das "axiomas de campo".

Los axiomas de campo son los siguientes:

Sea F un conjunto numérico. F es un campo si satisfa ce las siguientes propiedades:

1. Axiomas de la Igualdad

   Para todo a,b,c εF,

   a) Propiedad reflexiva: a=a

   b) Propiedad simétrica: Si a=b, entonces b=a

   c) Propiedad transitiva: Si a=b y b=c, entonces a=c

2. Axiomas de la Adición

   a) Cerradura: Para todo a y b en F, a+b εF y a+b es única.

   b) Asociatividad: Para todo a,b, y c en F, $(a+b)+c = a+(b+c)$

   c) Existencia del Idéntico: Existe en F un único elemento llamado 0 (cero) con la propiedad de que para todo $a\varepsilon F$, $0+a = a$ y $a+0 = a$

   d) Existencia del Inverso: Para cada $a\varepsilon F$, existe un elemento $-a$, (inverso aditivo de a) donde $-a\varepsilon F$, tal que $a+(-a) = 0$ y $(-a)+a = 0$

   e) Conmutatividad: Para todo a, $b\varepsilon F$, se cumple que $a+b = b+a$

3. Axiomas de la multiplicación

   a) Cerradura: Para todo $a,b\varepsilon F$, $\underline{ab}\varepsilon F$ y $\underline{ab}$ es único.

   b) Asociatividad: Para todo $a,b,c\varepsilon F$, $a(bc) = (ab)c$.

   c) Existencia del Idéntico: Existe un único elemento llamado 1 (uno, $1 \neq 0$) con la propiedad de que para todo $a\varepsilon F$, $1.a = a$ y $a\cdot 1 = a$

   d) Existencia de Inversos: Para cada $a\varepsilon F$, excepto el 0, en F, existe un elemento llamado $\frac{1}{a}$ (recíproco o inverso multiplicativo) en F tal que $a\cdot\frac{1}{a} = 1$ y $\frac{1}{a}\cdot a = 1$

   e) Conmutatividad: Para todo $a,b\varepsilon F$, $ab = ba$.

4. Axioma distributivo de la multiplicación con respecto a la adición.

   Para todo $a,b,c\varepsilon F$

   1) $a(b+c) = ab+ac$

   2) $(b+c)a = ba+ca$

Cualquier conjunto numérico, junto con las operaciones de adición y multiplicación, que satisfaga todas las propiedades anteriores, es un campo. En realidad, el conjunto de los números reales (R) es un campo; también lo es el conjunto de los números racionales (Q). Y ahora, el conjunto de los números complejos es también un campo, porque cumple con todas las propiedades anteriores (la demostración de ello queda para el alumno). Queda así justificado el nombre del tema: "El campo de los números complejos".

B. Factorización* de un Polinomio.

Antes de comenzar con las propiedades de los números complejos, veamos una de las razones más objetivas por las cuales necesitamos extender el campo de los números reales a otro campo más extenso, éste es el de los números complejos.

*Consultar Glosario.

Ejemplo 1. Factorizar el polinomio x^2-x-6.

Solución: Por los métodos que ya se vieron en unidades anteriores, la factorización de dicho polinomio es la siguiente:

$$x^2-x-6 = (x-3)(x+2)$$

donde $(x-3)$ y $(x+2)$ son polinomios sobre* el campo de los racionales; por tanto, se dice que x^2-x-6 es reducible sobre los racionales.

Entonces, generalizando, un polinomio sobre un campo F es reducible sobre F, si aquél es el producto de dos o más polinomios sobre F, ninguno de los cuales es una constante. Evidentemente, un polinomio que no es reducible sobre un campo F se dice que es irreducible sobre F.

Veamos el caso de factorizar sobre Q la expresión $3x+5$. Por cualquier forma que se factorice no cumple con las condiciones de reducibilidad, por lo tanto es irreducible sobre Q.

Veamos porqué:

$3x+5$ se puede factorizar así:

$$3x+5 = 3(x+\frac{5}{3})$$

Observa que 3 es una constante.

o de esta otra forma

$$3x+5 = x(3+\frac{5}{x});\ x \neq 0$$

Observa que $3+\frac{5}{x}$ no es polinomio.

por lo tanto, la expresión $3x+5$ es irreducible sobre el campo de los racionales (Q).

