

Fig. 9.

La gráfica de $\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x + y \leq -4\}$ es la línea recta ó la parte sombreada abajo de ella. A partir de la gráfica del sistema, es evidente que el conjunto solución del mismo es el conjunto vacío. Tenemos:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid y > x^2\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x + y \leq -4\} = \phi$$

Ejemplo 10.

Por graficación, halle el conjunto solución de:

$$x^2 + y^2 \leq 9$$

$$x \leq 3$$

Examine la gráfica siguiente:

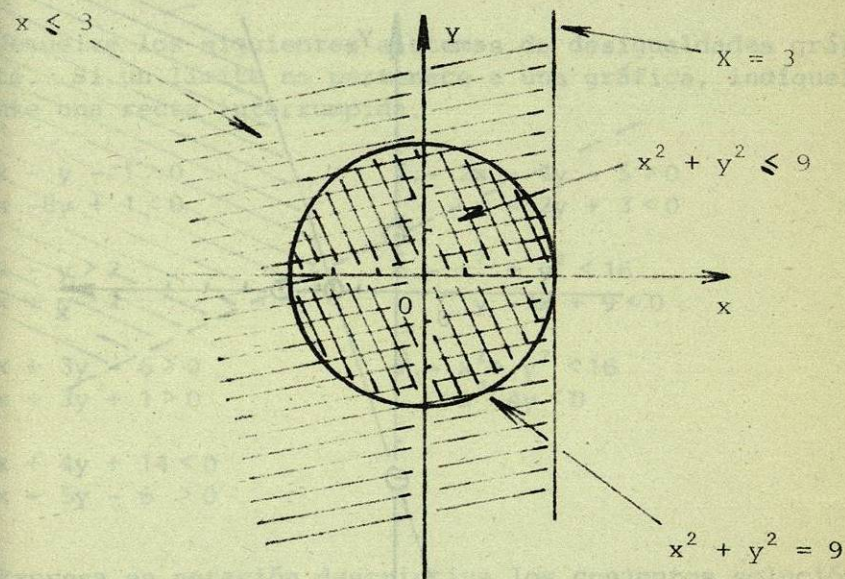


Fig. 10.

Explique por qué es cierto lo siguiente:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 9\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$$

Aquí la gráfica del conjunto solución es la unión de la circunferencia con el interior del círculo.

Ejemplo 11.

Vea la fig. 8. Escriba en forma de proposición abierta y en notación descriptiva, la porción de área angular sin sombrear limitada por las rectas $x + 2y = 3$ y $3y + 4x = 2$.

Es fácil ver que es: $\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x+2y \geq 3 \text{ y } 3y+4x \leq 2\}$

Ejemplo 12.

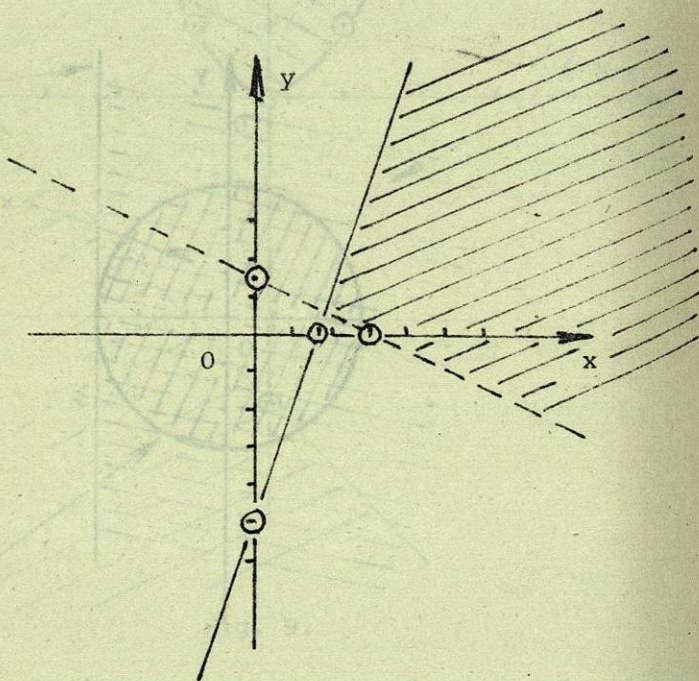


Fig. 11

En la fig. 11, la recta trazada con línea llena está dada por la proposición abierta, $\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid y-3x = -5\}$ y la línea de trazos por, $\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x+2y = 3\}$

Encuentra la correspondiente al conjunto solución mostrado.

