CAPITULO 5.

RAZÓN, PROPORCIÓN Y VARIACIÓN.

5-1 INTRODUCCIÓN.

La necesidad de contar condujo al hombre a inventar el concepto de número. Si se observa a la gente, puede pensarse que otro uso primitivo de los números puede haber sido el de comparar varias cantidades. Si se observa a dos niños, puede verse que están muy interesados en comparar cosas, como por ejemplo cuál de sus vasos de leche es más grande, cuál de sus mamás es más lista, etc.

Un método para comparar cantidades, es encontrar la diferencia entre las dos cantidades. Por ejemplo, si una persona tiene 22 años y otra tiene 33, la diferencia en sus edades es 11 años. Por lo tanto, se puede decir que la primera persona es 11 años más joven que la segunda, que la segunda es 11 años mayor que la primera.

Un segundo método para comparar estas dos mismas edades, sería el de decir que una persona tiene 2/3 de la edad de la otra. Cuando se comparan cantidades por este método, se está usando el concepto de *razón*. En efecto, estamos diciendo que por cada dos años de vida de la persona más joven, la persona mayor ha tenido tres años de vida. Podríamos decir que la *razón* en años de la edad de la primera persona a la edad de la segunda persona es 2 a 3.

Usando símbolos se puede escribir la *razón* de sus edades como $\frac{2}{3}$, 2:3, 2/3, ó 2÷3.

La *razón* de dos cantidades semejantes de define como el cociente de la primera cantidad dividida entre la segunda. Hay que notar que este cociente se expresa usualmente en sus términos más simples. Así, la *razón* de 20 a 50 se escribe como 2:5 no como 20:50

5-2 RAZÓN.

La *razón* de 15 días a 35 días puede expresarse como $\frac{3}{7}$, 3 : 7 ó 3/7. Generalmente se establece la siguiente definición.

Definición 1:

Si "a" es una cantidad expresada en alguna unidad de medida y "b" alguna cantidad expresada en la misma unidad de medida, entonces la razón de "a" a "b" es el cociente $\frac{a}{b}$.

Como ya hemos visto, hay tres formas de escribir la razón de "a" a "b": $\frac{a}{b}$, a:b y a÷b. Note que la *razón* de dos cantidades, se define solo si las unidades de medida son las mismas, pero estas unidades no se tienen que incluir en la forma final de la razón. Así, en el caso del primer ejemplo acerca de la razón de dos edades, ambas se dieron en años, pero la razón de las edades fué simplemente 2 : 3.

Ejemplo 1.

Seleccione una de las tres respuestas dadas a continuación, para completar la siguiente proposición. Una *razón* es:

a) El cociente de dos cantidades.

b) La diferencia entre dos cantidades semejantes.

c) El cociente de dos cantidades semejantes.

La elección de (c) es correcta, porque incluye las dos ideas de cociente y cantidades semejantes. Esto es importante. Nos dice por ejemplo, que la razón de 3 días a una semana puede encontrarse transformado la semana en 7 días y escribiendo la razón como 3:7, lo cual se puede hacer ya que las unidades son las mismas.

Hemos definido una *razón* como el *cociente de dos cantidades semejantes*. Sin embargo, con frecuencia encontrará una razón expresada entre dos cantidades que son completamente diferentes en unidades de medida. Por ejemplo, la velocidad (V) se puede expresar como la razón de la distancia (d) al tiempo (t):

$$V = \frac{d}{t}$$

si "a" y "b" no representan cantidades de la misma especie, la razón a : b representa simplemente una porción de "a" que corresponde a una unidad "b", como una milla por hora.

AUTOEVALUACIÓN 1.

Escriba en su forma más simple la razón de lo siguiente:

1.- 7 docenas a 6 docenas.

2.- 3 yardas a 7 pies.

3.- 85 libras por pulgada cuadrada a 150 libras por pulgada cuadrada.

4.- 36 pies cuadrados a 3 yardas cuadradas.