*Consultar Glosario.

Ahora, dentro de los polinomios irreducibles, aquellos que su primer coeficiente* es 1 se les llama primos. Así, tenemos que:

$3x+2$; no es primo	{	porque a pesar de ser irreducible su primer coeficiente no es 1.
$x+10$; es primo	{	pues es irreducible y su primer coeficiente es 1.
x^2-x-6; no es primo	{	aunque su primer coeficiente es 1, el polinomio es reducible sobre Q.

Para poder resolver los ejercicios de polinomios que te presentaremos al finalizar este inciso, conviene que recuerdes los "modelos de factorización" o productos notables que ya te presentamos en unidades anteriores; éstos son:

$$x^2-a^2 = (x+a)(x-a) \quad (1)$$

$$x^3-a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2) \quad (2)$$

$$x^3+a^3 = (x+a)(x^2-ax+a^2) \quad (3)$$

$$x^2+2ax+a^2 = (x+a)^2 \quad (4)$$

$$x^2+(a+b)x+ab = (x+a)(x+b) \quad (5)$$

$$x^3+3ax^2+3a^2x+a^3 = (x+a)^3 \quad (6)$$

Ejemplo 2. Factorizar $x^2+7x-18$ sobre Q (racionales).

Solución: La expresión la podemos poner de la forma siguiente de acuerdo con (5)

$$x^2+7x-18 = x^2+(9-2)x+(9)(-2)$$

de ahí que $a = 9$ y $b = -2$

por lo tanto

$$x^2+7x-18 = (x+9)(x-2)$$

*Consultar Glosario.

Este mismo ejemplo se puede hacer también de la forma como se te mostró en la segunda unidad del segundo semestre:

$x^2+7x-18 \Rightarrow x^2+7x-18 = (x+9)(x-2)$

$(x \quad +9) \rightarrow 9x$

$(x \quad -2) \rightarrow \underline{-2x}$

$\qquad\qquad\quad 7x$

Ejemplo 3. Factorizar x^3-27 sobre R (reales)

Solución: Esta expresión es una diferencia de cubos ya que $x^3-27 = x^3-3^3$ y según el modelo (2)

$$x^3 -27 = x^3-3^3 = (x-3)(x^2+3x+9)$$

Habrá veces en las cuales el polinomio será irreducible sobre un campo pero reducible sobre otro campo más extenso; por ejemplo, veamos el siguiente polinomio sobre el campo de los números racionales.

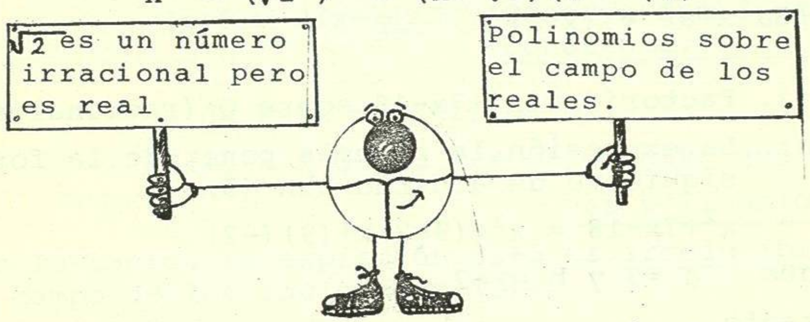
$$x^2- 2$$

mediante el modelo de factorización (1)

$$x^2 - a^2=(x+a)(x-a)$$

nos damos cuenta que este polinomio es irreducible sobre los racionales, puesto que

$$x^2 - (\sqrt{2})^2 = (x+ \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$$



De aquí obtenemos que el polinomio $x^2- 2$ es irreducible sobre el campo de los racionales, pero es reducible sobre el campo de los números reales.

