EJERCICIO I-A-2

1 Encuentra el desplazamiento o translación de los siguientes números reales.

a) de 0 a 5

b) de 0 a -3

c) de -3 a 0

d) de -4 a 1

e) de 1 a -4

f) de 10 a 11

g) de 7 a 1

h) de $\frac{1}{2}$ a $\frac{7}{2}$

i) de $\frac{7}{2}$ a $\frac{3}{2}$

j) de 8 a -8

2 Nombra la pareja ordenada representada por $\overrightarrow{RS}$ (es decir, el desplazamiento del punto R al punto S) dadas R y S, respectivamente.

a) R(0,0), S(1,2)

b) R(0,0), S(-3,2)

c) R(4,-5), S(0,0)

d) R(-3,-2), S(1,1)

e) R(1,0), S(0,1)

f) R(8,-5), S(5,-8)

g) R(0,-3), S(0,4)

h) R(0,4), S(0,-3)

i) R(4,5), S(4,5)

j) R(-3,2), S(3,-2)

3 Encuentra los valores de $\underline{x}$ y $\underline{y}$ para los cuales se satisfaga la igualdad propuesta.

a) $(x^2-4x,\ x-4) = (0,0)$

b) $(x+y,\ x-y) = (6,2)$

c) $(2x+3,8) = (11,\ 3y-1)$

d) $(5x,\ 3x+4) = (10,\ -3)$

e) $(y+4,\ y+x) = (x+4,\ 8)$

B. El álgebra de parejas numéricas.

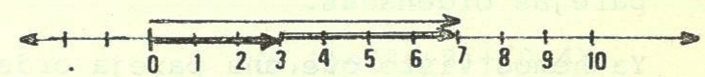
1. La adición vectorial.

Con la nueva interpretación de los números reales y de las parejas ordenadas, podemos ahora establecer reglas sobre sus desplazamientos en el plano Cartesiano o en la recta numérica.

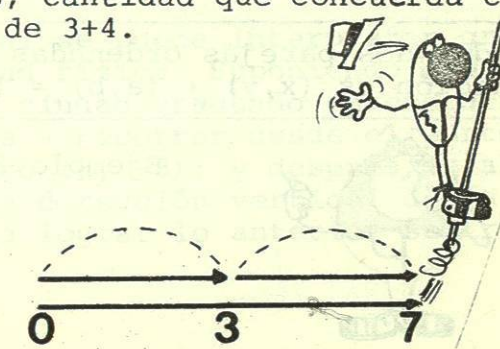
Tomemos un ejemplo de desplazamiento doble (es decir un desplazamiento seguido de otro desplazamiento).

Ejemplo 1. Graficar en la recta numérica un desplazamiento de 3 unidades, seguido de otro desplazamiento de 4 unidades.

Solución: Graficamos primero el desplazamiento de 3 unidades y luego, a partir del punto asociado al 3, graficamos el desplazamiento de 4 unidades.

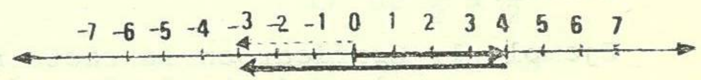


Como podemos verificar en la gráfica, el desplazamiento doble equivale a efectuar un desplazamiento simple de 7 unidades; cantidad que concuerda con la suma de 3+4.



Ejemplo 2. Graficar en la recta numérica 4+(-7)

Solución: En la misma forma podemos interpretar 4+(-7) como un desplazamiento de 4 unidades positivas (a la derecha) seguido de otro desplazamiento negativo de 7 unidades (hacia la izquierda).



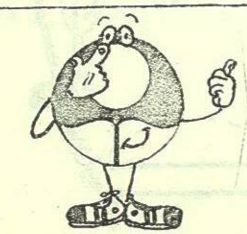
El desplazamiento total es de -3, que concuerda con la suma algebraica de los números 4+(-7).