5.- 25 galones a 50 galones.

6.- 15 días a 36 cuartos de galón.

7.- 12 libras a 36 yardas.

8.- 45 monedas de 10 centavos a 12 monedas de veinticinco centavos.

9.- 18°F a 30°F (F indica grados Fahrenheit)

10.- 3 pies cúbicos a 1 yarda cúbica.

5-3 PROPORCIÓN.

Ya has trabajado lo suficiente con razones, como para comprender algo acerca de ellas. Se adelantará más en su uso y formación cuando empieces a trabajar con *proporciones*. Esto es cierto porque una *proporción* es solamente una proposición en la cual una razón es igual a otra razón. Así, 1/2 = 3/6 ó 1:2 = 3:6 es una *proporción*.

Definición 2.

Si a/b y c/d son razones iguales, entonces a/b = c/d es una ***proporción***; la forma a:b = c:d se usa también frecuentemente.

EJEMPLO 2.

¿Cuáles de las siguientes parejas de razones se pueden usar para formar una proporción verdadera?

a) 2/3 y 3/4 b) 3/4 y 6/8

c) 2/7 y 6/21 d) 3/7 y 5/9

respuesta: (b) y (c).

El alumno debe aprender a identificar una proporción cuando la vea y estar capacitado para encontrar algún valor que haga de la proporción una proposición verdadera. Si falta un término de una proporción, puede encontrarse frecuentemente por inspección. Sin embargo, ya que no todas las proporciones se pueden resolver tan fácilmente, necesitamos aprender algo sobre los métodos de solución.

Un punto importante que se debe recordar, es que una proporción es una ecuación. En consecuencia, todas las reglas de las ecuaciones se pueden usar para encontrar los términos faltantes en las proporciones. También, ya que las razones son fracciones, todas las reglas relacionadas con las fracciones se pueden aplicar. Todo lo quenecesitas aprender, son unos cuantos nombres especiales y algunas propiedades importantes de las proporciones.

En la proporción a:b = c:d (que se lee "a" es a "b" como "c" es a "d"), las letras a, b, c, d, se llaman primer término, segundo término, tercer término y cuarto término, respectivamente. Los términos "a" y "d" se llaman los *extremos* (porque son los más apartados) y "b" y "c" se llaman los ***medios*** (porque son los términos intermedios). En la proporción 5:7 = 10:14, los extremos son ____ y ____ y los medios son ____ y ____.

Una de las propiedades básicas de una proporción, es que el producto de los *extremos* es igual al producto de los *medios*. Esta idea se puede expresar algebraicamente como si gue:

TEOREMA.

Si b y d $\neq$ 0 y si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces a.d = b.c

DEMOSTRACIÓN:

Hipótesis: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$b \neq 0$

$d \neq 0$

Por demostrar: a.d = b.c

Si multiplicamos ambos miembros de la hipótesis por "d" tenemos:

$$\frac{a.d}{b} = c$$

luego, si multiplicamos ambos miembros por "b" queda:

$$a.d = b.c$$

AUTOEVALUACIÓN 2.

Contesta las siguientes preguntas:

1.- En la proporción 2:7 = 3:x, el producto de los extremos es ____ y el producto de los medios es ____.

2.- Si 3:x = 4:7 es una proporción. Entonces, 4x= ____.

3.- Si n:a = c:r, es una proporción. Entonces, ____ = nr

Resuelva las siguientes proporciones para la incógnita.

4.- 2:3 = a:18

5.- 1/2: e = 3: 3/4

6.- (f-3):4 = (f+3):3

Utilizando proporciones resuelva los siguientes proble-- mas:

7.- Si en un mapa, 1 pulgada equivale a 24 millas y una po-- blación aparece en un rectángulo de 2 3/8 de pulgada por 1 3/4 de pulgada. ¿Cuál es el área de la población en millas cuadradas?

8.- ¿Qué longitud representan 14 3/5 pies en un dibujo a es cala, si la escala es 5/8 de pulgada igual a 1 pie?

