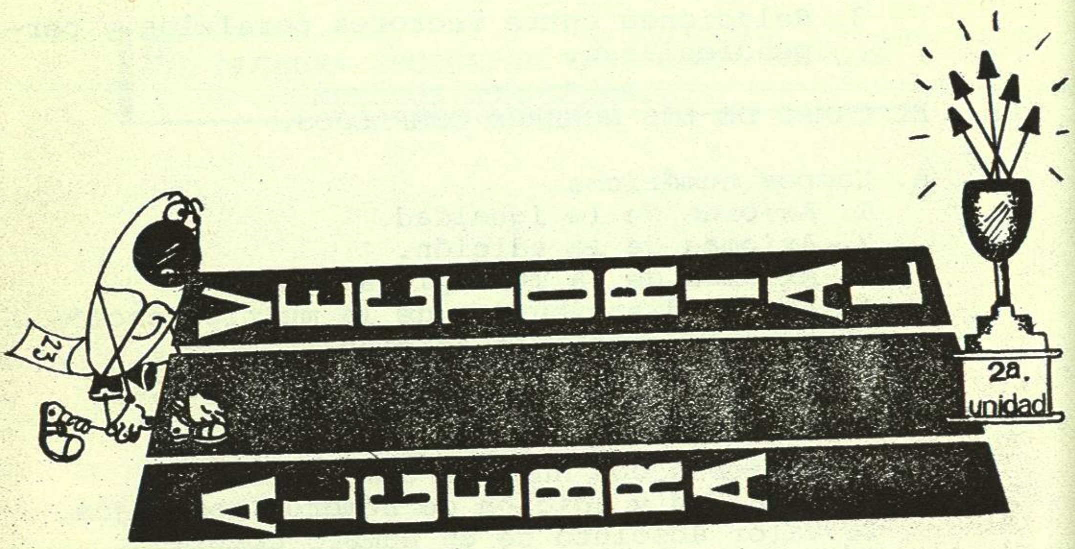
D. Solución de ecuaciones sobre el campo de los números complejos C.

Resumen.

Glosario.

Referencias Bibliográficas.

Anexos.



EL ALGEBRA VECTORIAL Y EL CAMPO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS.

Introducción.

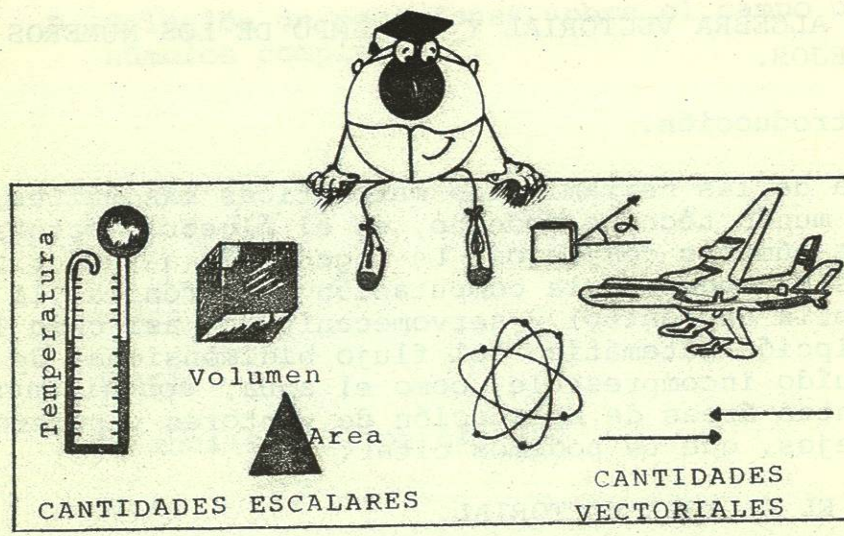
Una de las herramientas matemáticas más útiles, en el mundo técnico moderno, es el álgebra vectorial y los números complejos. La ingeniería aeronáutica, la física moderna, la computación electrónica, la ingeniería de control y servomecanismos, así como la descripción matemática del flujo bidimensional de un fluído incompresible, como el agua, son algunas de tantas áreas de aplicación de vectores y números complejos, que te podemos citar.

