C. Vectores Paralelos y Perpendiculares.

1. Multiplicación de un vector por un escalar .

A nivel de este curso, estudiaremos sólo dos tipos de productos que impliquen vectores.

a) El producto de un escalar por un vector.

b) El producto "interno" entre dos vectores.

Existen más tipos de multiplicaciones relacionadas con vectores, pero, para los objetivos de esta unidad, no es necesario estudiarlos.

El más sencillo de todos los productos es el de un escalar por un vector, el cual se define en la siguiente forma:

Si $\vec{v} = (a,b)$ es un vector cualquiera y r un escalar, entonces $r\vec{v} = r(a,b) = (ra,rb)$

Es decir, cuando hay un escalar multiplicando a un vector, es igual a que el escalar se multiplique por cada una de las componentes del vector.

Así como la adición vectorial tiene ciertas propiedades que cumple, la multiplicación de un escalar por un vector satisface nueve propiedades específicas:

Sean $\vec{v}$ y $\vec{t}$ dos elementos cualesquiera de RXR y sean r y s dos números reales cualesquiera.

1). PROPIEDAD DE CERRADURA

$r\vec{v}$ pertenece a RXR,
es decir, que al multiplicar un vector $\vec{v}$ en RXR por un escalar r, siempre resulta otro vector en RXR.

2). PROPIEDAD DE SUBSTITUCION

Si r = s y $\vec{v} = \vec{t}$, entonces $r\vec{v} = s\vec{t}$

Esta propiedad indica que se puede substituir un vector por otro igual aunque sus expresiones parezcan diferentes.

3). PROPIEDAD CONMUTATIVA.

$r\vec{v} = \vec{v}r$
Es indistinto multiplicar el vector por el escalar, que el escalar por el vector.

4). PROPIEDAD ASOCIATIVA

$(rs)\vec{v} = r(s\vec{v})$

5). EXISTENCIA DEL IDENTICO MULTIPLICATIVO.

$1\vec{v} = \vec{v}$
Existe el escalar 1 tal que el producto de 1 por cualquier vector es igual al vector mismo.

6). PROPIEDAD DEL PRODUCTO CERO.

$r\vec{v} = \vec{0}$ si y sólo si $r = 0$ ó $\vec{v} = (0,0)$
Cuando el producto es el vector nulo, hay varias opciones: el escalar es cero, o el vector $\vec{v}$ es (0,0), (o nulo); o en caso extremo, r=0 y $\vec{v} = (0,0)$.

7). PROPIEDAD DEL -1

$(-1)\ \vec{v} = -\vec{v}$
Cuando se multiplica un vector por la unidad negativa, el resultado es el inverso aditivo del vector, es decir, $-\vec{v}$.

8. PROPIEDADES DISTRIBUTIVAS.

1. $r(\vec{v}+\vec{t}) = r\vec{v}+r\vec{t}$

   $(\vec{v}+\vec{t})r = \vec{v}r+\vec{t}r$

2. $(r+s)\vec{v} = r\vec{v}+s\vec{v}$

   $\vec{v}(r+s) = \vec{v}r+\vec{v}s$

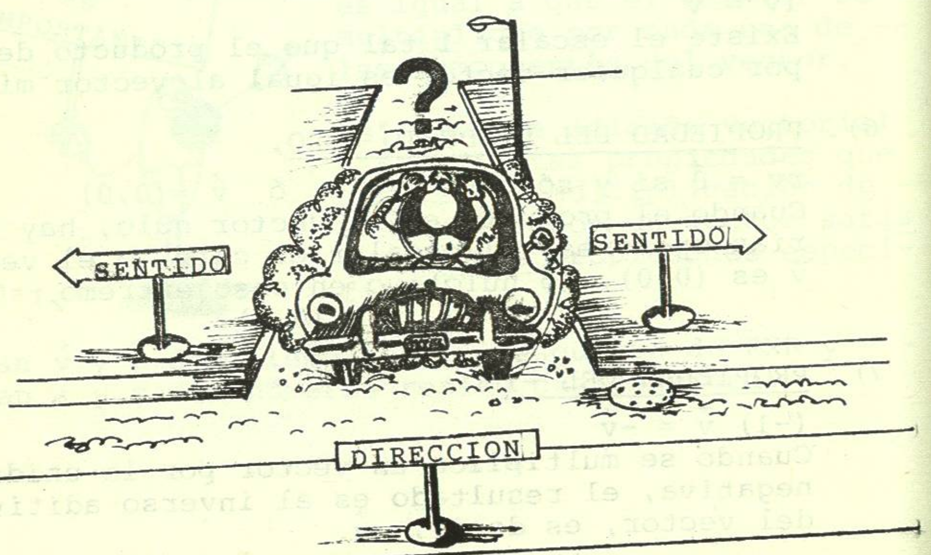
9. PROPIEDAD DE LA NORMA.