Existen otros casos de polinomios que son irreducible en el campo de los reales; veamos un ejemplo:

Sea el polinomio

$$x^2 + 1.$$

Si buscamos entre los modelos de factorización y todos los métodos para factorizar polinomios, nos daremos cuenta de que no existen polinomios sobre el campo de los reales que multiplicados den por resultado x^2+1. El modelo de factorización que más se asemeja a este polinomio es

$$x^2 - a^2 = (x+a)(x-a) \qquad (1)$$

En esa forma

$$x^2 + 1 = x^2-(-1)$$

$$= x^2-(\sqrt{-1})^2 \quad \left\{ \text{elevando al cuadrado el } (-1) \text{ y sacando su raíz cuadrada, simultáneamente} \right.$$

entonces, aplicando el modelo (1)

$$x^2 + 1 = (x+\sqrt{-1})(x-\sqrt{-1})$$

Observemos detenidamente que el número $\sqrt{-1}$ no existe en el conjunto de los números reales. En unidades pasadas, a este tipo de números se les llamó imaginarios (denotados por la letra i).

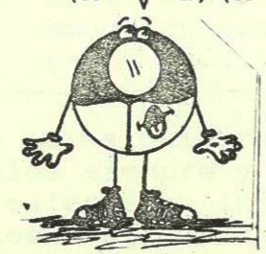
$$\text{Si } i = \sqrt{-1},$$

$$\text{entonces} \quad i^2= (\sqrt{-1})^2= -1$$

En otras palabras, i es un número imaginario tal que elevado al cuadrado da el número real (-1)

Entonces tenemos ahora que:

$$x^2+1 = (x+ \sqrt{-1})(x- \sqrt{-1}) = (x+i)(x-i)$$



polinomios sobre un campo más completo que los números reales

Por eso, ahora nos vemos impulsados a definir un -- campo, de tal extensión que contenga al campo de los números reales y también reúna a los números imaginarios; para ello idearemos un modelo* de número. Digamos que el campo está constituído por números de la forma a+bi, conocida como la forma ordinaria, donde a y b son números reales. Al número a lo llamaremos parte real y al número bi lo denominaremos parte -- imaginaria; en esa forma, ahora tenemos un número -- que está formado tanto de números reales como de imaginarios. Como su forma no es tan simple como los -- números que tradicionalmente conocemos, se llamarán números complejos.

Estos números, como te dijimos antes, comprenden a - los números reales y a los imaginarios. Para ilustrarte lo anterior, observa que en el número complejo a+bi:

Si b=0, entonces a+bi se reduce al número real a, -- pues a+bi = a+0i = a.

Si a=0, entonces el número complejo a+bi se reduce - al número imaginario bi, pues a+bi = 0+bi = bi. Algunos autores le llaman número imaginario puro al bi.

Todo número complejo, del tipo a+bi, tiene los dos - tipos de componentes: la real a y la imaginaria bi.

En el tema siguiente definiremos las operaciones con los números complejos y sus propiedades, de acuerdo con los axiomas de campo, para que nuestro estudio - sea consistente.

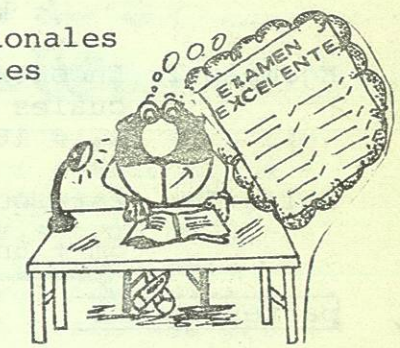
*Consultar Glosario.

EJERCICIO II-B

Encuentra los factores primos de cada polinomio dado sobre su respectivo campo.

a) x^2-9 ; sobre Q	f) t^4-6t^2+9 ; sobre R
b) x^3+8 ; sobre Q	g) v^6+2v^3+1 ; sobre R
c) x^2+3x+2 ; sobre Q	h) x^3-3x^2+3x-1; sobre Q
d) x^3-7 ; sobre R	i) x^4-16 ; sobre Q
e) x^3+4 ; sobre R	j) x^4-15 ; sobre R

Nota: Q = conjunto de números racionales
R = conjunto de números reales



C) Operaciones con Números Complejos.

1. Igualdad y Adición de Números Complejos.

Ahora consideremos un teorema importante y básico de los números complejos.

TEOREMA: Sean dos números complejos a+bi y c+di; donde a,b,c y d, son números reales. Ambos números son iguales si y sólo si a=c y b=d.

Dicho en otras palabras, dos números complejos -- son iguales siempre y cuando sus correspondientes partes reales sean idénticas y también lo sean -- sus partes imaginarias.