Esta adición de desplazamientos en la recta numérica, por medio de flechas, se puede extender a las parejas ordenadas.

Ya hemos visto que una pareja ordenada de números se representa por una flecha en posición ordinaria.

La adición de parejas ordenadas, la podemos definir como la suma de las componentes respectivas de cada pareja; es decir:

Dadas dos parejas ordenadas (x,y) y (a,b), su adición es (x,y) + (a,b) = (x+a, y+b)



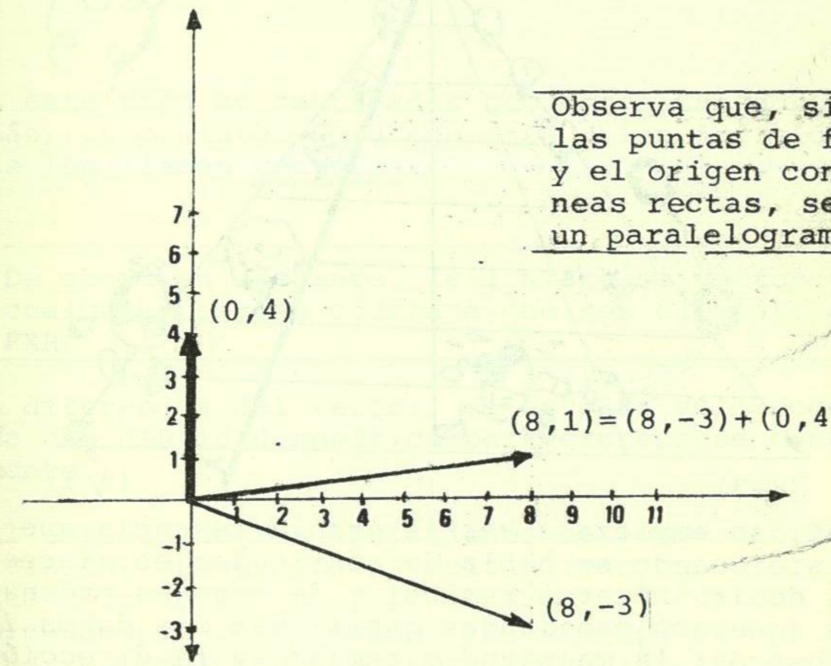
Ejemplo 3. Encontrar la suma de las siguientes parejas ordenadas: (8, -3) y (0,4).

Solución: Por la definición de adición, tenemos que:

$$(8, -3)+(0, 4) = (8+0, \ ^{-}3+4)$$
$$= (8, 1)$$

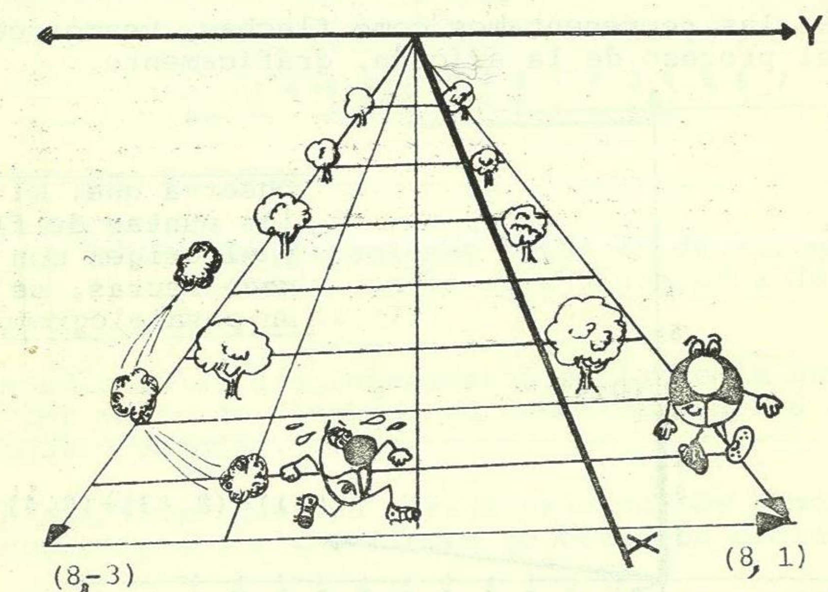
Observa que obtuvimos otra pareja ordenada resultante de la suma de las dos parejas originales.