$\|r\vec{v}\| = |r|\left(\|\vec{v}\|\right)$

La norma del producto de un escalar r por un - vector $\vec{v}$ es igual al valor absoluto del escalar r multiplicado por la norma del vector $\vec{v}$.

Habíamos mencionado ya las características esenciales de los vectores: magnitud, dirección y sentido.

A veces hay confusión entre el concepto de dirección y el de sentido. La dirección de un vector es simplemente el ángulo, con respecto a un eje de referencia, que nos indica la inclinación del vector. Ya teniendo la dirección, el sentido del vector -- puede ser hacia un extremo o hacia el otro.



1). PROPIEDAD DE CERRADURA

$r\vec{v}$ pertenece a RXR,
es decir, que al multiplicar un vector $\vec{v}$ en - RXR por un escalar r, siempre resulta otro -- vector en RXR.

2). PROPIEDAD DE SUBSTITUCION

Si $r = s$ y $\vec{v} = \vec{t}$, entonces $r\vec{v} = s\vec{t}$

Esta propiedad indica que se puede substituir un vector por otro igual aunque sus expresiones parezcan diferentes.

3). PROPIEDAD CONMUTATIVA.

$r\vec{v} = \vec{v}r$

Es indistinto multiplicar el vector por el escalar, que el escalar por el vector.

4). PROPIEDAD ASOCIATIVA

$(rs)\vec{v} = r(s\vec{v})$

5). EXISTENCIA DEL IDENTICO MULTIPLICATIVO.

$1\vec{v} = \vec{v}$

Existe el escalar 1 tal que el producto de 1 - por cualquier vector es igual al vector mismo.

6). PROPIEDAD DEL PRODUCTO CERO.

$r\vec{v} = \vec{0}$ si y sólo si $r = 0$ ó $\vec{v} = (0,0)$

Cuando el producto es el vector nulo, hay varias opciones: el escalar es cero, o el vector $\vec{v}$ es $(0,0)$, (o nulo); o en caso extremo, $r=0$ y $\vec{v} = (0,0)$.

7). PROPIEDAD DEL -1

$(-1)\ \vec{v} = -\vec{v}$

Cuando se multiplica un vector por la unidad - negativa, el resultado es el inverso aditivo - del vector, es decir, $-\vec{v}$.

8. PROPIEDADES DISTRIBUTIVAS.

1. $r(\vec{v}+\vec{t}) = r\vec{v}+r\vec{t}$

   $(\vec{v}+\vec{t})r = \vec{v}r+\vec{t}r$

2. $(r+s)\vec{v} = r\vec{v}+s\vec{v}$

   $\vec{v}(r+s) = \vec{v}r+\vec{v}s$

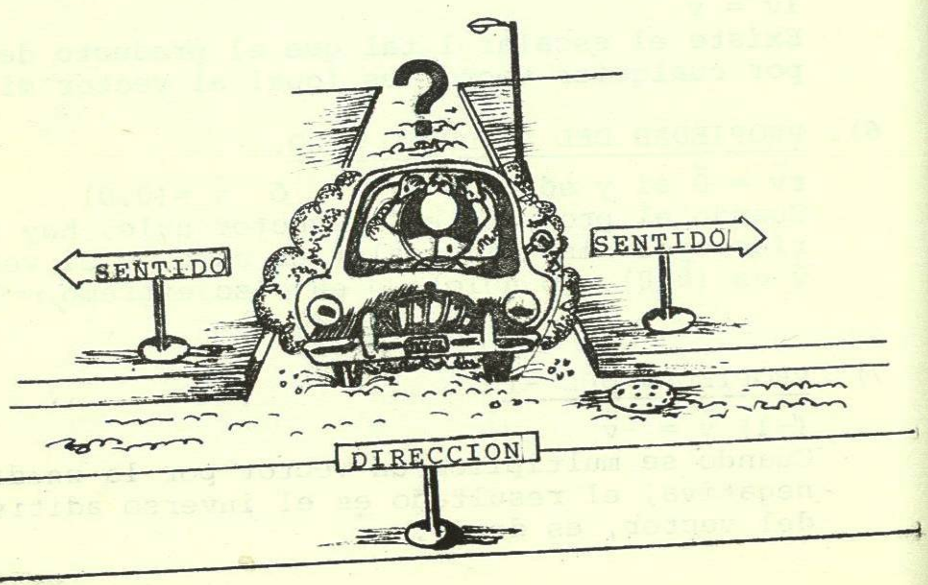
9. PROPIEDAD DE LA NORMA.