I. EL ALGEBRA VECTORIAL.

Existen cantidades físicas que pueden representarse por un simple número real sobre una escala lineal o recta numérica; algunos ejemplos de esas cantidades son: la temperatura y la masa de un cuerpo, la longitud de una cuerda, el área de una superficie regular y el volúmen de un cubo. A este tipo de cantidades se les llama cantidades escalares. Existen otro tipo de conceptos físicos que necesitan dos o más números reales o componentes para ser expresados; algunos ejemplos de esas cantidades son: el desplazamiento de un cuerpo, la fuerza necesaria para desplazar dicho cuerpo, la velocidad de un avión, la aceleración de un electrón o cualquier otra partícula. A este tipo de cantidades se les llama cantidades vectoriales.

La rama de la matemática que se requiere para estudiar estas cantidades es el álgebra vectorial.

En esta unidad estudiarás las bases de esta rama, principiando con la consideración de algunas propiedades de las parejas ordenadas de números reales.

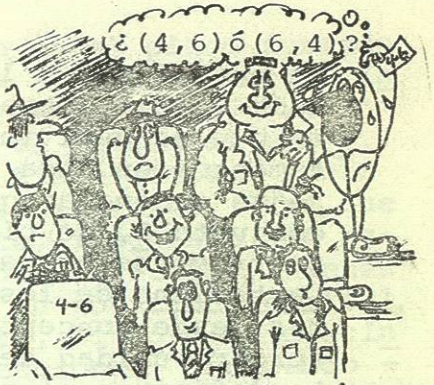


A. Parejas de números y su uso.

1. Parejas ordenadas y puntos.

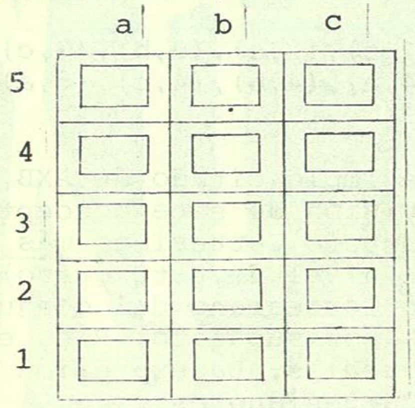
En la tercera unidad del primer semestre, ya estudiaste que cualquier número real se puede asociar con un punto sobre la recta numérica. Generalmente, es muy práctico y útil usar números para localizar un punto en un plano. Por ejemplo, cuando un barco está a punto de zozobrar, (o en peligro de naufragar) su capitán puede pedir auxilio a la estación guardacosta más cercana, enviando por radio transmisor la posición del barco, para lo cual utiliza una <u>pareja de números</u>: uno de ellos sirve para indicar la latitud a la que se encuentra el barco y el otro número indica la longitud.

Similarmente, en una sala de cine o teatro, se puede localizar cualquier asiento indicando en el boleto, primero, el número de la fila y, después, el número de la butaca. En cada uno de los ejemplos citados, el <u>orden</u> respectivo en que se indican los números es de mucha importancia. Por ejemplo, si la pareja de números (4,6) indica --



"la cuarta fila y la sexta butaca", entonces la pareja numérica (6,4) indica "la sexta fila y la cuarta butaca". Observa que, a pesar de que utilizamos los mismos números, 4 y 6, en los dos boletos, los asientos son completamente diferentes, debido al orden invertido en que están indicados; razón obvia por la que los pares de números, como (4,6) y (6,4) reciben el nombre de <u>parejas ordenadas</u>.