8-4 VARIABLES INDEPENDIENTES Y DEPENDIENTES.

Con frecuencia se observa en problemas cotidianos que el concepto de función está íntimamente relacionado con la idea de variación; para interpretar tal situación, veamos los si-- guientes ejemplos.

EJEMPLO 3.

Conocida la fórmula del movimiento uniforme,

$$d = vt$$

si consideramos que la velocidad del móvil es de 30 Km por ho ra y ésta se mantiene constante, es fácil calcular las distan cias recorridas en ciertos tiempos.

Si t = 1 hora; d = 30 x 1 = 30 Km.

Si t = 2 horas; d = 30 x 2 = 60 Km.

Si t = 3 horas; d = 30 x 3 = 90 Km.

¿Qué ocurre? Podemos afirmar que la distancia recorrida depende o está en función del tiempo empleado en recorrerlo.

EJEMPLO 4.

Conocida la fórmula para calcular el área del círculo,

$$A = \pi r^2$$

si aceptamos que la constante π es igual a 3.14 resulta sencillo calcular el área de un círculo cuando se conoce su radio.

Si r = 1 cm $A = 3.14 \times (1)^2 = 3.14\ cm^2$

Si r = 2 cm $A = 3.14 \times (2)^2 = 12.56\ cm^2$

Si r = 3 cm $A = 3.14 \times (3)^2 = 28.26\ cm^2$

¿Que ocurre con las areas de los círculos? Podemos afirmar que el área de un círculo depende o está en función de la longitud de su radio.

Definición 3.

Una variable independiente es la que puede sustituirse en una función por cualquier elemento del dominio de la función.

Definición 4.

Una variable dependiente es la que puede sustituirse en una función por cualquier elemento del contradominio de la función.

5-5 PROPORCIONALIDADES DIRECTA E INVERSA.

Consideremos que tenemos los antecedentes necesarios para interpretar las proporcionalidades directa e inversa como funciones.

EJEMPLO 5.

Supongamos que estamos viajando a velocidad constante de 40 Km por hora. Entonces es fácil advertir que existe una correspondencia entre el espacio o distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrer dicha distancia.

a t_1 = 1 hora le corresponde, d_1= 40 Km.

a t_2 = 2 horas le corresponde, d_2= 80 Km.

a t_3 = 3 horas le corresponde, d_3= 120 Km.

a t_x = x horas le corresponde, d_y = y Km.

En tal correspondencia puede observarse que a un tiempo doble le corresponde una distancia doble, a un tiempo triple, le corresponde una distancia triple, y así sucesivamente. Nos podríamos preguntar, ¿esta correspondencia entre los tiempos y las distancias será una función? La respuesta es afirmativa; lo que debe hacerse para una mayor precisión es dar la terna que constituye la función.

Dominio: Conjunto A de todas las medidas del tiempo a emplear.

Contradominio: Conjunto B de todas las distancias por recorrer.

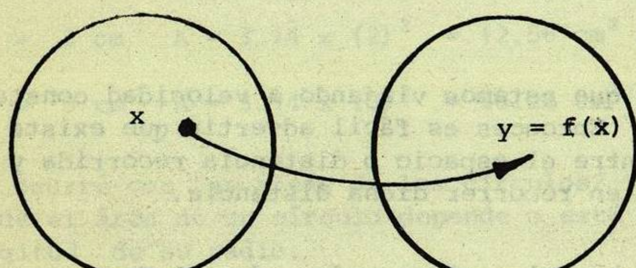


Fig. 1.