Ejemplo 1. Encontrar el valor de k que satisfaga la igualdad

$$(k+2)+i = 4+i$$

Solución: Para que se satisfaga la igualdad se tiene que cumplir que:

$k+2 = 4$

y $\quad 1 = 1$

coeficientes respectivos de la "i", en cada número complejo del ejemplo 1.

$k = 4 - 2$

$\therefore\ k = 2$

es el valor de k, para cumplir la igualdad de números complejos.

Ejemplo 2. Encontrar los valores de m y n para los cuales $z_1 = z_2$, dado que $z_1 = 5m + 6ni$ y $z_2 = 10 + mi$.

Solución: Para que $z_1 = z_2$ debe cumplirse que:

$$5m + 6ni = 10 + mi$$

partes imaginarias

partes reales

Igualando de acuerdo al teorema,

$$5m = 10 \qquad (1)$$
$$6n = m \qquad (2)$$

de (1) obtenemos m

$$5m = 10$$

$$m = \frac{10}{5} \quad \therefore \quad \underline{m = 2}$$

y de (2) se tiene el valor de n

$$6n = m$$

$$n = \frac{m}{6} = \frac{2}{6}$$

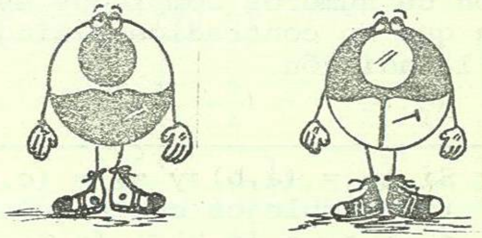
$$\therefore \quad \underline{n = \frac{1}{3}}$$

Notación: Existen otras formas de representar a los números complejos del tipo a+bi. Una de las más usuales, además de la forma ordinaria a+bi, es la llamada forma rectangular, (a,b).

Es decir,

$$a+bi \quad = \quad (a,b)$$

forma ordinaria $\qquad$ forma rectangular



La forma rectangular (a,b) es muy práctica, pues tiene la gran ventaja de que a cualquier número se le puede asignar un punto en el plano complejo. El plano complejo también se conoce como diagrama de Argand, en honor de J.R. Argand quién propuso esta interpretación geométrica de los números complejos en 1806, (aunque, realmente la idea fué originada por C. Wessel en 1797).

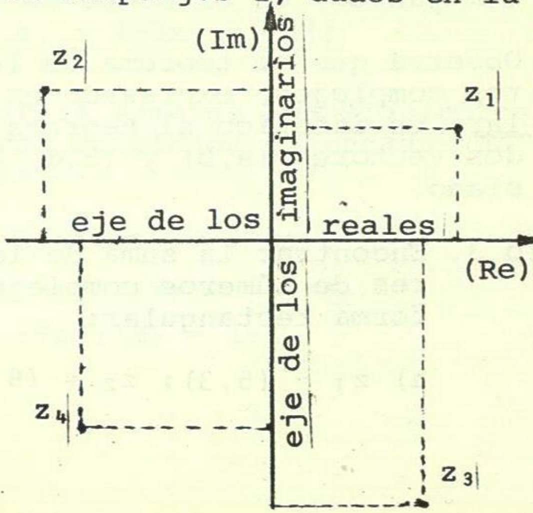
Veamos algunos números complejos z, dados en la forma (a,b),

$z_1 = (5,3)$

$z_2 = (-6,4)$

$z_3 = (4,-7)$

$z_4 = (-5,-5)$



Un número z = (a,b), con la componente b = 0, se encuentra sobre el eje de los números reales, puesto que su parte imaginaria es igual a cero. Es decir, el número z = (a,0) es un número real.

En una forma similar, cuando en el número z = (a,b), a = 0, es decir, z = (0,b); z es llamado número imaginario (también suele llamársele imaginario puro), y se le localiza sobre el eje de los imaginarios.

La adición de números complejos está definida de tal forma que no contradice a ningún axioma de campo sobre la adición.

TEOREMA: Si $z_1 = (a,b)$ y $z_2 = (c,d)$ son dos números complejos cualesquiera, entonces
$z_1 + z_2 = (a,b) + (c,d) = (a+c,\ b+d)$

Expresando lo anterior en la forma de notación ordinaria, tenemos que:

Si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, entonces
$z_1 + z_2 = (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$

Esto es análogo a la suma de dos binomios, con términos semejantes, en el campo de los números reales.