Si las representamos como flechas, veamos como es el proceso de la adición, gráficamente.



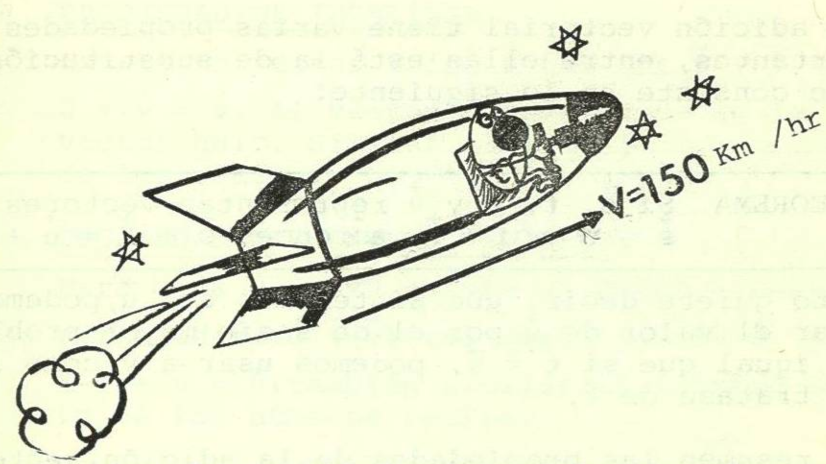
Observa que, si unes las puntas de flecha y el origen con líneas rectas, se forma un paralelogramo.

La adición vectorial se puede interpretar gráficamente en la realidad física. Suponiendo que tenemos el plano de la ciudad graduado en coordenadas y decimos que vamos a recorrer desde el punto (0,0) hasta el punto (8, -3); y después, de ahí mismo moverse en la dirección vertical de la flecha de (0, 4). Para lograr lo anterior se transla da la flecha (0, 4) desde su posición ordinaria hasta que su punto inicial coincida con el punto (8, -3). Así, se observa que el recorrido es equivalente a que hubiéramos caminado, sin escalas, desde (0, 0) hasta (8, 1), aunque el camino, haciendo escalas, sea más largo que el camino directo. Las trayectorias son desplazamientos que se comportan como si fueran flechas (es decir, cantidades con magnitud y dirección).



Aquí, se empieza a ver la gran diferencia que existe cuando se habla de cantidades escalares (es decir, números reales) y de parejas ordenadas (que son cantidades que llevan dos datos intrínsecos: la magnitud o tamaño y la dirección hacia donde se aplicó dicha magnitud).

Podemos hablar, por ejemplo, de recorrer 20 Kms al noroeste, de empujar con una fuerza de 50 Kg a un bloque con un ángulo de 30° con respecto a la horizontal, de moverse a 150 Km/hr hacia arriba en un cohete, de caer verticalmente con una aceleración de 9.8 m/seg^2 etc.



A este tipo de cantidades que necesitan dos (o más) componentes para que estén bien definidas, se les llaman <u>vectores</u>.

De ahora en adelante, le llamaremos vector a cualquier pareja ordenada que sea elemento de RXR.*

A diferencia del vector, el escalar sólo necesita de una cantidad numérica para expresarse completamente.

Al estudio de las operaciones de los vectores: adición, substracción, multiplicación, etc.; y las relaciones que guardan entre sí con sus propiedades, se le denomina álgebra aplicada a vectores o simplemente, álgebra vectorial.

La operación que estudiamos anteriormente es la <u>adición vectorial</u>, la cual consiste en el proceso de tomar dos elementos de RXR (vectores) y asignarles un vector resultante de la adición de ambos. A ese nuevo elemento de RXR se le denomina <u>vector suma</u>.