$\|r\vec{v}\| = |r|\left(\|\vec{v}\|\right)$

La norma del producto de un escalar r por un vector $\vec{v}$ es igual al valor absoluto del escalar r multiplicado por la norma del vector $\vec{v}$.

Habíamos mencionado ya las características esenciales de los vectores: magnitud, dirección y sentido.

A veces hay confusión entre el concepto de dirección y el de sentido. La dirección de un vector es simplemente el ángulo, con respecto a un eje de referencia, que nos indica la inclinación del vector. Ya teniendo la dirección, el sentido del vector puede ser hacia un extremo o hacia el otro.



1). PROPIEDAD DE CERRADURA

$r\vec{v}$ pertenece a RXR,

es decir, que al multiplicar un vector $\vec{v}$ en RXR por un escalar r, siempre resulta otro vector en RXR.

2). PROPIEDAD DE SUBSTITUCION

Si $r = s$ y $\vec{v} = \vec{t}$, entonces $r\vec{v} = s\vec{t}$

Esta propiedad indica que se puede substituir un vector por otro igual aunque sus expresiones parezcan diferentes.

3). PROPIEDAD CONMUTATIVA.

$r\vec{v} = \vec{v}r$

Es indistinto multiplicar el vector por el escalar, que el escalar por el vector.

4). PROPIEDAD ASOCIATIVA

$(rs)\vec{v} = r(s\vec{v})$

5). EXISTENCIA DEL IDENTICO MULTIPLICATIVO.

$1\vec{v} = \vec{v}$

Existe el escalar 1 tal que el producto de 1 por cualquier vector es igual al vector mismo.

6). PROPIEDAD DEL PRODUCTO CERO.

$r\vec{v} = \vec{0}$ si y sólo si $r = 0$ ó $\vec{v} = (0,0)$

Cuando el producto es el vector nulo, hay varias opciones: el escalar es cero, o el vector $\vec{v}$ es $(0,0)$, (o nulo); o en caso extremo, $r=0$ y $\vec{v} = (0,0)$.

7). PROPIEDAD DEL -1

$(-1)\vec{v} = -\vec{v}$

Cuando se multiplica un vector por la unidad negativa, el resultado es el inverso aditivo del vector, es decir, $-\vec{v}$.

8. PROPIEDADES DISTRIBUTIVAS.

1. $r(\vec{v}+\vec{t}) = r\vec{v}+r\vec{t}$

   $(\vec{v}+\vec{t})r = \vec{v}r+\vec{t}r$

2. $(r+s)\vec{v} = r\vec{v}+s\vec{v}$

   $\vec{v}(r+s) = \vec{v}r+\vec{v}s$

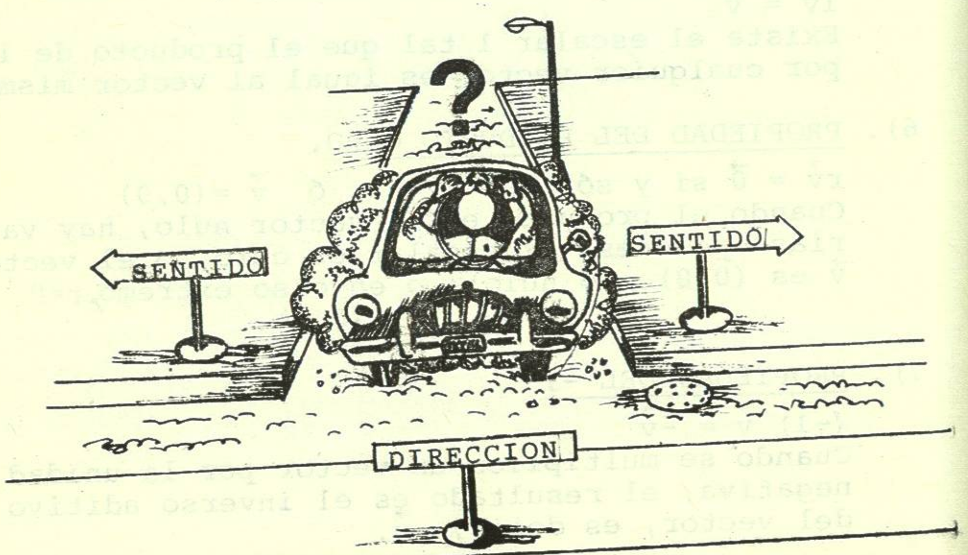
9. PROPIEDAD DE LA NORMA.

$$\|r\vec{v}\| = |r|\left(\|\vec{v}\|\right)$$

La norma del producto de un escalar r por un vector $\vec{v}$ es igual al valor absoluto del escalar r multiplicado por la norma del vector $\vec{v}$.

