (6,1), (-2,4), (-2,-4) son soluciones de $\{(x,y)\ \varepsilon R|\ y > 1/2\ x - 2\}$? La gráfica de $y > 1/2\ x - 2$ es un semiplano. ¿Está la gráfica del semiplano "arriba" o "abajo" de la recta que es la gráfica de $y = 1/2\ \ x - 2$? Vea la figura 7.

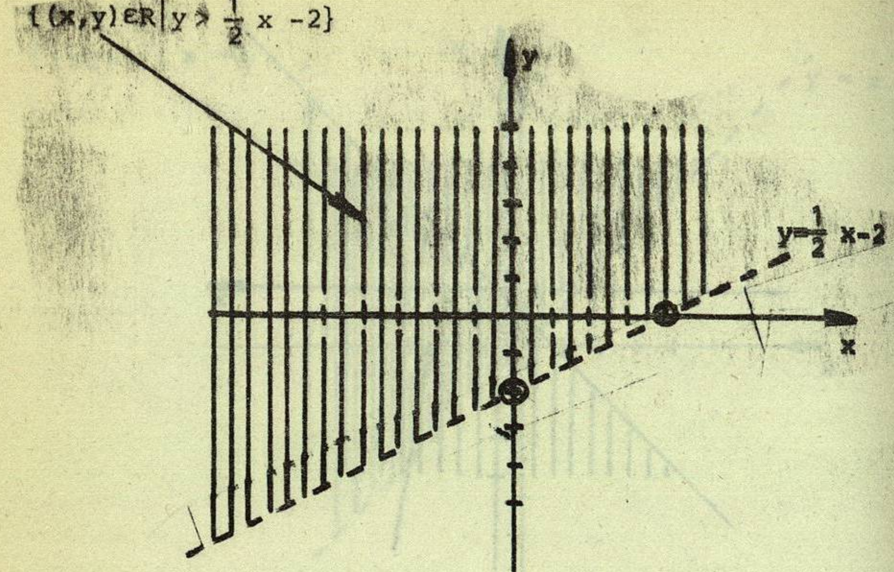

Fig. 7.

Como usted habrá supuesto probablemente, la gráfica de cualquier proposición abierta de la forma, $\{(x,y) \varepsilon R | Ax+By > C\}$, en que A y B son ambas diferentes de cero, es un semi-plano cuyo límite es la recta que corresponde a la gráfica de la ecuación $Ax + By = C$.

Así, para obtener la gráfica de cualquier caso de $\{(x,y) \varepsilon R | Ax + By > C\}$, primero encontramos la recta que correspon-de a la gráfica de $Ax + By = C$. El único problema restante es elegir el semiplano correcto. Esto puede hacerse escri-biendo la desigualdad $Ax + By > C$ en una forma equivalente, llamada la forma "y" de la desigualdad, donde "y" se deja so-la en un miembro de la desigualdad.

Por ejemplo, suponga que deseamos obtener la gráfica de la relación $\{(x,y) \varepsilon R | 2x + y > 1\}$. La forma "y" de esta de-sigualdad es $y > -2x + 1$.

Ahora se ve fácilmente que la gráfica deseada es el semi-

plano de "arriba" de la recta que corresponde a la gráfica de $y = -2x + 1$.

El siguiente ejemplo ilustra otra forma de describir un subconjunto del plano mediante una desigualdad.

Ejemplo 7.

Hallar el conjunto solución de $\{(x,y) \varepsilon R | x^2 + y^2 \leq 25\}$

El conjunto solución para $x^2 + y^2 \leq 25$ es la unión de los conjuntos solución para $x^2 + y^2 = 25$ y para $x^2 + y^2 < 25$. La gráfica de $x^2 + y^2 = 25$ es un círculo cuyo centro tiene por coordenadas (0,0) y cuyo radio es 5. Más aún, por la rela-ción pitagórica, $x^2 + y^2$ representa el cuadrado de la distan-cia del origen a cualquier punto de coordenadas (x,y); así, un punto pertenece a la gráfica de la relación, $\{(x,y) \varepsilon R | x^2 + y^2 < 25\}$ si y solo sí queda dentro de la gráfica del círcu-lo $x^2 + y^2 = 25$. Concluímos que la gráfica del conjunto solu-ción de $\{(x,y) \varepsilon R | x^2 + y^2 \leq 25$ está dada por el área som-breada de la fig. 8, incluyendo el límite.

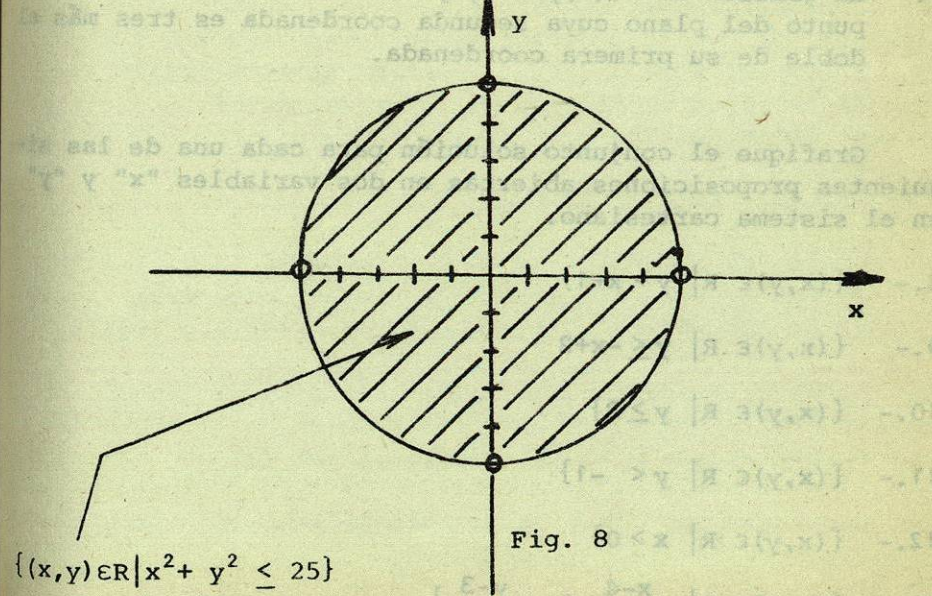

Fig. 8