Nota: Observa que el teorema de la adición de números complejos, expresado en la <u>forma rectangular</u>, es idéntico al teorema de la adición de dos vectores (a,b) y (c,d) en el plano Cartesiano.

Ejemplo 3. Encontrar la suma de los siguientes pares de números complejos expresados en forma rectangular:

a) $z_1 = (5,3)$; $z_2 = (8,6)$

b) $z_1 = (\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$; $z_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

c) $z_1 = (2x, y)$; $z_2 = (-5x, r)$

Solución: a) Según el teorema anterior

$$z_1 + z_2 = (5, 3) + (8, 6)$$
$$= (5+8,\ 3+6)$$
$$\therefore\ \underline{z_1 + z_2 = (13, 9)}$$

b) $$z_1 + z_2 = (\tfrac{3}{2}, -\tfrac{5}{2}) + (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$$
$$= \left(\frac{3}{2} + (-\frac{1}{2}),\ (-\frac{5}{2}) + \frac{1}{2}\right)$$
$$= (\tfrac{2}{2}, -\tfrac{4}{2})$$
$$\therefore\ z_1 + z_2 = (1, -2)$$

c) $$z_1 + z_2 = (2x, y) + (-5x, r)$$
$$= [2x + (-5x),\ y + r]$$
$$= (2x - 5x,\ y + r)$$
$$\therefore\ \underline{z_1 + z_2 = (-3x,\ y + r)}$$

Ejemplo 4. Encontrar la suma de los siguientes pares de números complejos expresados en forma ordinaria.

a) $z_1 = 3+4i$; $z_2 = 5+2i$

b) $z_1 = -2+7i$; $z_2 = -6 -8i$

c) $z_1 = r+si$; $z_2 = 1+i$

Solución: Según el teorema de la adición

a) $z_1 + z_2 = (3+4i) + (5+2i)$

$= (3+5) + (4i+2i)$

$\therefore \underline{z_1 + z_2 = 8 + 6i}$

b) $z_1 + z_2 = (-2+7i) + (-6 -8i)$

$= (-2 -6) + (7i - 8i)$

$z_1 + z_2 = (-8) + (-i)$

$\therefore \underline{z_1 + z_2 = -8 -i}$

c) $z_1 + z_2 = (r+si) + (1+i)$

$= (r+1) + (si+i)$

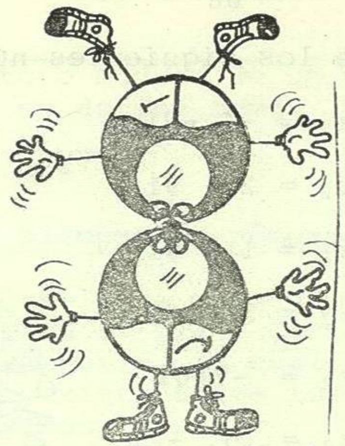
$\therefore \underline{z_1 + z_2 = (r+1) + (s+1)i}$

Existe un caso especial, en el cual la suma de dos números complejos es igual a cero. Veamos una ilustración de este caso especial:

Si $z_1 = a+bi$ y z_2 es un número tal que $z_1 + z_2 = 0$, entonces

$\underbrace{(a + bi)}_{z_1} + z_2 = 0$. Si despejamos z_2 de esta ecuación, tenemos que $z_2 = -\underbrace{(a+bi)}_{z_1}$.

Como puedes observar, $z_2 = -z_1$, pues partimos de que $z_1 = a+bi$.



Debido a que $z_1 + z_2 = 0$, es decir, $z_2 = -z_1$, el número complejo z_2 recibe el nombre de "negativo de z_1", ó "inverso aditivo de z_1", ó simplemente el "opuesto de z_1".

Generalizando, para todo número complejo z, existe uno y sólo un número complejo -z, llamado negativo de z, tal que sumado con el anterior da igual a cero.

Expresándolo simbólicamente, $z + (-z) = 0$.

Si $z = a+bi$, entonces $-z = -a - bi$ ó $-z = -(a+bi)$.