Habíamos mencionado ya las características esenciales de los vectores: magnitud, dirección y sentido.

A veces hay confusión entre el concepto de dirección y el de sentido. La dirección de un vector es simplemente el ángulo, con respecto a un eje de referencia, que nos indica la inclinación del vector. Ya teniendo la dirección, el sentido del vector puede ser hacia un extremo o hacia el otro.



Dos vectores diferentes de cero, con igual dirección, pueden tener el mismo sentido o sentidos opuestos. Para averiguarlo se tiene que saber lo siguiente:

Dados dos vectores, diferentes de cero, $\vec{v}$ y $\vec{t}$, si uno de ellos ($\vec{v}$ por ejemplo) es el producto del otro ($\vec{t}$) por un escalar r, entonces son paralelos ($\vec{v}$ y $\vec{t}$).

$$r\vec{t} = \vec{v}$$

Si el escalar r es <u>positivo</u>, tienen el mismo sentido.

Si el escalar r es <u>negativo</u>, tienen sentidos opuestos.

Ejemplo 1. Verificar que $\vec{v} = (10, -4)$ y $\vec{t} = (-5,2)$ tienen sentidos opuestos.

Solución: Tomemos el vector de componentes más pequeñas ($\vec{t}$) y busquemos un escalar que multiplicado por dicho vector, dé igual al vector de componentes más grandes $\vec{v}$.

Intentando primero con el número 2,

$$2(-5,2) = (-10,4),$$

vemos que no resulta el vector $\vec{v}$ sino otro vector con los signos alterados, para solucionar esto, probamos ahora con -2, entonces:

$$(-2)(-5,2) = (10,-4) = \vec{v}$$

El resultado es igual al vector $\vec{v}$, por lo que nos damos cuenta que son paralelos y además, puesto que el escalar es negativo, se deduce que los vectores tienen sentidos opuestos.

Ejemplo 2. Verificar que $\vec{v} = (\frac{1}{2}, -4)$ y $\vec{t} = (2,-16)$ tienen la misma dirección y sentido.

Solución: El vector $\vec{v}$ es el de componentes más pequeñas, entonces buscamos un número que multiplicado por $\vec{v}$ resulte $\vec{t}$. Proponiendo el número 4 y probando,

$$4(\frac{1}{2}, -4) = (2,-16) = \vec{t},$$

se ha encontrado que $\vec{t}$ es un producto de un escalar positivo por el vector $\vec{v}$, por lo tanto tienen la misma dirección y el mismo sentido.

Dos vectores, diferentes de cero, con la misma dirección se dice que son paralelos (no importa el sentido que lleven). El vector (0,0) es paralelo a cualquier vector.

Aclarando; dos vectores, diferentes de cero, serán paralelos, siempre y cuando uno de ellos sea igual al producto del otro vector por un escalar.

TEOREMA. Si $\vec{v}$ y $\vec{t}$ son respectivamente paralelos a un vector $\vec{u}$, diferente del vector cero, entonces $\vec{v}$ y $\vec{t}$ son vectores paralelos entre sí.

Con respecto a la magnitud, existen cierto tipo de vectores cuyo tamaño mide la unidad. Dichos vectores se llaman vectores unitarios.

Ejemplo 3. Comprobar que el vector $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es un vector unitario.

Solución: La norma de $\vec{u}$ está dada por:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$\therefore \|\vec{u}\| = 1$ Como la norma de $\vec{u}$ es la unidad, a éste se le llama vector unitario.

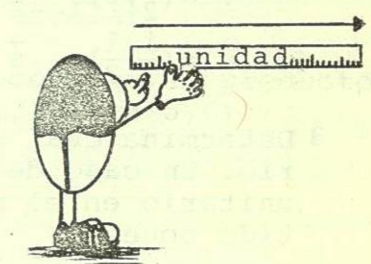
En general, para un vector cualquiera, $\vec{v}$, diferente de cero, $\frac{1}{\|\vec{v}\|}(\vec{v})$ es un vector unitario en el mismo sentido que $\vec{v}$, mientras que $-\frac{1}{\|\vec{v}\|}(\vec{v})$ es un vector unitario en sentido opuesto a $\vec{v}$.

Ejemplo 4. Encontrar un vector unitario en el mismo sentido que $\vec{v} = (3,4)$ y un vector unitario con el sentido opuesto a $\vec{v}$.