Como el área indicada queda arriba de la recta punteada y abajo de la recta llena, entonces se tiene:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x+2y > 3 \text{ y } y-3x \leq -5\}$$

Compruebe su respuesta examinando un punto en el área concerniente.

AUTOEVALUACIÓN 2.

Resuelve los siguientes sistemas de desigualdades gráficamente. Si un límite no pertenece a una gráfica, indíquelos mediante una recta interrumpida.

1.- $2x - y - 1 > 0$
 $x - 8y + 1 < 0$

5.- $2x - 4y - 5 > 0$
 $x - 2y + 3 < 0$

2.- $2x - y > 2$
 $2x + y > 2$

6.- $x^2 + y^2 < 16$
 $y - 3x + 9 < 0$

3.- $4x + 3y - 6 > 0$
 $4x + 3y + 1 > 0$

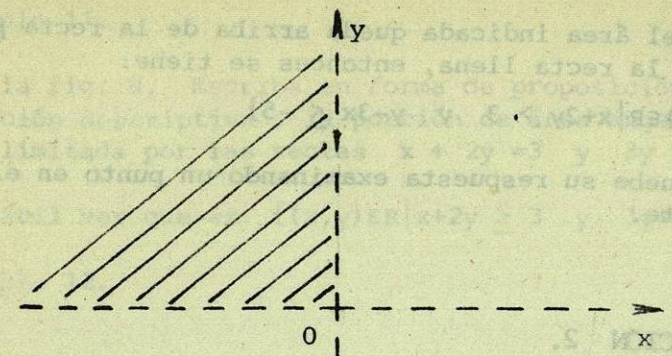
7.- $x^2 + y^2 < 16$
 $x^2 - 4y < 0$

4.- $3x + 4y + 14 < 0$
 $2x - 5y - 6 > 0$

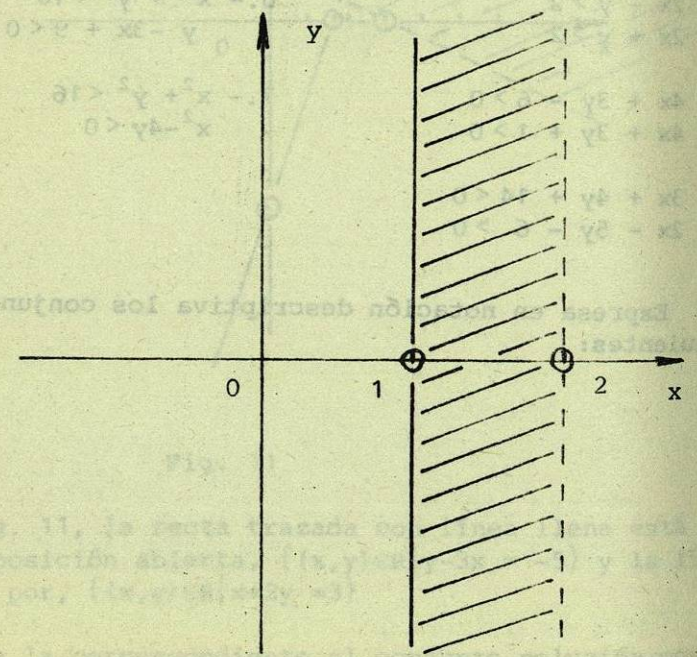
Expresa en notación descriptiva los conjuntos solución siguientes:

CAPILLA ALFONSINA
UNIVERSITARIA

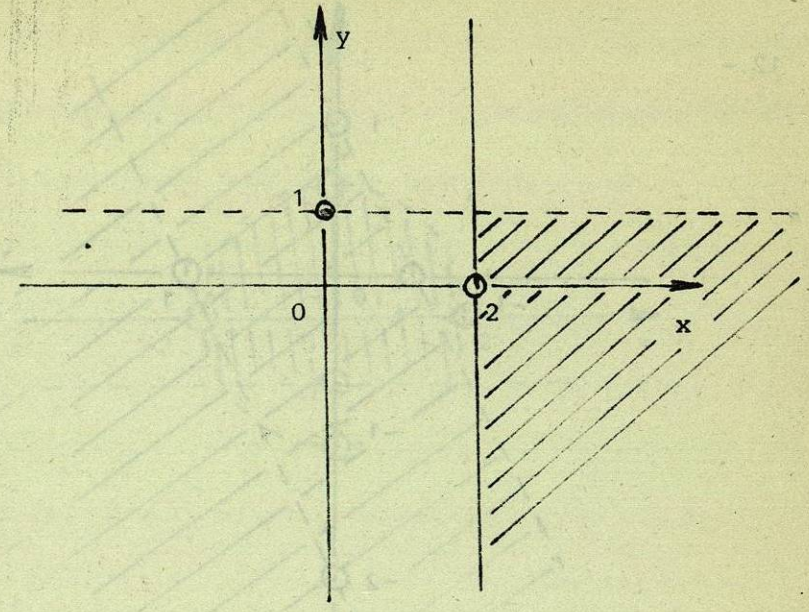
8.-



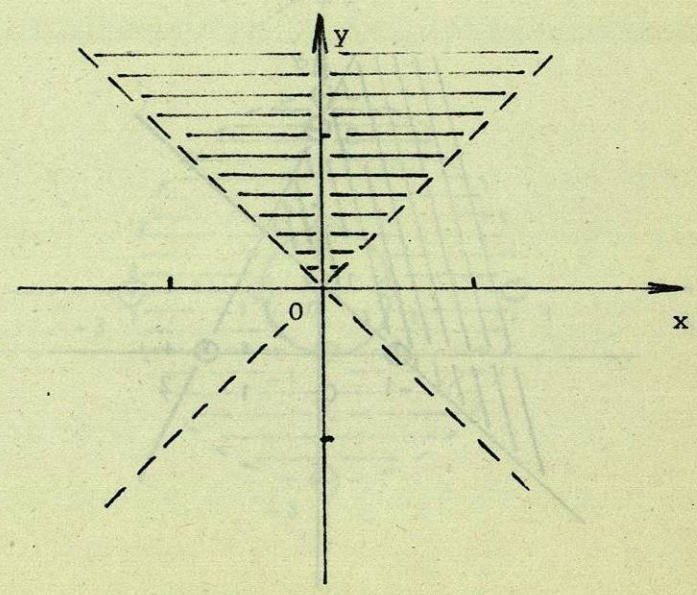
9.-



10.-

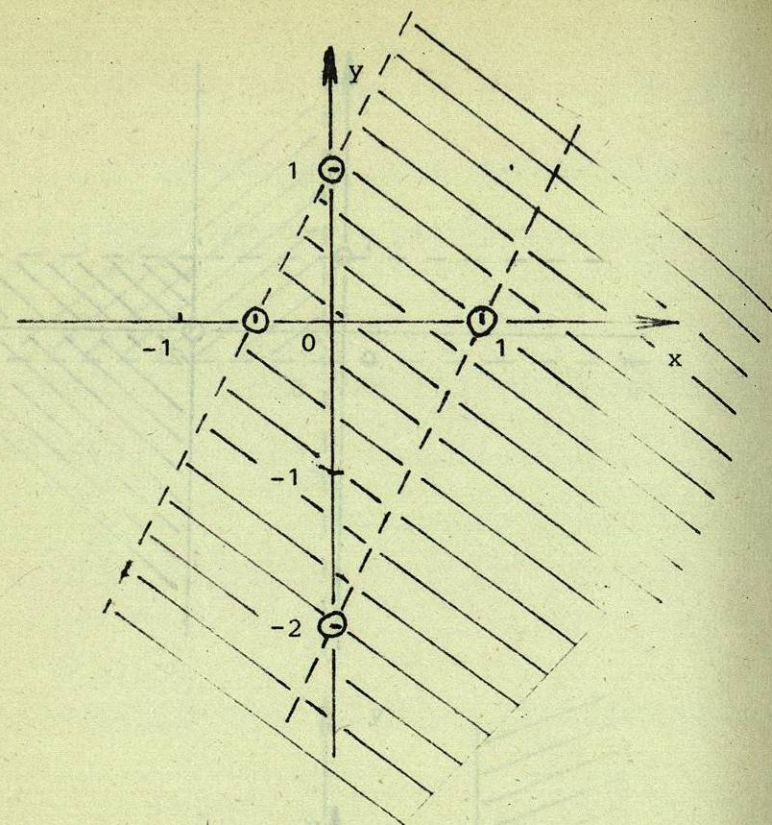


11.-

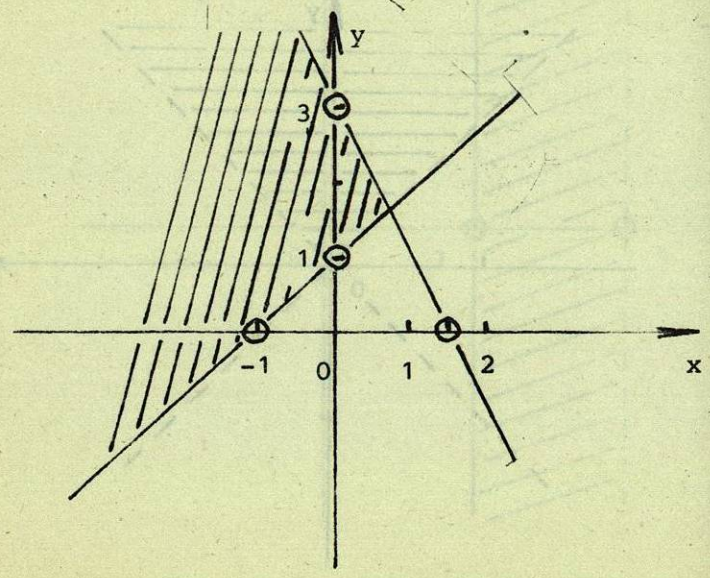


BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
 CARRILLO ALFONSINA

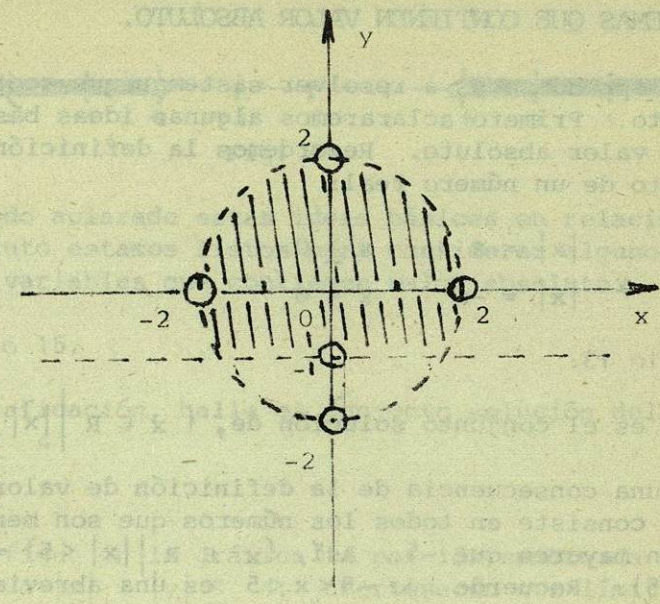
12.-



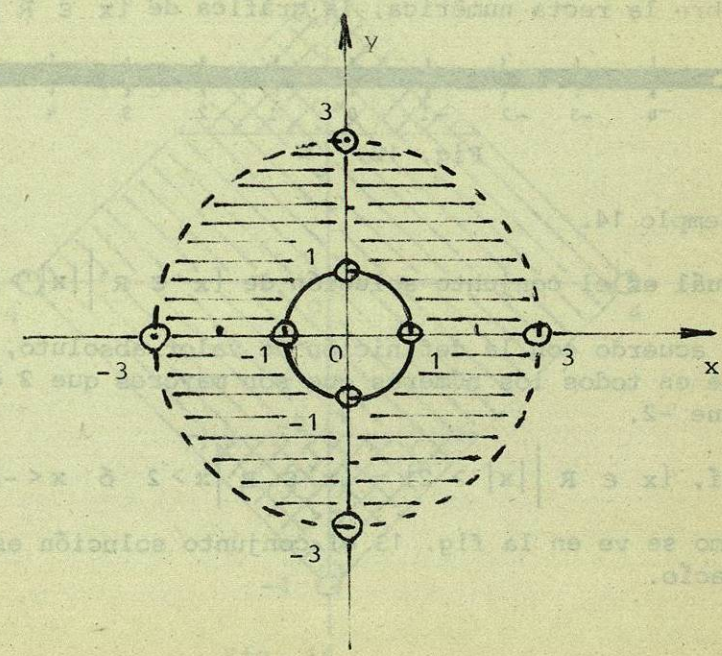
13.-



14.-



15.-



4-10 SISTEMAS QUE CONTIENEN VALOR ABSOLUTO.

Ahora aprenderemos a resolver sistemas que contienen valor absoluto. Primero aclararemos algunas ideas básicas acerca del valor absoluto. Recordemos la definición del valor absoluto de un número real:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 13:

¿Cuál es el conjunto solución de, $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 5\}$?

Como una consecuencia de la definición de valor absoluto $|x| < 5$ consiste en todos los números que son menores que 5 y que son mayores que -5. Así, $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 5\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 5\}$. Recuerde que $-5 < x < 5$ es una abreviatura para $-5 < x$ y $x < 5$.

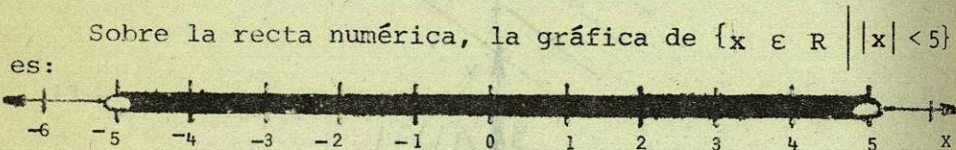


Fig. 12

Ejemplo 14.

¿Cuál es el conjunto solución de $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 2\}$.

De acuerdo con la definición de valor absoluto, $|x| > 2$ consiste en todos los números que son mayores que 2 ó son menores que -2.

$$\text{Así, } \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \text{ ó } x < -2\}$$

Como se ve en la fig. 13 el conjunto solución es el conjunto vacío.



Fig. 13

Habiendo aclarado estas ideas básicas en relación con valor absoluto estamos listos para considerar algunos sistemas en dos variables que contienen valor absoluto.

Ejemplo 15.

Por graficación, halle el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} |x| + |y| \leq 4 \\ |y| \geq 2 \end{cases}$$

Identifique en la gráfica la porción sombreada que es la gráfica de $|x| + |y| \leq 4$. ¿Pertenece sus límites al conjunto?