*Nota: Esta definición queda a nivel de sinónimo, en esta unidad

La adición vectorial tiene varias propiedades importantes, entre ellas está la de substitución -- que consiste en lo siguiente:

TEOREMA. Si $\vec{s}$, $\vec{t}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ representan vectores y $\vec{s} = \vec{u}$ y $\vec{t} = \vec{v}$, entonces $\vec{s} + \vec{t} = \vec{u} + \vec{v}$

Esto quiere decir, que si tenemos $\vec{s} = \vec{u}$, podemos -usar el valor de $\vec{u}$ por el de $\vec{s}$ sin mayor problema; al igual que si $\vec{t} = \vec{v}$, podemos usar a $\vec{v}$ como si -se tratase de $\vec{t}$.

En resumen, las propiedades de la adición vecto- -rial son las siguientes:

Sean $\vec{s}$, $\vec{t}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ elementos cualesquiera de RXR.

1). <u>PROPIEDAD DE CERRADURA.</u>

$\vec{s} + \vec{t}$ pertenece a RXR,
es decir, la suma de dos vectores es igual a otro vector , no a un escalar.

2). <u>PROPIEDAD DE SUBSTITUCION.</u>

Si $\vec{s} = \vec{u}$ y $\vec{t} = \vec{v}$, entonces $\vec{s} + \vec{t} = \vec{u} + \vec{v}$,
(esto ya lo estudiamos anteriormente).

3). <u>PROPIEDAD CONMUTATIVA.</u>

$\vec{s} + \vec{t} = \vec{t} + \vec{s}$

Esta propiedad es análoga a la conmutatividad de dos números reales.

4). <u>PROPIEDAD ASOCIATIVA.</u>

$(\vec{s} + \vec{t}) + \vec{u} = \vec{s} + (\vec{t} + \vec{u})$

También es como la asociatividad de números -- reales.

5). <u>PROPIEDAD DE IDENTIDAD.</u>

Existe un vector único $\vec{0}$ tal que $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ y $\vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$. Al vector $\vec{0}$ comunmente se le llama vector nulo. Similar al idéntico en la adición de los reales.

6). <u>PROPIEDAD DEL INVERSO ADITIVO.</u>

Para cada $\vec{v} \in$ RXR existe un único elemento inverso aditivo $(-\vec{v})$ tal que $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ y $(-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}$, también similar al inverso aditivo de los números reales.

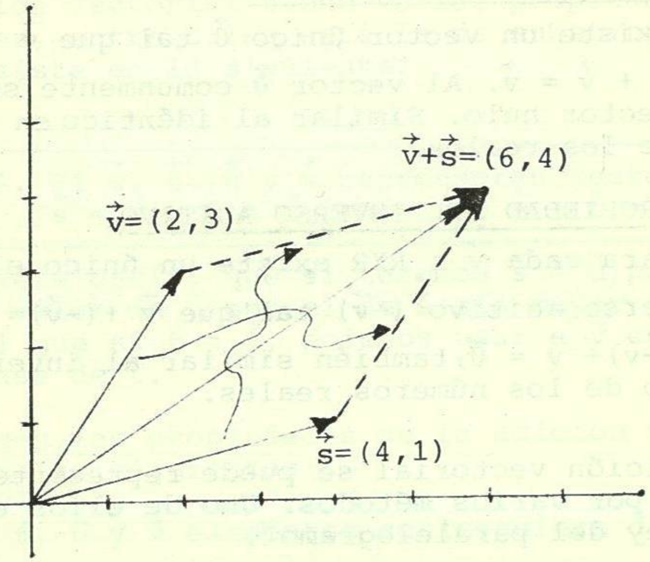
La adición vectorial se puede representar gráficamente por varios métodos. Uno de ellos es el de la "ley del paralelogramo".