Solución: Primero procedemos a encontrar $\|\vec{v}\|$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{9+16}$$

$$= \sqrt{25} = 5$$



Entonces $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}(\vec{v})$

$$= \frac{1}{5}(3,4)$$

$$= \left(\frac{1}{5} \cdot 3, \frac{1}{5} \cdot 4\right)$$

$$\therefore \vec{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

y el vector unitario en el sentido opuesto a $\vec{v}$,

$$-\vec{u} = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

EJERCICIO I-C-1

1 Efectúa las multiplicaciones siguientes.

a) $5(3,-2)$ f) $z(x,y)$

b) $(-2)(1,4)$ g) $(-3)(x+y,\ x-y)$

c) $(-8)(-1,2)$ h) $(-1)(4,-7)$

d) $a(5,-4)$ i) $(-1)(-a,\ -b)$

e) $(-b)(x,-3)$ j) $(-1)(x,y)$

2 Determina si la pareja de vectores dados es paralela, si lo es, menciona que sentido tienen entre sí los vectores dados.

a) $\vec{v}=(3,-8)$; $\vec{s}=(6,-16)$

b) $\vec{v}=(-5,4)$; $\vec{s}=(-4,5)$

c) $\vec{v}=(8,-2)$; $\vec{s}=(-4,1)$

d) $\vec{v}=(\frac{1}{2},6)$; $\vec{s}=(-1,-12)$

e) $\vec{v}=(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$; $\vec{s}=(3,2)$

3 Determina cuál de los siguientes vectores es unitario. En caso de que no lo sea, encuentra un vector unitario en el mismo sentido que él y otro en sentido opuesto.

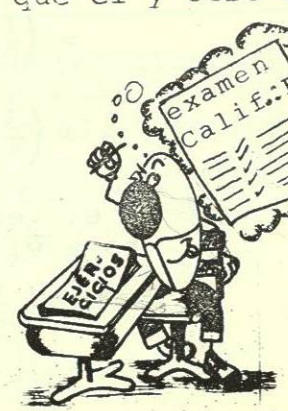
a) $(1,1)$

b) $(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})$

c) $(\frac{6}{10},\frac{8}{10})$

d) $(5,\ 6)$

e) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$



2. Producto interno o Producto punto de vectores.

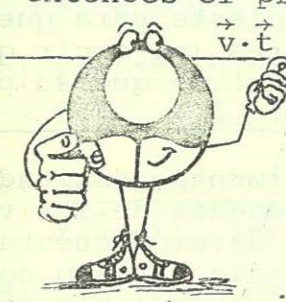
Una herramienta muy útil y práctica en álgebra vectorial es el producto interno, (llamado también producto punto o escalar) el cual estudiaremos en esta unidad.

Se le denomina también producto escalar debido a que, precisamente, el resultado de dicho producto es un número escalar y no un vector como en el producto anteriormente estudiado.

Dicho producto se define de la siguiente manera:

Si $\vec{v}=(v_1,v_2)$ y $\vec{t}=(t_1,t_2)$ son elementos de RXR, entonces el producto interno de $\vec{v}$ y $\vec{t}$, es

$$\vec{v}\cdot\vec{t} = v_1t_1 + v_2t_2$$



Como se puede ver claramente, el resultado del producto interno es una suma de números reales, es decir, un escalar.

Ejemplo 1. Encontrar el producto interno (o escalar) de $\vec{v}=(-8,3)$ y $\vec{t}=(5,6)$

Solución: $\vec{v}\cdot\vec{t}=(-8,3)\cdot(5,6)$

Usando la definición :

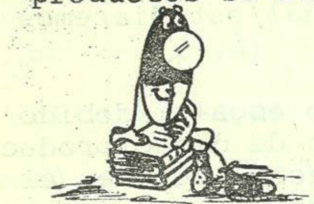
$$\vec{v}\cdot\vec{t}=(-8)(5)+(3)(6)$$

$$=-40+18$$

$$\vec{v}\cdot\vec{t}=-22$$

Debes notar que el símbolo del producto interno de dos vectores es el punto que los separa.

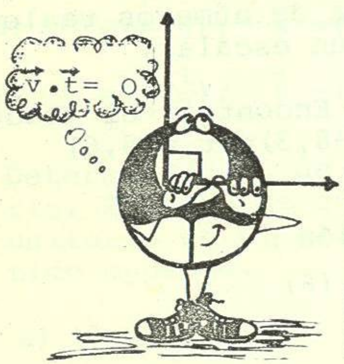
Al producto interno se le llama también producto punto para distinguirlo del "producto cruz", que - es otra forma de multiplicación vectorial. Dichos productos se representan, respectivamente, así:



$\vec{v} \times \vec{t}$	$\vec{v} \cdot \vec{t}$
producto cruz de $\vec{v}$ y $\vec{t}$	producto punto de $\vec{v}$ y $\vec{t}$

El producto interno (escalar o punto) de vectores tiene una gran importancia en el álgebra vectorial, puesto que nos informa sobre la perpendicularidad (o no perpendicularidad) y el paralelismo (o no - paralelismo) de dos vectores dados.