Usualmente, los hospitales y edificios comerciales o multifamiliares cuyas construcciones son de varios pisos o plantas, utilizan en sus planos un sistema similar de identificación y localización de oficinas o departamentos, según sea el caso. Veamos, por ejemplo, un edificio multifamiliar de cinco pisos con tres departamentos en cada piso, como lo muestra la figura.



Una forma simple y práctica para localizar cada departamento es: mencionar primero el número del piso en que se encuentra el departamento y, segundo, mencionar la letra que identifica dicho departamento; para ello se puede utilizar una pareja ordenada de caracteres tales como (1,b), para localizar en el <u>primer</u> piso el departamento <u>b</u>, o la pareja ordenada (5,c) para localizar en el <u>quinto</u> piso el departamento <u>c</u>. En cada pareja ordenada, la primera coordenada es un número perteneciente al conjunto:

$$A= \{1,2,3,4,5\}$$

el cual incluye los cinco pisos; la segunda coordenada es una letra perteneciente al conjunto $B=\{a, b, c\}$, el cual incluye los tres tipos de los departamentos en cada piso. El conjunto de <u>todas</u> la parejas ordenadas que resultan de la relación del conjunto <u>A</u>, de pisos, con el conjunto B, de los departamentos en cada piso, se llama: el <u>producto Cartesiano</u> de los conjuntos A y B. Como recordarás, este concepto ya lo habías estudiado en la tercera unidad del segundo semestre. En general, te definimos el producto Cartesiano en notación constructiva como:

$$AXB = \{(x,y)/\underline{x}\varepsilon A \ \ y \ \ \underline{y}\varepsilon B\}$$, esto se lee así:

"A cruz B es igual al conjunto de parejas ordenadas (x,y), tal que, <u>x</u> sea elemento de A y <u>y</u> sea elemento de B".

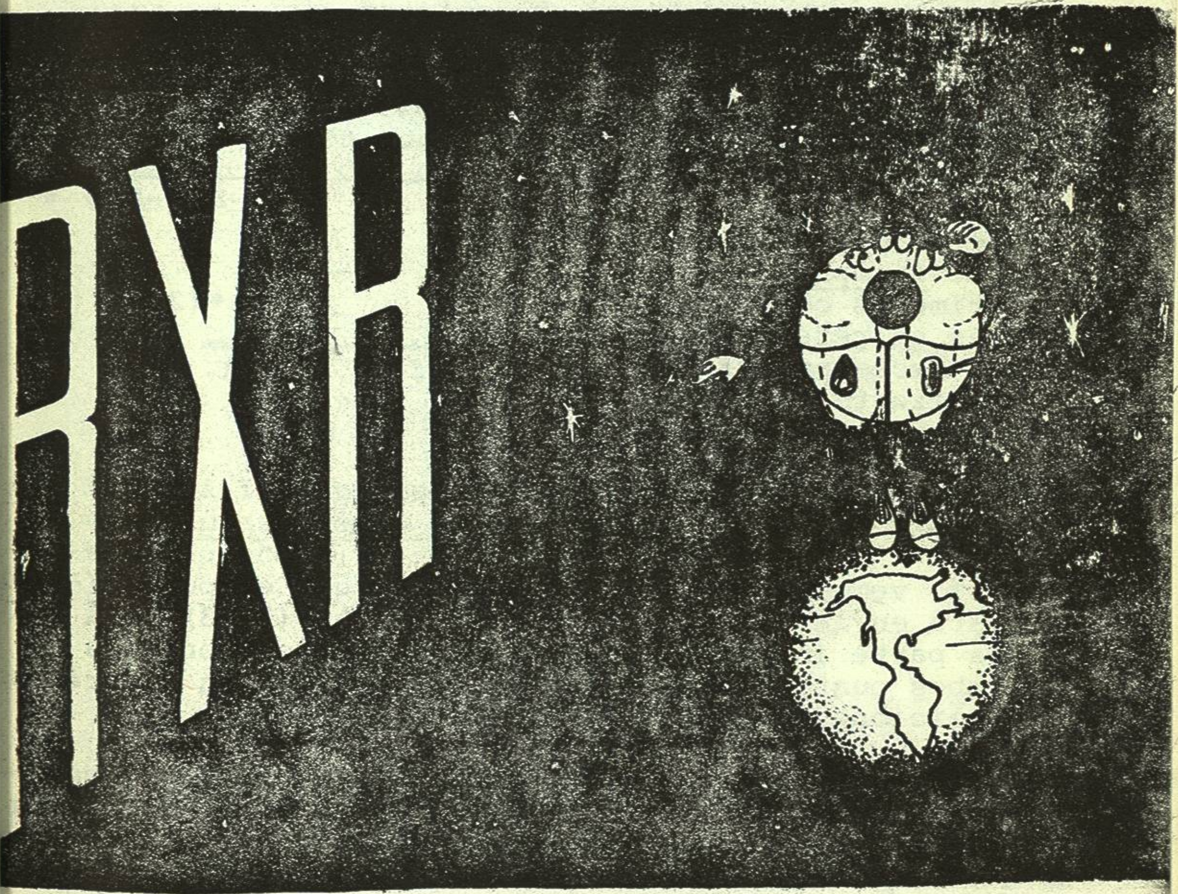
Refiriéndonos al ejemplo citado del edificio de los cinco pisos, el conjunto de todos los departamentos, es decir el producto Cartesiano de A y B es:

$$AXB = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,c),(4,a),(4,b),(4,c),(5,a),(5,b),(5,c)\}$$

Después de ver este ejemplo citado de AXB, te será fácil ampliar la visión de este concepto con la definición del <u>producto Cartesiano más importante</u> que existe, (al nivel de este curso). Nos referimos al producto Cartesiano del conjunto R consigo mismo, donde, por supuesto, R es el conjunto de los números reales. La expresión simbólica de este producto Cartesiano es:

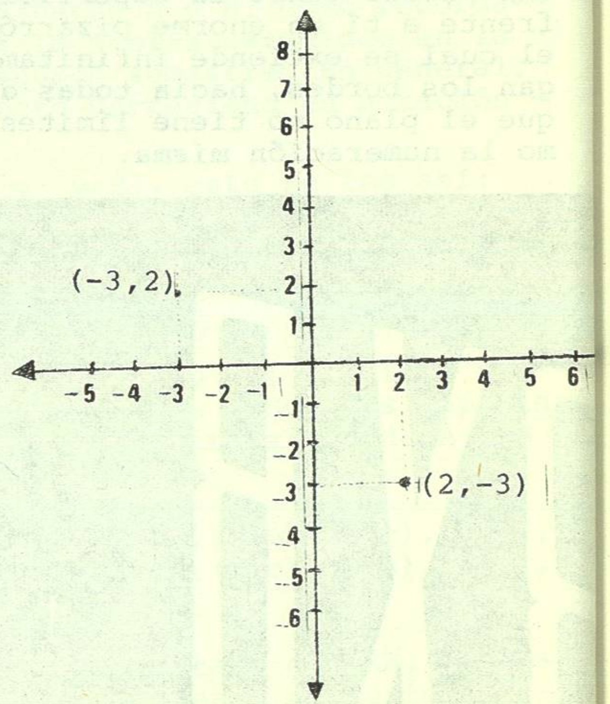
$RXR = \{(x,y)/x\varepsilon R \ \ y \ \ y\varepsilon R\}$. Como podrás imaginarte, RXR representa el conjunto de <u>todas</u> las parejas ordenadas (o puntos) que existen en el plano Cartesiano, también llamado <u>Sistema Coordenado Cartesiano.</u>

Este sistema coordenado consiste en el plano formado por los puntos generados por dos rectas numéricas infinitas, colocadas perpendicularmente entre sí, y coincidiendo la intersección en el origen de ambas. Esto representa un plano que no tiene límites hacia ninguna dirección, extendido infinitamente. Para que te des una idea de dicho concepto, imagínate que estás parado sobre la superficie de la tierra y tienes frente a tí un enorme pizarrón, en posición vertical, el cual se extiende infinitamente, sin que se distingan los bordes, hacia todas direcciones, indicando que el plano no tiene límites, y que es infinito, como la numeración misma.