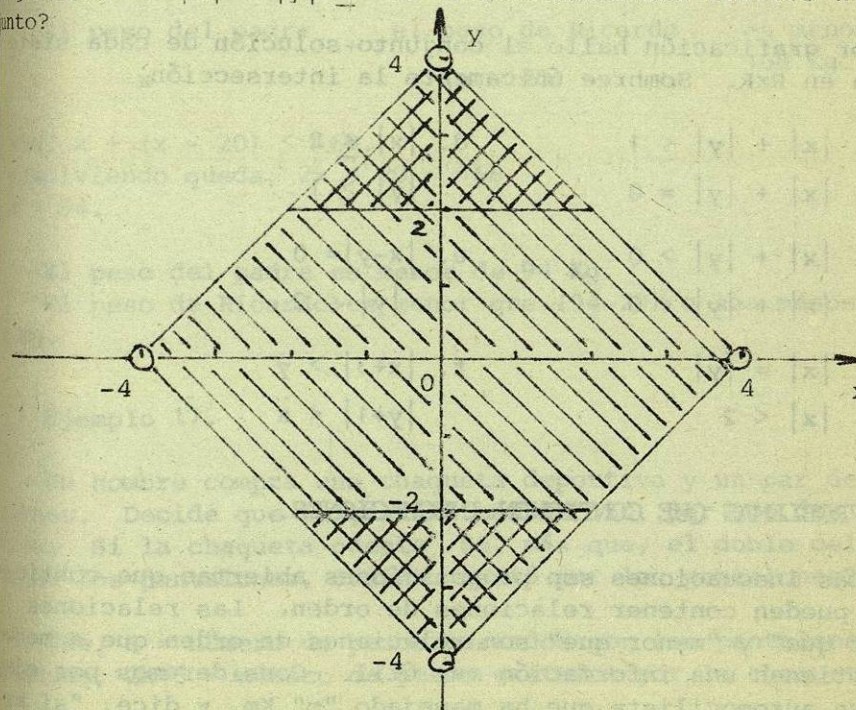


Fig. 14

Identifique la gráfica de $|y| \geq 2$. ¿Pertencen sus límites a la gráfica?

AUTOEVALUACIÓN 3.

1.- Grafique el conjunto solución de cada uno de los siguientes sistemas sobre una recta numérica separada. Si el conjunto solución es el conjunto vacío, escriba \emptyset .

- a. $|x| < 3$
- b. $|x| \leq 0$
- c. $|x| > 1$

2.- Para cada conjunto no vacío de los problemas anteriores dé una descripción diferente para ello usando la intersección o la unión de dos conjuntos.

3.- Por graficación halle el conjunto solución de cada sistema en RXR. Sombree únicamente la intersección.

- a. $|x| + |y| \leq 1$
- b. $|x| + |y| > 0$
- c. $|x| = |y|$
- d. $|x| \leq 2$
- e. $|x-y| = 0$
- f. $|x+3| > y$
- $|x| + |y| = 0$
- $|x| + |y| < 0$
- $|x| < 2$
- $|y| > 1$
- $|y| \leq 2$
- $|y+1| < x$

4-11 PROBLEMAS QUE CONTIENEN INECUACIONES.

Las inecuaciones son proposiciones abiertas que contienen o pueden contener relaciones de orden. Las relaciones "mayor que" y "menor que" son relaciones de orden que a menudo contienen una información muy útil. Consideremos por ejemplo, un automovilista que ha manejado "m" Km. y dice, "si mane-

jejo otros 30 Km, habré hecho más de 80 Km." ¿Cuánto ha manejado ya?. Esta proposición puede traducirse así: $m + 30 > 80$. Si encontramos el conjunto solución de esta inecuación tenemos $m > 50$ por lo que sabemos que el automovilista ha recorrido más de 50 Km.

Supongamos que el automovilista hubiese dicho: "Si maneje 30 Km. más, cuando menos habré recorrido 80 Km." La proposición abierta para esta proposición verbal es, $m + 30 \geq 80$. Consideremos unos cuantos ejemplos:

Ejemplo 16.

Ricardo pesa 20 Kg. menos que su padre. La suma de sus pesos es menor que 168 Kg. ¿Cuánto pesa Ricardo?

Sea, x = peso del padre.
entonces, $x-20$ = peso de Ricardo.

El peso del padre + el peso de Ricardo es menor que 168 Kg.

$$x + (x - 20) < 168$$

o sea, $x + (x - 20) < 168$.
y resolviendo queda, $2x - 20 < 168$
 $x < 94$.

El peso del padre es menor de 94 Kg.

El peso de Ricardo es menor que $(94-20)$ o sea menos que 74 Kg.

Ejemplo 17.