Una condición necesaria y suficiente para que - dos vectores sean perpendiculares (es decir que formen entre sí un ángulo de 90°) es que su producto interno sea igual a cero.



Así, fácilmente, sabiendo - las coordenadas de los vectores nos daremos cuenta si son perpendiculares o no.

Ejemplo 2. Determinar si -- son perpendiculares o no -- los siguientes pares de vectores:

a) $\vec{v} = (3,-2)$, $\vec{t} = (2,4)$

b) $\vec{v} = (5,6)$; $\vec{t} = (-12,10)$

Solución: a) Si $\vec{v} = (3,-2)$, $\vec{t} = (2,4)$,

Entonces

$$\vec{v}\cdot\vec{t} = (3,-2)\cdot(2,4)$$
$$= (3)(2) + (-2)(4)$$
$$= 6-8$$
$$\underline{\vec{v}\cdot\vec{t} = -2}$$

Puesto que -- $-2 \neq 0$, entonces los vectores no son perpendiculares.

b) $\vec{v}\cdot\vec{t} = (5,6)\cdot(-12,10)$

$$= (5)(-12) + (6)(10)$$
$$= -60 + 60$$
$$\underline{\vec{v}\cdot\vec{t} = 0}$$

Puesto que - $\vec{v}\cdot\vec{t} = 0$, $\vec{v}$ y $\vec{t}$ sí son perpendiculares.

Al igual que la adición y el producto de un escalar por un vector, el producto interno también -- tiene ciertas propiedades que lo caracterizan, -- ellas son:

Si $\vec{v}$, $\vec{t}$, $\vec{u}$ y $\vec{s}$ son elementos cualesquiera de RXR y r es cualquier número real, entonces

a) PROPIEDAD DE SUBSTITUCION.

Si $\vec{v} = \vec{u}$ y $\vec{t} = \vec{s}$, entonces $\vec{v}\cdot\vec{t} = \vec{u}\cdot\vec{s}$

b) PROPIEDAD CONMUTATIVA.

$\vec{v}\cdot\vec{t} = \vec{t}\cdot\vec{v}$

c) PROPIEDAD ASOCIATIVA.

$r(\vec{v}\cdot\vec{t}) = (r\vec{v})\cdot\vec{t}$

d) PROPIEDAD DISTRIBUTIVA.

$\vec{v}\cdot(\vec{t} + \vec{s}) = \vec{v}\cdot\vec{t} + \vec{v}\cdot\vec{s}$ y

$(\vec{t} + \vec{s})\cdot\vec{v} = \vec{t}\cdot\vec{v} + \vec{s}\cdot\vec{v}$

e) PROPIEDAD DE LA NORMA.

$\vec{v}\cdot\vec{v} = \|\vec{v}\|^2$

EJERCICIO I-C-2

1 Encuentra el producto interno (producto escalar o producto punto) de las siguientes parejas de vectores.

a) $\vec{v} = (4,-5)$; $\vec{s} = (1,-3)$

b) $\vec{v} = (3,a)$; $\vec{s} = (-a,8)$

c) $\vec{v} = (a,b)$; $\vec{s} = (-b,a)$

d) $\vec{v} = (x+y, -x)$; $\vec{s} = (y, x+y)$

e) $\vec{v} = (x-3, x+3)$; $\vec{s} = (3,-9)$

2 Determina si $\vec{v} \perp \vec{s}$, (si el vector $\vec{v}$ es perpendicular al $\vec{s}$) mediante el producto punto de ellos.

a) $\vec{v} = (9,-2)$; $\vec{s} = (4,18)$

b) $\vec{v} = (3,3)$; $\vec{s} = (4,4)$

c) $\vec{v} = (2,2)$; $\vec{s} = (7,-7)$

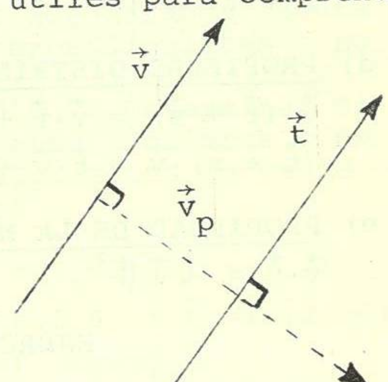
d) $\vec{v} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$; $\vec{s} = (-1, \frac{3}{2})$

e) $\vec{v} = (8,3)$; $\vec{s} = (3,8)$

3. Relaciones entre vectores paralelos y perpendiculares.

Dados dos vectores, diferentes de cero, que sean paralelos entre sí, podemos observar ciertas propiedades interesantes, muy útiles para comprender la geometría de vectores.