Las ventajas del sistema coordenado Cartesiano sobre cualquier plano, son que cualquier punto, (o conjunto de puntos) en él, son fácilmente localizables mediante el sistema antes expuesto.

Como recordarás, en la tercera unidad del segundo semestre, ya te habíamos definido el concepto de gráficas sobre el plano Cartesiano, pero nunca está de más recordarlo, y más aún, cuando sobre ello van a descansar los conocimientos de esta unidad.



Para evitar confusiones, sobre las componentes de la pareja ordenada, se ha establecido que <u>siempre</u> las primeras componentes se referirán a la recta numérica horizontal y los segundos términos, a su vez, a la recta numérica vertical.

Así, vemos en la gráfica anterior que el punto (-3,2) está en la parte superior y el punto (2,-3) está en la parte inferior de la gráfica; las componentes de ambos puntos son las mismas, pero el orden altera s posiciones en forma total.

A la primera componente de la pareja ordenada, como ya lo habíamos definido, se le llama <u>abscisa</u>, y a l segunda se le denomina <u>ordenada</u>.

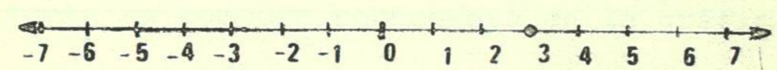
<u>Graficar</u> es el proceso de representar las parejas ordenadas en el plano Cartesiano mediante puntos o líneas, etc.

2. Desplazamientos y Flechas.

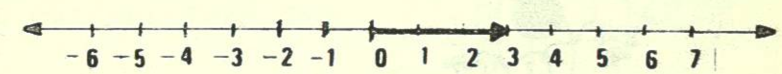
Estamos muy familiarizados con el hecho de asociar un número real (o escalar) con un punto en la recta numérica, o asociar una pareja ordenada de números reales con un punto en el plano Cartesiano.

Pero existe otra interpretación para este tipo de cantidades, que ha sido de mucha utilidad matemática para una gran cantidad de problemas, la cual se basa en el concepto de translación o desplazamiento.

Digamos, el número 3, nosotros lo asociamos en la recta numérica con el punto situado a tres unidades a la derecha del cero. Al punto 0 le llamaremos también origen.

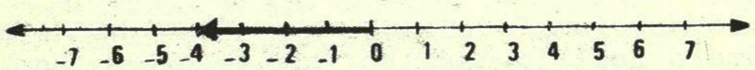


La otra interpretación que se le puede dar, es la de un <u>desplazamiento o translación</u> desde el origen hasta el punto 3,

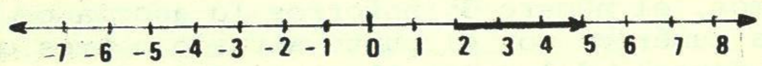


que se representa, como se observa en la gráfica, con una flecha que parte del origen (punto 0) y llega al punto 3.

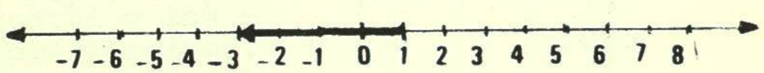
El número -4 se representará como un desplazamiento desde el origen hasta el punto indicando el número -4.

