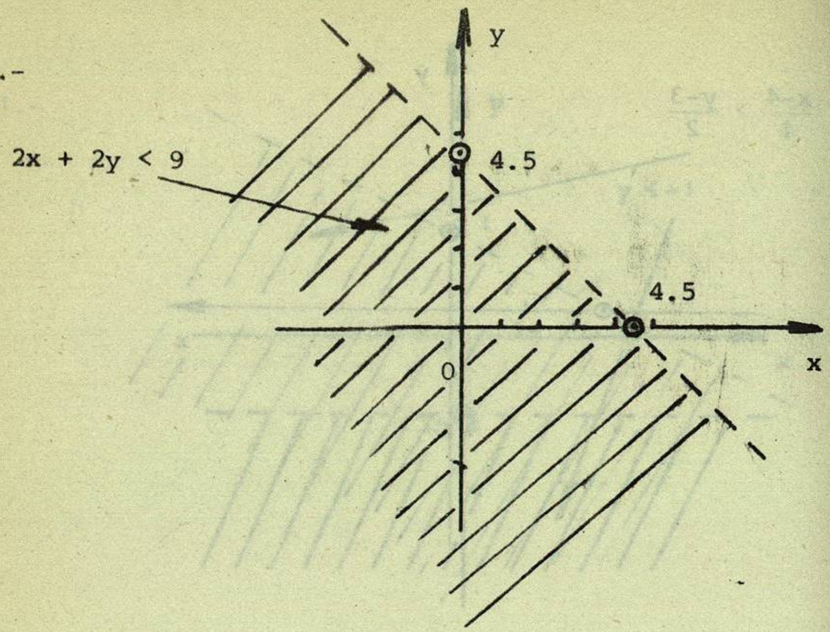
15.-



DESIGUALDADES E INECUACIONES LINEALES.

LECCIÓN 2.

4-7 INTRODUCCIÓN.

La solución a un problema práctico no siempre es un solo número. A menudo hallamos que la solución puede ser cualquier número menor que cierto número o cualquier número entre dos números. En la matemática es, por tanto, importante estudiar no solamente ecuaciones sino también las relaciones *"menor que"* y *"mayor que"*

Los enunciados que contienen una o ambas de estas relaciones se llaman *desigualdades*.

Es necesario conocer a fondo tales situaciones para comprender los números de manera completa. Además, hay problemas complejos que se pueden resolver solo en términos de *desigualdades*; tales problemas pertenecen al campo de las matemáticas aplicadas. El saber encontrar los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones nos capacita para resolver problemas. El éxito dependerá entre otras cosas, de la habilidad para traducir el enunciado al lenguaje algebráico.

En esta lección consideraremos primero *inecuaciones* con una sola variable "x". Entonces el problema consiste en determinar el dominio de valores de la variable "x" para los cuales es válida la desigualdad. Este dominio recibe el nombre de *solución* de la *inecuación*. Si la variable "x" entra solamente en forma de primera potencia, la inecuación se llama de primer grado o lineal. La resolución de una inecuación lineal es muy sencilla y análoga a la resolución de una ecuación lineal con una incógnita.

A menudo al resolver un problema no nos interesa hallar una cantidad exacta sino más bien el mínimo o el máximo de la cantidad necesaria. Determinamos las respuestas a esos problemas resolviendo *inecuaciones* más bien que ecuaciones. El concepto de desigualdad se aplica solo a los números reales.

4-8 SISTEMAS DE DESIGUALDADES LINEALES EN UNA VARIABLE.

En esta sección resolveremos algunos sistemas sencillos de desigualdades. El conjunto solución de un sistema de desigualdades en una variable consiste en todos los números que satisfacen a ambas desigualdades.

Para saber que se entiende por el conjunto solución de un sistema de dos desigualdades, hacemos la siguiente definición:

DEFINICION.

El conjunto solución de un sistema de dos desigualdades es la intersección de los conjuntos solución de las respectivas desigualdades.

Ilustraremos las formas de determinar los conjuntos solución de sistemas de desigualdades mediante ejemplos.