Ejemplo 4. Efectuar gráficamente la adición de -- los vectores $\vec{s} = (4,1)$ y $\vec{v} = (2,3)$, por - el método del paralelogramo.

Solución: Se grafican primero los vectores sumandos. Después, aprovechando la propiedad de las flechas, transladamos el -- vector $\vec{v}$, sin alterar su magnitud, dirección, ni sentido, hasta que su punto inicial coincida con la punta de -- flecha del vector $\vec{s}$.
El vector que parte del punto inicial del vector $\vec{s}$ al punto terminal del vector $\vec{v}$, ya transladado, es el "vector - suma" resultante de la adición vecto-- rial de $\vec{v}$ y $\vec{s}$,

$$(2,3) + (4,1) = (6,4)$$

<u>vector suma</u>



También se puede efectuar el proceso en forma in-- versa, sin alterar el resultado, es decir, en vez de transladar el vector $\vec{v}$, ahora se hace lo mismo con el vector $\vec{s}$. Se translada sin alterar su magnitud, ni dirección, ni sentido, hasta colocarlo de tal manera, que su punto inicial coincida con la - punta de flecha del vector $\vec{v}$. El vector que parte desde el punto inicial de $\vec{v}$ hasta la punta de flecha de $\vec{s}$, es el "vector suma" de $\vec{v}$ y $\vec{s}$, el cual - es idéntico al "vector suma" primeramente encontrado: $(4,1) + (2,3) = (6,4)$.

Lo anterior ilustra la propiedad conmutativa de la adición vectorial, no sólo algebraicamente sino -- también con la gráfica.

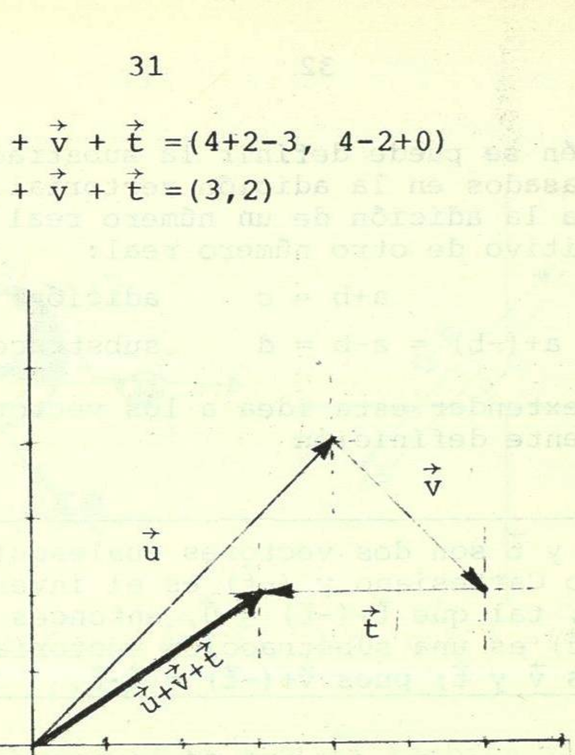
Ejemplo 5. Graficar la adición de los siguientes - vectores: $\vec{u} = (4,4)$, $\vec{v} = (2,-2)$, $\vec{t} = (-3,0)$ por medio del método del polígono.

Solución: La adición de estos vectores es

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{t} = (4,4) + (2,-2) + (-3,0)$$

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{t} = (4+2-3,\ 4-2+0)$$

$$\therefore\ \vec{u} + \vec{v} + \vec{t} = (3,2)$$



Gráficamente se observa de la siguiente forma: se coloca el vector $\vec{u}$ en posición ordinaria. Seguidamente, en lugar de poner a $\vec{v}$ en posición ordinaria, se trasladan los ejes coordenados al punto terminal del vector $\vec{v}$ y ahí se le coloca, (en posición ordinaria con respecto a los ejes transladados), - luego, de igual manera, se vuelven a correr los - - ejes hasta el extremo de $\vec{v}$; y de ahí se hace partir al vector $\vec{t}$.