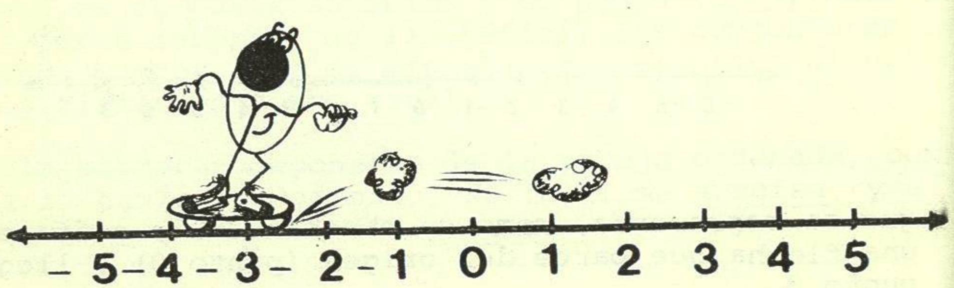


Ahora; un desplazamiento que vaya del punto 2 al punto 5 se puede representar así:

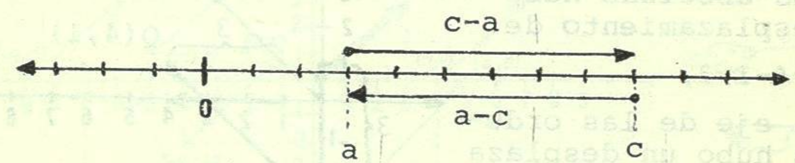


Una translación o desplazamiento desde el punto +1 hasta el punto -3 se verá así:





En general, el número real c-a representa una translación o desplazamiento desde el punto a hasta el punto c. Inversamente al número a-c se le asocia una translación desde c hasta a, sobre la recta numérica.

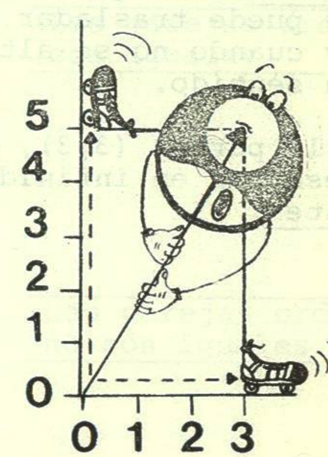


Este tipo de desplazamientos, sobre la recta numérica, nos sugiere que también las parejas ordenadas, sobre el plano Cartesiano, se pueden asociar con translaciones. Estas últimas se producirán cuando existan desplazamientos simultáneos en ambos ejes coordenados.

Supongamos que en el eje de las abscisas hay un desplazamiento de 3 unidades, cuando en el eje de las ordenadas hay uno de 5 unidades; el desplazamiento resultante es como se representa en la gráfica.

En este caso la flecha que representa el desplazamiento nació en el origen, y terminó en el punto (3,5).

No siempre los desplazamientos o translaciones principian en el origen; a veces puede existir una flecha entre dos puntos cualesquiera del plano.



Ejemplo 1. Encontrar el desplazamiento que va desde el punto P(1,-2) hasta el punto Q(4,1).

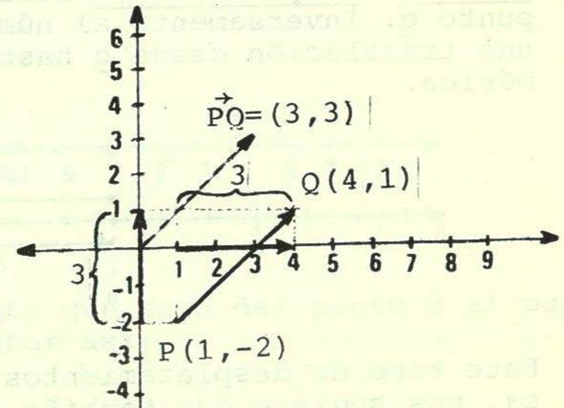
Solución: Por el lado de las abscisas hubo un desplazamiento desde 1 hasta 4; y por el de las ordenadas desde -2 hasta 1.