Ejemplo 1.

Resolver el sistema de desigualdades en una variable:

$$2x - 7 < 5 - x$$

$$11 - 5x < 1$$

Buscamos el conjunto de valores para x que hacen a cada desigualdad válida. La primera desigualdad es válida para todos los valores de $x < 4$ y la segunda para todos los valores de $x > 2$. Por tanto, la solución del sistema está dada por la intersección de estos dos conjuntos que puede expresarse mediante:

$\{x \in R \mid x < 4 \text{ y } x > 2\}$ que es lo mismo que,

$\{x \in R \mid x < 4\} \cap \{x \in R \mid x > 2\}$ o sea,

$\{x \in R \mid 2 < x < 4\}$

La gráfica del conjunto solución en una recta numérica dirigida es la siguiente:

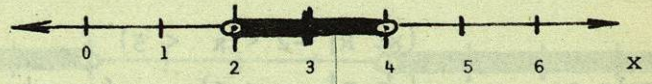


Fig. 1.

observe que los límites de la gráfica que corresponden a los números 2 y 4 no están incluídos en el conjunto.

Ejemplo 2.

Resolver la desigualdad: $|2x - 3| < 7$

Recordando la definición de valor absoluto de un número. El valor absoluto de un número real "a" denotado por $|a|$, es el número real tal que, $|a| = a$, cuando "a" es positivo o cero, $(a \geq 0)$ y $|a| = -a$, cuando "a" es negativo, $(a < 0)$. Entonces vemos que la desigualdad dada es equivalente al sistema,

$$2x - 3 < 7$$
$$2x - 3 > -7$$

Por conveniencia en encontrar el conjunto solución, expresamos primero el sistema en la forma extendida equivalente:

$$-7 < (2x-3) < 7$$

ahora sumamos 3: $-4 < 2x < 10$

dividimos por 2: $-2 < x < 5$

Por tanto, la solución de la desigualdad dada consiste en el conjunto de números entre -2 y 5, sin incluir los límites, o sea, $\{x \in R \mid -2 < x < 5\}$

Sobre la recta numérica el conjunto solución queda: fig.2

$\{x \in R \mid -2 < x < 5\}$

equivale a: $\{x \in R \mid x < 5\}$ y $\{x \in R \mid x > -2\}$

o sea: $\{x \in R \mid x < 5\} \cap \{x \in R \mid x > -2\}$

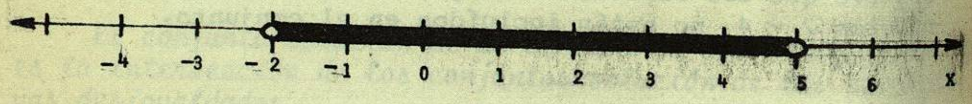


Fig. 2.

Ejemplo 3.

Dada la siguiente gráfica, exprésala como una proposición abierta en notación descriptiva:

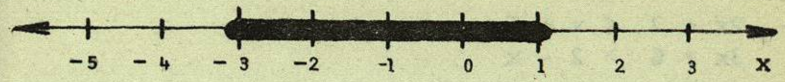


Fig. 3.

Se observa que los puntos extremos de la gráfica pertenecen al conjunto y también todos los números menores que 1 y mayores que -3, o sea $x \leq 1$ y $x \geq -3$ por lo que la gráfica representa la intersección de las proposiciones abiertas anteriores. En notación descriptiva queda:

$$\{x \in R \mid -3 \leq x \leq 1\}$$

Ejemplo 4.

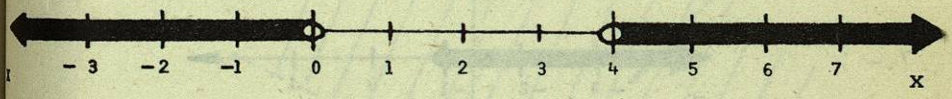


Fig. 4.

Expresa la gráfica de la figura 4 como una proposición abierta en notación descriptiva.