Sean dos vectores $\vec{v} = (v_1, v_2)$ y $\vec{t} = (t_1, t_2)$ paralelos en RXR. Si encontramos un vector perpendicular a $\vec{v}$, éste se puede expresar en la forma $\vec{v}_p = (-v_2, v_1)$, entonces este vector también será perpendicular a $\vec{t}$. Esto se expresa en el siguiente teorema.



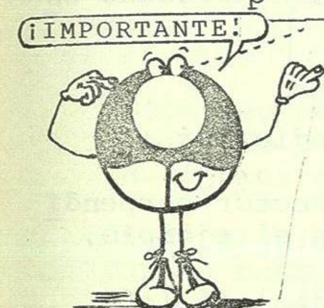
TEOREMA. Sean $\vec{t} = (t_1, t_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ dos vectores en RXR. Entonces $\vec{t}$ es paralelo a $\vec{v}$ si y sólo si $\vec{t}$ y $\vec{v}_p$, son vectores perpendiculares, siendo $\vec{v}_p = (-v_2, v_1)$

Resumiendo el teorema anterior en forma práctica, el corolario siguiente expone un método para comprobar el paralelismo entre dos vectores.

Corolario. $\vec{t} = (t_1, t_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ son vectores paralelos si y sólo si

$$\vec{t} \cdot \vec{v}_p = -t_1 v_2 + t_2 v_1 = 0,$$

donde $\vec{v}_p = (-v_2, v_1)$

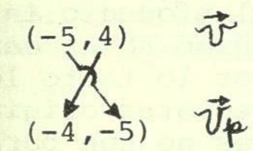


Ejemplo 1. Determinar si son paralelos los vectores representados por las siguientes parejas:

a) $(\frac{15}{2}, -6)$, $(-5,4)$

b) $(-3, -6)$, $(6,-10)$

Solución: a) Tomando el vector perpendicular de cualquiera de ellos, por ejemplo el del vector $(-5,4)$:



observa que la abscisa del primer vector pasó a ser la ordenada del vector perpendicular; y la ordenada del primero pasó a ser el negativo de la abscisa del segundo vector.

En esta forma tenemos ya el vector perpendicular al vector $(-5,4)$. Entonces usando las propiedades del producto interno, procedemos a multiplicar

$$\underbrace{(-4, -5)}_{\text{Vector perpendicular a}(-5,4)} \cdot \underbrace{(\tfrac{15}{2}, -6)}_{\text{el otro vector dado}} = (-4)(\tfrac{15}{2}) + (-5)(-6)$$

$$= -30 + 30 = 0$$

$\therefore\ (-4,5)\cdot(\frac{15}{2}, -6) = 0$ El producto interno es cero, por lo tanto los vectores originales -- son paralelos.

b) Ahora, tomando el vector perpendicular de cualquiera de ellos, siguiendo el mismo proceso anterior, obtenemos:

(6, -10) vector original

(10, 6) vector perpendicular

Haciendo el producto punto del vector perpendicular con el otro vector dado en el ejemplo,

$$(10,6)\cdot(-3, -6) = (10)(-3) + (6)(-6)$$

$$= -30 - 36$$

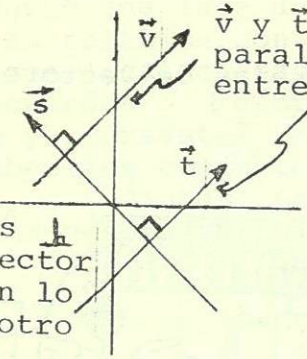
$(10,6)\cdot(-3, -6) = -66$ El producto interno no es cero, por lo tanto los vectores originales no son paralelos.

Las figuras siguientes pueden ilustrar otros teoremas que también son útiles en la resolución de problemas geométricos referentes a rectas en el - plano Cartesiano.

TEOREMA. En RXR un vector perpendicular a uno de dos vectores paralelos diferentes de cero, es perpendicular al otro.

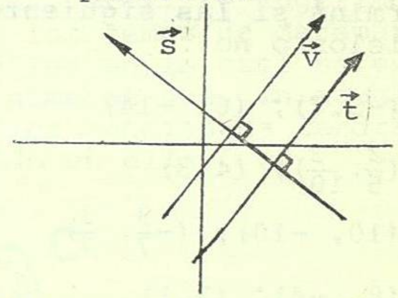
TEOREMA. En RXR, dos vectores, $\vec{v}$ y $\vec{t}$, perpendiculares a un tercer vector $\vec{s}$, diferente de cero, son paralelos entre sí.