En una gráfica ésto se vería así: en el eje de las abscisas hubo un desplazamiento de:

c-a=4-1=3;

en el eje de las ordenadas hubo un desplazamiento de:

c-a=1-(-2)=3.

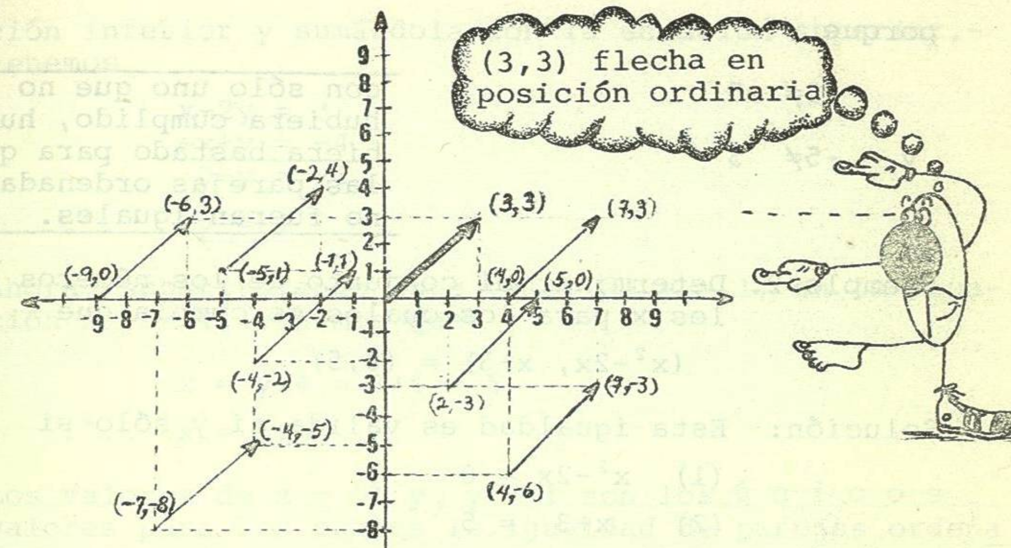


Si en el eje x (o de las abscisas) hay un desplazamiento de 3 unidades, y en el eje y (o eje de las ordenadas) hay un desplazamiento también de 3 unidades, entonces la pareja ordenada que representa el desplazamiento resultante es (3,3).

La pareja (3,3) representa al desplazamiento $\overrightarrow{PQ}$ desde P(1,-2) hasta Q(4,1).

Cuando el punto inicial de una flecha coincide con el origen (0,0), se dice que ella está en posición ordinaria. Cualquier flecha sobre el plano Cartesiano se puede trasladar a la posición ordinaria siempre y cuando no se altere su dirección, ni su tamaño, ni su sentido.

Así, la pareja (3,3), del ejemplo anterior, se puede representar en infinidad de formas, todas ellas equivalentes.



Dos parejas ordenadas son iguales si y sólo si la abscisa de una es igual a la abscisa de la otra pareja y la ordenada de una es igual a la ordenada de la otra. Esto se puede expresar formalmente así:

Dos parejas ordenadas en RxR (el plano Cartesiano), (x,y) y (a,b), son iguales si y sólo si $x=a$ y $y=b$

Así, (2+5, 4x3) = (7,12) — Las parejas ordenadas son iguales

porque

2+5 = 7

y 4x3 = 12

por otro lado

(3,-5) ≠ (-5,3) — Las parejas ordenadas no son iguales porque

$3 \neq -5$

y $-5 \neq 3$

con sólo uno que no se hubiera cumplido, hubiera bastado para que las parejas ordenadas no fueran iguales.