Se observa que los números 0 y 4 no pertenecen al conjunto pero sí los mayores que 4 o los menores que 0. Por tanto, $x > 4$ ó $x < 0$. Esto es lo mismo que la unión,

$$\{x \in R \mid x > 4\} \cup \{x \in R \mid x < 0\}$$

o sea, $\{x \in R \mid x > 4$ ó $x < 0\}$

AUTOEVALUACIÓN 1.

Resuelva cada sistema de desigualdades algebráicamente y exprese la respuesta en notación descriptiva. Además grafique la solución sobre una recta numérica dirigida.

1.- $2x + 2 < x + 5$
$3x + 6 > 2 - x$

2.- $10x + 6 > 2x - 2$
$4x - 7 < 3 - x$

3.- $5x - 6 < x + 2$
$4x - 7 > 11 - 2x$

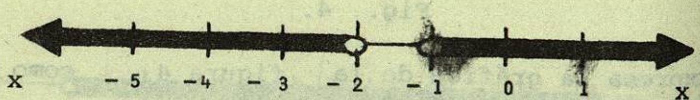
4.- $|x - 3| < 2$

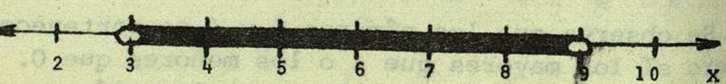
5.- $|2x - 9| < 5$

6.- $|3 - 5x| \leq 12$

Dadas las siguientes gráficas, represéntalas en notación descriptiva.

7.- 

8.- 

9.- 

10.- 

4-9 SISTEMAS DE DESIGUALDADES LINEALES EN DOS VARIABLES.

La forma más sencilla de tener acceso a las soluciones de sistemas de desigualdades lineales en dos variables es por graficación. Ilustraremos las formas de determinar los conjuntos solución de sistemas de desigualdades mediante ejemplos.

Ejemplo 5.

Grafique el conjunto solución de $\{(x,y) \in R \mid x + 2y > 3\}$

Primero, graficamos $x + 2y = 3$ (usamos trazos interrumpidos para esta gráfica); la recta $x + 2y = 3$ separa los puntos del plano que no están sobre la recta en dos semiplanos. Uno de esos semiplanos es la gráfica de:

$$\{(x,y) \in R \mid x + 2y > 3\}$$

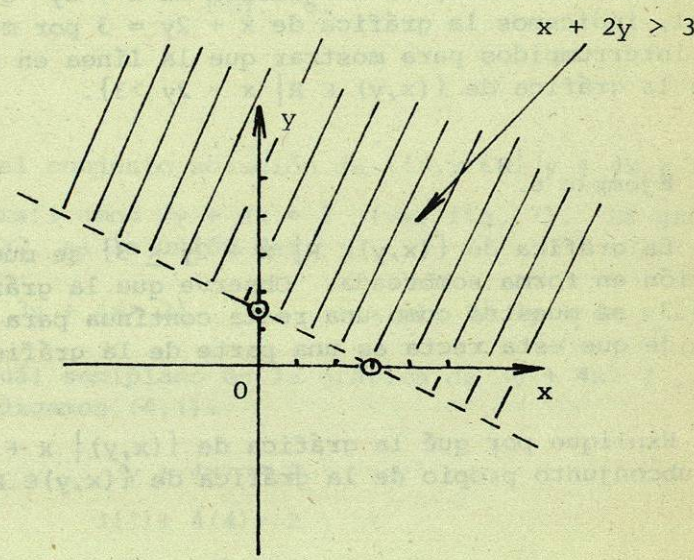


Fig. 5.

En la lección anterior aprendimos que el semiplano correcto puede obtenerse encontrando la forma "y" de la desigualdad. Otro procedimiento para encontrar el semiplano correcto consiste en probar un punto en cualquier semiplano. Por ejemplo, probemos un punto que pertenece al semiplano superior, digamos (4,3); .

$$x + 2y > 3$$
$$(4) + 2(3) > 3$$
$$4 + 6 > 3$$
$$10 > 3 \quad \text{(verdadero)}$$

Así, (4,3) pertenece a $\{(x,y) \in R \mid x + 2y > 3\}$. Escoja un punto en el semiplano inferior. ¿Sus coordenadas satisfacen la desigualdad?