El vector suma es la flecha que parte desde el origen y llega hasta donde está la punta de flecha de $\vec{t}$.

Este método del polígono, como se ve en la gráfica, se puede aplicar con muchos más vectores, formando, como su nombre lo indica, un polígono cerrado.

También se puede definir la substracción de vectores, basados en la adición vectorial, en forma análoga a la adición de un número real con el inverso aditivo de otro número real:

$$a+b = c \qquad \text{adición;}$$

$$a+(-b) = a-b = d \qquad \text{substracción}$$

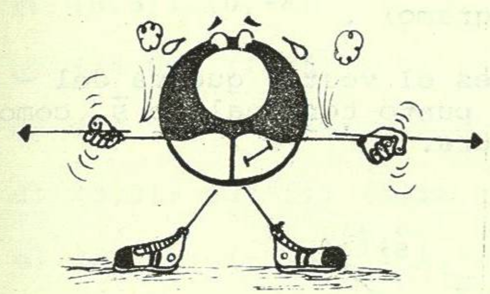
Para extender esta idea a los vectores, tomamos la siguiente definición:

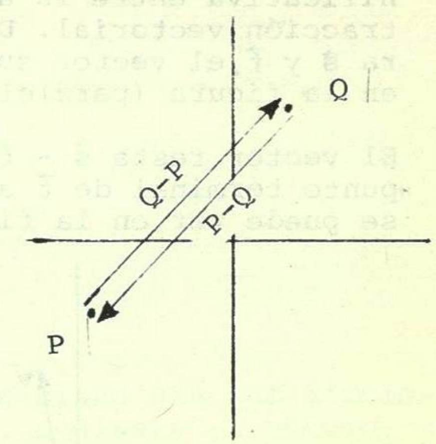
Si $\vec{v}$ y $\vec{t}$ son dos vectores cualesquiera sobre el plano Cartesiano y $(-\vec{t})$ es el inverso aditivo de $\vec{t}$, tal que $\vec{t}+(-\vec{t}) = \vec{0}$, entonces la operación $\vec{v}+(-\vec{t})$ es una substracción vectorial de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{t}$; pues $\vec{v}+(-\vec{t}) = \vec{v}-\vec{t}$

Esa es la operación de substracción vectorial; el resultado de dicha operación es el "vector resta".

Existe un detalle muy significativo de la substracción que será muy útil para la siguiente unidad de estudio. Si tenemos dos puntos P y Q sobre el plano Cartesiano y aplicamos la substracción, P - Q, sobre ellos, (recordemos que el concepto de vector se origina en los desplazamientos de puntos en el plano Cartesiano) el resultado de dicha substracción da un vector que parte del punto Q y termina en el punto P.

Entonces, P - Q y Q - P son dos vectores paralelos pero con sentidos contrarios, tal como se muestra en la gráfica.





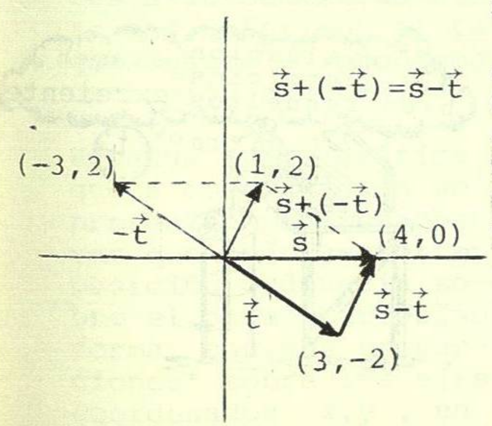
Ejemplo 6. Graficar $\vec{s}+(-\vec{t})$, dado que $\vec{s} = (4,0)$, $\vec{t} = (3,-2)$.

Solución: La expresión $\vec{s} + (-\vec{t})$ también se puede escribir en forma más simple como $\vec{s} - \vec{t}$.