Un hombre compra una chaqueta deportiva y un par de pantalones. Decide que no gastará más de \$50. por los dos artículos. Si la chaqueta cuesta \$5. más que, el doble del precio de los pantalones, ¿cuánto gastó por los pantalones?

Sea, x = número de pesos gastados por los pantalones.
entonces, $2x+5$ = número de pesos gastados por la chaqueta.

El costo de los pantalones + el costo de la chaqueta no es más de \$50.

$$\text{o sea: } x + (2x + 5) \leq 50.$$

$$\text{resolviendo: } 3x + 5 \leq 50; x \leq 15.$$

Por tanto los pantalones costaron #15. o menos.

Ejemplo 18.

Un comerciante vende unas camisas a \$5. y otras camisas a \$4. Si vende 12 camisas de \$4. más que de las de \$5., ¿Cuántas vendió de cada clase si recibió en total un mínimo de \$300.?

Sea, x = número de camisas de \$5. que vendió.
entonces, $x+12$ = número de camisas vendidas de \$4.

Recibido por las de \$5. + Recibido por las de \$4.

$$5x \qquad 4(x + 12)$$

cuando menos llega a \$300.

$$\text{o sea, } 5x + 4(x+12) \geq 300.$$

$$\text{resolviendo: } 5x + 4x + 48 \geq 300; 9x \geq 252 \quad y, \quad x \geq 28.$$

$$\text{Por tanto, } x + 12 \geq 28 + 12.$$

$$x + 12 \geq 40$$

El comerciante debe vender cuando menos 28 camisas de \$5. y cuando menos 40 camisas de \$4.

AUTOEVALUACIÓN 4.

- 1.- Carolina es tres años mayor que Juanita. La suma de sus edades no llega a 35 años. ¿Cuántos años tiene Juanita?
- 2.- Un estudiante recibió calificaciones de 86, 75 y 80 en tres pruebas, ¿cuál deberá ser su calificación en una cuarta prueba para que su promedio en las cuatro pruebas sea como mínimo 82?

- 3.- Los grupos de primero y segundo año de una escuela secundaria convinieron en contribuir cuando menos con \$500. para un fondo atlético de la escuela. Si los grupos de 2º. año prometieron contribuir con \$40. más que los grupos de primero, ¿cuál es la cantidad mínima que deben poner los grupos de primero?
- 4.- Una alcancía tiene 15 monedas de a 10 centavos más que monedas de 5 centavos. Si el total de los valores de las monedas es más de \$5.55 ¿cuántas monedas de 5 centavos tiene la alcancía?
- 5.- A un hombre que está pasado de peso le dice su médico que debe perder cuando menos 30 libras en 8 semanas. Si pierde 9 libras durante las primeras dos semanas, ¿cuántas deberá perder por semana en las siguientes seis semanas.?
- 6.- Un hombre ya retirado de su trabajo encuentra que necesitará más de \$500. por año de utilidad de sus inversiones. Invirtió \$8000. al 4%. ¿Cuánto necesitará invertir al 5% para llenar sus necesidades?

AUTOEVALUACIÓN DE LA LECCIÓN 2.

Resuelva los siguientes sistemas algebraicamente:

$$1.- \begin{cases} 8 - 3x < 5x - 10 \\ 2x - 15 < 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0) \{x \in \mathbb{R} | x < 10\} & \quad 1) \{x \in \mathbb{R} | x > 9/4\} & \quad 2) \{x \in \mathbb{R} | x > 10\} \\ 3) \{x \in \mathbb{R} | 9/4 < x < 10\} & \quad 4) \{x \in \mathbb{R} | x < 9/4\} \end{aligned}$$

$$2.- \begin{cases} 7x + 50 > 10 - 3x \\ 7x + 4 < 2x - 6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0) \{x \in \mathbb{R} | x < -4\} & \quad 1) \{x \in \mathbb{R} | x > -2\} & \quad 2) \{x \in \mathbb{R} | -4 < x < -2\} \\ 3) \{x \in \mathbb{R} | x > -4\} & \quad 4) \{x \in \mathbb{R} | x < -2\} \end{aligned}$$