Ejemplo 2. Determinar el conjunto de los números reales x para los cuales se cumpla que

$$(x^2-2x,\ x+3) = (0,5)$$

Solución: Esta igualdad es válida si y sólo si

(1) $x^2-2x = 0$ y

(2) $x+3 = 5$

De la ecuación (1), factorizando la x, obtenemos

$$x(x-2) = 0$$

de lo cual $\underline{x = 0 \text{ ó } x = 2}$

De la ecuación (2), despejando la x, tenemos que

$$x = 5-3$$

$$\underline{x = 2}$$

Para que se satisfaga la igualdad de parejas, ambas ecuaciones deben satisfacerse; para que eso suceda la variable debe tomar el valor de x = 2, solamente.

Ejemplo 3. Encontrar los valores de x y y para los cuales se cumple que $(x-2y,\ x-y) = (3,4)$.

Solución: $(x-2y,\ x-y) = (3,4)$ se cumplirá si y sólo si $x-2y = 3$ ⟶ abscisas iguales
$x-y = 4$ ⟶ ordenadas iguales

Este es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Lo resolveremos en éste caso, por el método de suma o resta. Multiplicando por (-1) a la ecuación inferior y sumándola con la ecuación superior, tenemos

$$\begin{array}{r} x-2y = 3 \\ \underline{-x+y = -4} \\ 0-y = -1 \end{array}$$

$\therefore \quad \underline{y = 1}$

Ahora, substituyendo este valor de y = 1, en la ecuación x-y = 4, tenemos que:

$$x = y+4 = 1+4 = 5$$

$\therefore \quad x = 5.$

Los valores de x = 5 y y = 1 son los únicos valores para los cuales la igualdad de parejas ordenadas se cumple.

EJERCICIO I-A-2

1 Encuentra el desplazamiento o translación de los siguientes números reales.

a) de 0 a 5
b) de 0 a -3
c) de -3 a 0
d) de -4 a 1
e) de 1 a -4
f) de 10 a 11
g) de 7 a 1
h) de $\frac{1}{2}$ a $\frac{7}{2}$
i) de $\frac{7}{2}$ a $\frac{3}{2}$
j) de 8 a -8

2 Nombra la pareja ordenada representada por $\overrightarrow{RS}$ (es decir, el desplazamiento del punto R al punto S) dadas R y S, respectivamente.

a) R(0,0), S(1,2)
b) R(0,0), S(-3,2)
c) R(4,-5), S(0,0)
d) R(-3,-2), S(1,1)
e) R(1,0), S(0,1)
f) R(8,-5), S(5,-8)
g) R(0,-3), S(0,4)
h) R(0,4), S(0,-3)
i) R(4,5), S(4,5)
j) R(-3,2), S(3,-2)

3 Encuentra los valores de x y y para los cuales se satisfaga la igualdad propuesta.

a) $(x^2-4x,\ x-4) = (0,0)$
b) $(x+y,\ x-y) = (6,2)$
c) $(2x+3, 8) = (11,\ 3y-1)$
d) $(5x,\ 3x+4) = (10, -3)$
e) $(y+4,\ y+x) = (x+4, 8)$

B. El álgebra de parejas numéricas.

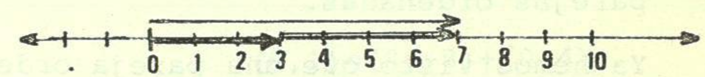
1. La adición vectorial.

Con la nueva interpretación de los números reales y de las parejas ordenadas, podemos ahora establecer reglas sobre sus desplazamientos en el plano Cartesiano o en la recta numérica.

Tomemos un ejemplo de desplazamiento doble (es decir un desplazamiento seguido de otro desplazamiento).

Ejemplo 1. Graficar en la recta numérica un desplazamiento de 3 unidades, seguido de otro desplazamiento de 4 unidades.

Solución: Graficamos primero el desplazamiento de 3 unidades y luego, a partir del punto asociado al 3, graficamos el desplazamiento de 4 unidades.



Como podemos verificar en la gráfica, el desplazamiento doble equivale a efectuar un desplazamiento simple de 7 unidades; cantidad que concuerda con la suma de 3+4.