Ahora, los datos cambiarán un poco, para facilitar la operación:

$$\vec{s} = (4,0)$$

$$-\vec{t} = -(3,-2) = (-3,2)$$



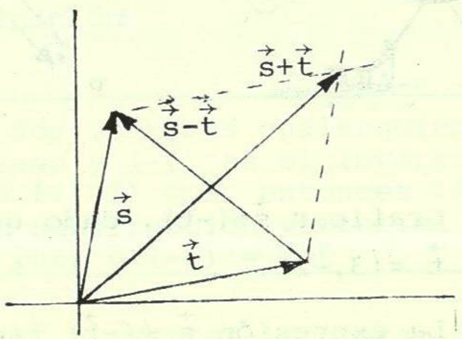
Entonces,

$$(4,0) + (-3,2) = (1,2)$$

es el vector resta de $\vec{s}$ y $\vec{t}$. Gráficamente se muestra que al vector $\vec{t}$ lo cambiamos por su inverso aditivo $(-\vec{t})$ y lo sumamos vectorialmente al vector $\vec{s}$.

Como se puede observar, existe una diferencia significativa entre la adición vectorial y la substracción vectorial. Dados dos vectores cualesquiera $\vec{s}$ y $\vec{t}$, el vector suma es $\vec{s} + \vec{t}$ como se muestra en la figura (paralelogramo) .

El vector resta $\vec{s} - \vec{t}$ es el vector que va del punto terminal de $\vec{t}$ al punto terminal de $\vec{s}$, como se puede ver en la figura.



En sí, la substracción de vectores $\vec{s}$ y $\vec{t}$ es la suma de un vector $\vec{s}$ con el inverso aditivo de $\vec{t}$ (o sea $-\vec{t}$).

EJERCICIO I-B-1

1. Grafica en la recta numérica la adición de los siguientes números, mediante desplazamientos.

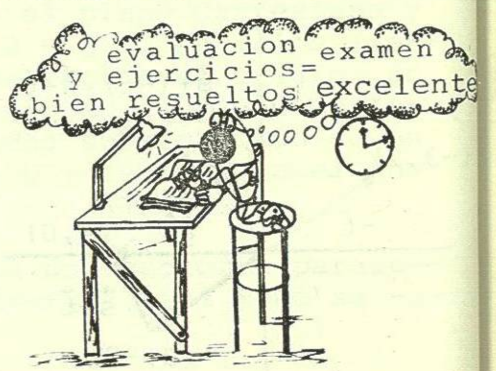
a) 0; (+3)

b) (+4); (+5)

c) (-3); (-4); (+1)

d) (-4); (-5)

e) (-3); (+3)



2 Efectúa la adición de las siguientes parejas ordenadas.

a) (0,3); (0,-8)

b) (-4,0); (1,-5)

c) (-3,2); (-8,-5)

d) (3,0); (0,-5); (1,1)

e) (3,-7); (-2,6); (-1,-2)

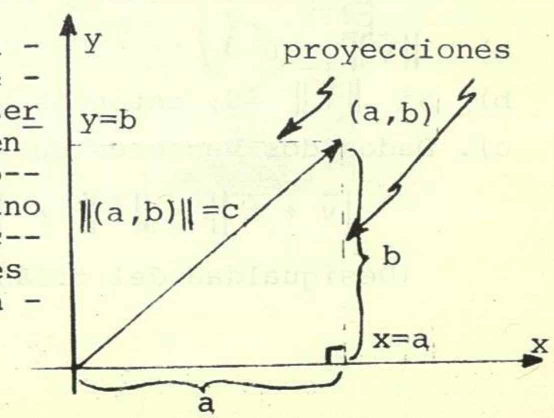
Representa en el plano Cartesiano RXR las adiciones del ejercicio anterior, mediante el método gráfico que creas más conveniente.

2. La norma de un vector.

La norma de un vector es un aspecto muy importante debido a que representa el tamaño o magnitud del vector. La norma también es llamada, a veces, valor absoluto del vector, razón por la cual, es indistinto hablar de la norma o del valor absoluto de un vector.