Concluímos que el semiplano superior, una porción del cual está sombreada, es la gráfica de $x + 2y > 3$. Como es lo usual, indicamos la gráfica de $x + 2y = 3$ por medio de trazos interrumpidos para mostrar que la línea en sí no pertenece a la gráfica de $\{(x,y) \in R \mid x + 2y > 3\}$.

Ejemplo 6.

La gráfica de $\{(x,y) \in R \mid x + 2y \leq 3\}$ se muestra a continuación en forma sombreada. Observe que la gráfica de $x + 2y = 3$ se muestra como una recta contínua para resaltar el hecho de que esta recta es una parte de la gráfica de $x + 2y \leq 3$.

Explique por qué la gráfica de $\{(x,y) \mid x + 2y = 3\}$ es un subconjunto propio de la gráfica de $\{(x,y) \in R \mid x + 2y \leq 3\}$

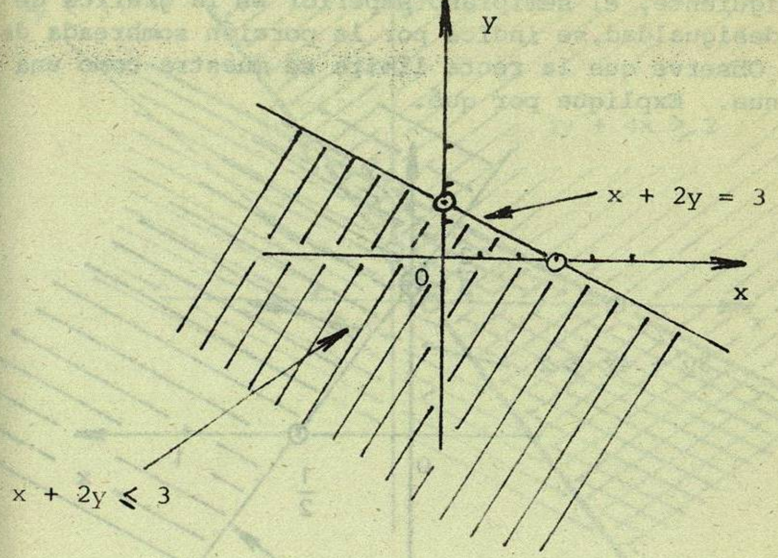


Fig. 6.

Ejemplo 7.

Grafique el conjunto solución de $\{(x,y) \in R \mid 3y + 4x \geq 2\}$

Primero graficamos $3y + 4x = 2$ (ver fig. 7). La gráfica de $3y + 4x \geq 2$ es la unión de:

$$\{(x,y) \in R \mid 3y + 4x > 2\} \quad \text{ó} \quad \{(x,y) \in R \mid 3y + 4x = 2\}$$

para decidir cuál semiplano es la gráfica de $3y + 4x > 2$, probamos un par, digamos (4,1):

$$3y + 4x > 2$$
$$3(1) + 4(4) > 2$$
$$3 + 16 > 2$$
$$19 > 2 \quad \text{(cierto)}$$

Por consiguiente, el semiplano superior es la gráfica de nuestra desigualdad, se indica por la porción sombreada de arriba. Observe que la recta límite se muestra como una recta contínua. Explique por qué.