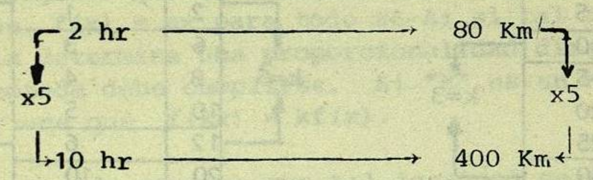
Si empleamos la notación de funciones para este caso, tendremos:

$$f : A \rightarrow B$$

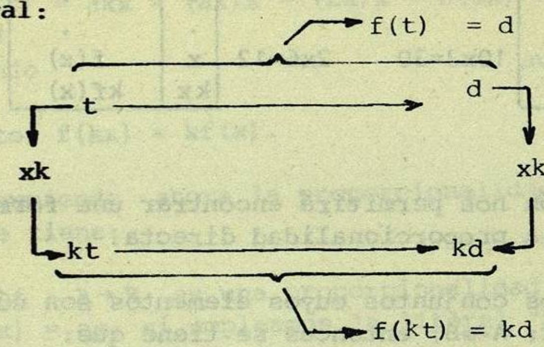
$$f(t) = d$$

elemento del dominio ← → imagen correspondiente

Sabemos también que tal función tiene una propiedad básica; si multiplicamos un tiempo "t" por un número "k", la distancia correspondiente resulta multiplicada por dicho número.



En general:



Al sustituir d = f(t) en la expresión, f(kt) = kd, se tiene:

$$f(kt) = k\ f(t)$$

que es la fórmula fundamental de la proporcionalidad directa.

Definición 5:

Si A y B son dos conjuntos cuyos elementos son números, y se tiene una función de A en B, dicha función es una proporcionalidad directa de A en B si para cada elemento $x \in A$ y cada número "k", tal que $kx \in A$, se cumple la igualdad:

$$f(kx) = kf(x)$$

Podemos interpretar tal definición en dos tabulaciones:

	x	f(x) = y	
	1	5	
	2	10	
	3	15	
k=3	4	20	k=3
	5	25	
	6	30	
	.	.	
	.	.	
	.	.	
2x3=6	x	f(x)	10x3=30
	kx	kf(x)	

	x	f(x) = y	
	2	1	
	6	3	
k=6	8	4	k=6
	10	5	
	12	6	
	20	10	
	.	.	
	.	.	
	.	.	
2x6=12	x	f(x)	1x6=6
	kx	kf(x)	

Esta definición nos permitirá encontrar una forma general para expresar la proporcionalidad directa.

Sean A y B dos conjuntos cuyos elementos son números, con la condición, $f: A \to B$; entonces se tiene que:

1.- Si para toda $x \in A$ se verifica que $f(x) = ax$, siendo "a" una constante, entonces "ax" es la regla de una proporcionalidad directa.

2.- Si $P: a \in B$ es una proporcionalidad directa de A en B, entonces existe una constante "a" llamada constante de proporcionalidad, tal que $f(x) = ax$, para todo elemento del conjunto A. Como $f(x) = ax$,

$$a = \frac{f(x)}{x}$$

pero, $f(x) = y$; entonces:

$$a = \frac{y}{x}$$

Advertimos que no se debe confundir el número k con la constante de proporcionalidad.

Supongamos que la constante "a" existe; entonces se tiene que, $f(x) = ax$ para todo $x \in A$; si tal regla de correspondencia determina una proporcionalidad directa, la definición aceptada debe cumplirse. Si "k" es un número cualquiera, se tiene que $f(kx) = kf(x)$.

En seguida veremos que tal igualdad se verifica:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{igualando}}}{f(kx)} = akx = (ak)x = (ka)x = k(ax) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sustituyendo } f(x)=ax}}{kf(x)}$$

por tanto, $f(kx) = kf(x)$.

Resumiendo ahora la proporcionalidad directa como función, se tiene:

1.- Si $f: A \to B$ es una proporcionalidad directa, entonces $f(x) = ax$; si empleamos la literal "y" para designar $f(x)$, tenemos:

$$y = ax$$

2.- Para toda proporcionalidad directa existe un número "a" llamado constante de proporcionalidad que la determina.

$$f(x) = ax$$
$$a = \frac{f(x)}{x}$$
$$= y/x$$