Para encontrar la norma de un vector sobre el plano Cartesiano RXR, se usan los conceptos referentes a la Geometría Plana Elemental. Particularmente nos referimos al teorema de Pitágoras, puesto que resume el problema de la norma a una simple operación algebraica. Veamos la razón:

Basados en la gráfica que a continuación se presenta, podemos observar que todo vector en posición ordinaria sobre el plano Cartesiano forma, con sus proyecciones* sobre los ejes coordenados x,y , un -



*Consultar Glosario.

triángulo rectángulo. Si las coordenadas del vector son (a,b) los catetos de dicho triángulo miden, respectivamente, a y b. Usando el teorema de Pitágoras, podemos, con esos datos, obtener la hipotenusa del triángulo, la cual corresponde precisamente a la norma del vector antes mencionado.

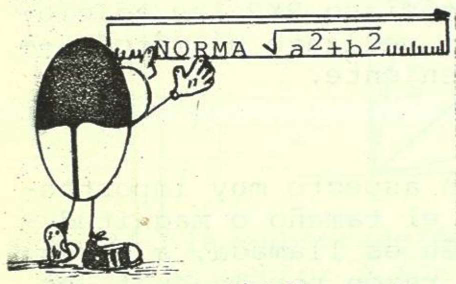
De tal manera que:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

de donde

$$\|(a,b)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Es lo mismo hablar de norma, valor absoluto, magnitud o módulo de un vector (a,b).



Ejemplo 1. Calcular la norma del vector $\vec{v} = (-8, -13)$.

Solución: Aplicando la fórmula para calcular $\|\vec{v}\|$, con a = -8 y b = -13, tenemos:

$$\|\vec{v}\| = \|(-8, -13)\|$$
$$= \sqrt{(-8)^2 + (-13)^2}$$
$$= \sqrt{64 + 169}$$
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{233}$$

La norma de todo vector debe satisfacer siempre las condiciones siguientes:

a). $\|\vec{v}\| \geq 0$

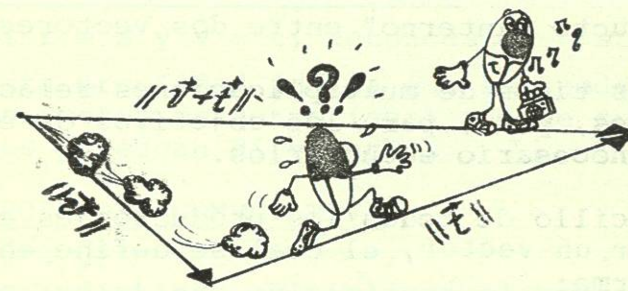
b). Si $\|\vec{v}\| = 0$, entonces $\vec{v} = (0,0) = \vec{0}$

c). Dados dos vectores cualesquiera $\vec{v}$ y $\vec{t}$,

$$\|\vec{v} + \vec{t}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{t}\|$$

(Desigualdad del triángulo)

Esta última propiedad se refiere a que el tamaño o magnitud de la resultante de la suma de dos vectores, siempre es menor o igual que la suma de las magnitudes de los vectores por separado. Esto se puede observar claramente en toda gráfica que represente una suma de vectores.



EJERCICIO I-B-2

Calcula la norma de los siguientes vectores.

a) $\vec{v} = (-3, -4)$

b) $\vec{v} = (4, -7)$

c) $\vec{v} = (0, 9)$

d) $\vec{v} = (\sqrt{2}, -5)$

e) $\vec{v} = (\sqrt{2}, \sqrt{5})$

f) $\vec{v} = (a, b)$

g) $\vec{v} = (k, 2)$

h) $\vec{v} = (1-k, -k)$

i) $\vec{v} = (a^2, -b^2)$

j) $\vec{v} = (\sqrt{a}, \sqrt{3})$