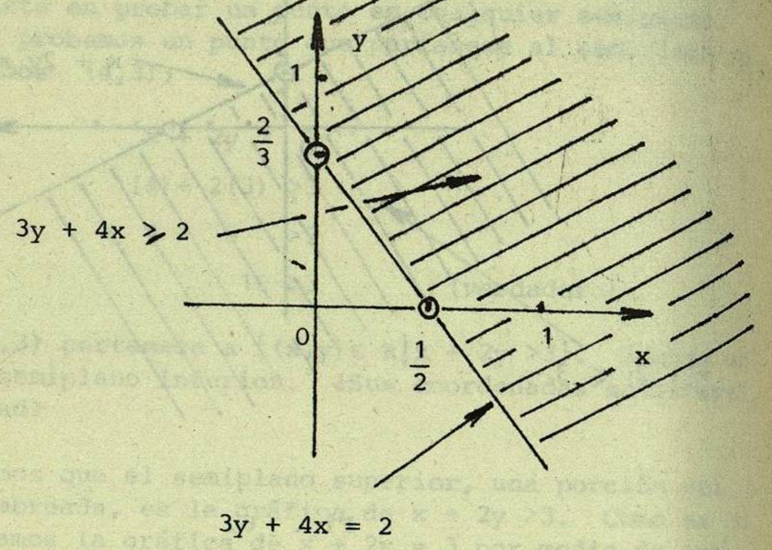


Fig. 7.

Ahora consideraremos la gráfica de un sistema de dos desigualdades lineales en dos variables.

Ejemplo 8.

Grafique el conjunto solución del sistema:

$$x + 2y \leq 3$$
$$3y + 4x \geq 2$$

La porción que está doblemente sobreada (cuadrícula) es la gráfica del conjunto solución del sistema. Diga qué partes de las rectas límites pertenecen a la gráfica. Explique por qué son una parte de la gráfica.

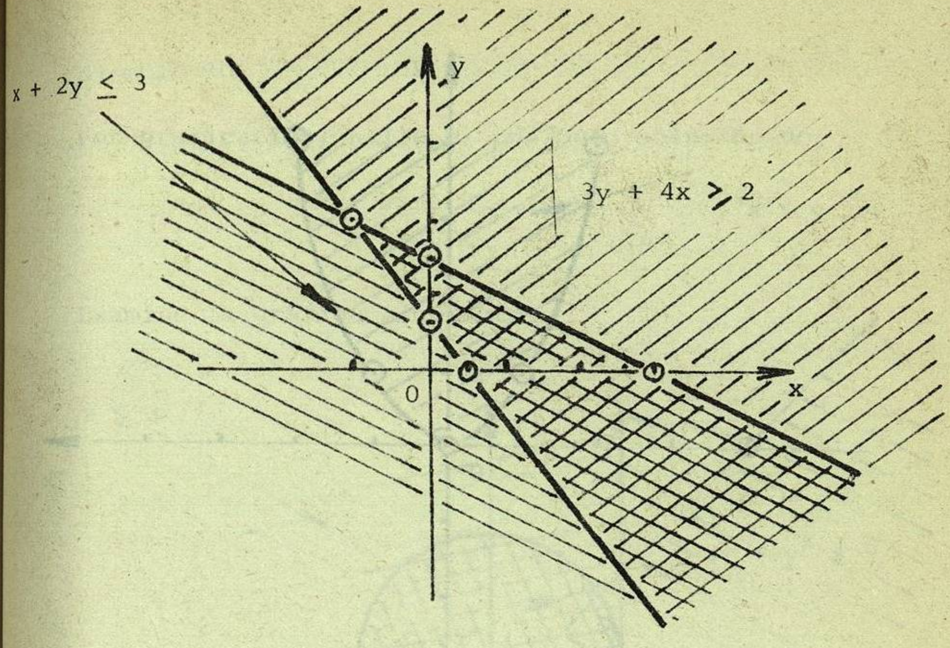


Fig. 8.

El conjunto solución del sistema puede describirse como $\{(x,y) \in R \mid x + 2y \leq 3$ y $3y + 4x \geq 2\}$, que es lo mismo que:
$\{(x,y) \in R \mid x + 2y \leq 3\} \cap \{(x,y) \in R \mid 3y + 4x \geq 2\}$

Ejemplo 9.

Mediante graficación, hallar el conjunto solución del sistema:

$$y \geqslant x^2$$
$$x + y \leq -4$$

Primero graficamos $y= x^2$ que es una parábola con vértice en el origen y abriendo sus ramas hacia arriba. La gráfica de $\{(x,y) \mid y \geqslant x^2\}$ es la unión de la parábola con su área interior representada por la porción sombreada.