$\vec{v}$ y $\vec{t}$ son paralelos entre sí



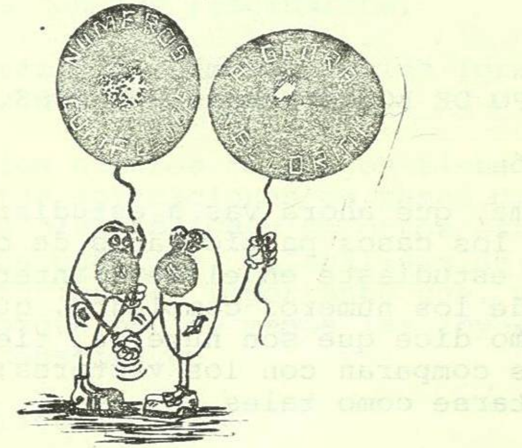
si $\vec{s}$ es $\perp$ a un vector también lo es al otro

dos vectores $\perp$ a un tercer vector son: paralelos



Estos teoremas son muy útiles en la geometría analítica de puntos y rectas, que verás ampliamente en la siguiente unidad.

En el siguiente tema de esta misma unidad estudiarás un caso de un conjunto numérico que tiene propiedades muy parecidas a los vectores de dos dimensiones, (los que acabas de estudiar) y tienen gran aplicación en física y en la teoría de números en matemáticas. Ahora le exponemos como un caso muy - particular de la extensa variedad de ramas que posee el análisis vectorial.



EJERCICIO I-C-3

Determina si las siguientes parejas de vectores son paralelos o no.

a) $(-3,7)$; $(6,-14)$

b) $(\frac{2}{5}, \frac{3}{10})$; $(4,3)$

c) $(10,-10)$; $(-\frac{3}{7}, \frac{3}{7})$

d) $(8,-4)$; $(2,1)$

e) $(9, -\frac{3}{5})$; $(-\frac{3}{5}, -\frac{9}{8})$

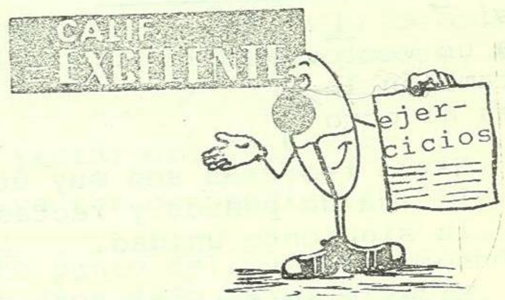
f) (a,b); $(-b, a)$

g) $(a+b, a-b)$; $(1+\frac{b}{a}, 1-\frac{b}{a})$

h) $(3, b)$; $(6, b)$

i) $(9, -1)$; $(-1, \frac{1}{9})$

j) $(3,4)$; $(4,8)$

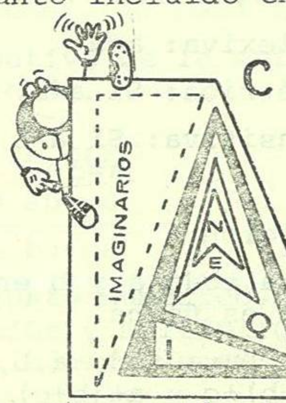


II. EL CAMPO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS.

Introducción.

En este tema, que ahora vas a estudiar, te mostraremos uno de los casos particulares de conjuntos vectoriales que estudiaste en el tema anterior. Se trata del campo de los números complejos, que, aunque su nombre mismo dice que son números, tienen propiedades que los comparan con los vectores; y, de hecho pueden tratarse como tales.

Para darte una idea de lo que son los números complejos y su relación con los demás tipos de conjuntos numéricos (reales, racionales, etc), te sugerimos, que recuerdes (dentro de los temas de Matemática I, que ya cursaste) una gráfica en la cual se esquematizaban los conjuntos de números que, en aquel entonces, estudiabas. La gráfica mencionada tendrá ahora un nuevo conjunto incluído en ella.



En esta gráfica se ve que el conjunto de los números reales contiene a todos los demás conjuntos que conocías. Ahora; el conjunto de los números complejos abarca a los números reales, y, además contiene otros números más que son los imaginarios.

En otras palabras, los números reales forman un subconjunto de los números complejos.

El álgebra de los números complejos tiene grandes y muy importantes aplicaciones en ramas de la ingeniería, como la electrónica, y en otros estudios como son: la mecánica cuántica, el análisis de Fourier, etc. Por lo anterior, es importante que, desde preparatoria se conozcan por lo menos las leyes fundamentales que los constituyen.

A. Campos Numéricos.

En matemáticas, un campo numérico (o simplemente campo), es un conjunto cuyos elementos son números que satisfacen ciertas propiedades bien definidas llama-