EJERCICIO II-C-1

1 Encuentra el valor de m y n para el cual se cumple la igualdad de números complejos.

a) $m + ni = 5 - 4i$

b) $2mn + mi = n^2 + i$

c) $m + n + ni = 5 + 5i$

d) $m + 5i = 4 + 2ni$

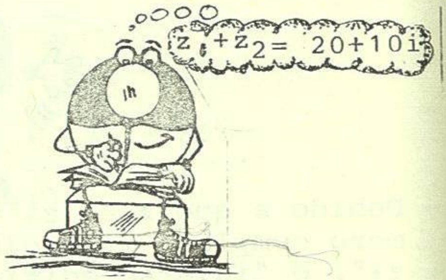
e) $mi = n + 8i$

2 Calcula la suma de los siguientes números complejos.

a) $z_1 = 5 + 2i$; $z_2 = -4 - 3i$

b) $z_1 = 8+0i$; $z_2 = 2 + 9i$

c) $z_1 = 6i$; $z_2 = 1 + 8i$



d) $z_1 = -6 + 3i$; $z_2 = 3 - 6i$

e) $z_1 = 7i$; $z_2 = -7+0i$

f) $z_1 = (8,3)$; $z_2 = (5, -2)$

g) $z_1 = (-6, -1)$; $z_2 = (7,0)$

h) $z_1 = (-8,0)$; $z_2 = (0, -7)$

i) $z_1 = (r,s)$; $z_2 = (s,r)$

2. Valor absoluto de un número complejo.

En unidades pasadas del primer semestre te mencionamos el concepto de valor absoluto aplicado a los números reales. Como recordarás, el valor absoluto (también llamado "módulo") se limita a tomar de cualquier número su valor no negativo (en caso de que el número en cuestión sea cero, su valor absoluto es también cero), así:

$$|5| = 5$$

$$|-6| = 6$$

$$|0| = 0$$

El valor absoluto de cero es igual a cero

Para los números complejos, también se puede definir el valor absoluto. Este, no es tan simple como el de los números reales, puesto que el número complejo consta de dos componentes.

El valor absoluto o módulo de un número complejo $z = a + bi$, se define como:

$$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2} \; ,$$

donde $\sqrt{a^2+b^2}$ es siempre un número real no negativo.

Esta fórmula se asemeja a la norma de un vector, en el plano Cartesiano, en posición ordinaria, la cual ilustra la analogía que existe entre los vectores y los números complejos.

Es muy importante que recuerdes que cualquier número complejo se puede representar gráficamente como un vector, teniendo éste las mismas componentes del número complejo.

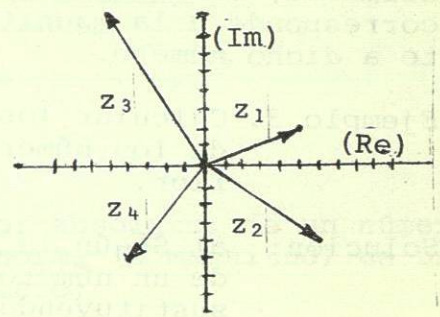
Ejemplo 1. Graficar los siguientes números complejos, representándolos gráficamente como vectores.

a) $z_1 = 5 + 2i = (5,2)$

b) $z_2 = 6 - 4i = (6, -4)$

c) $z_3 = -5 + 8i = (-5, 8)$

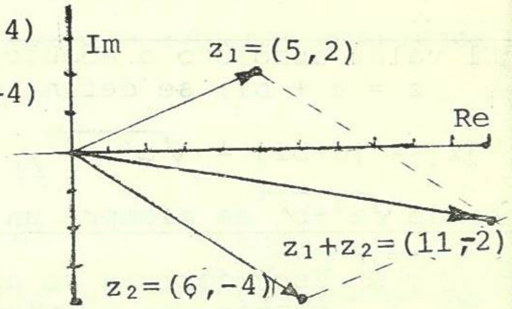
d) $z_4 = -4 - 5i = (-4, -5)$



Esto expresa claramente otra similitud del concepto de vector con el de número complejo.

La suma y la diferencia de números complejos se puede representar gráficamente, utilizando la ley del paralelogramo (o la del triángulo) tal como lo hicimos en la adición vectorial. Para que visualices esta idea, grafiquemos los números complejos anteriores, como si fueran vectores, efectuando la suma de

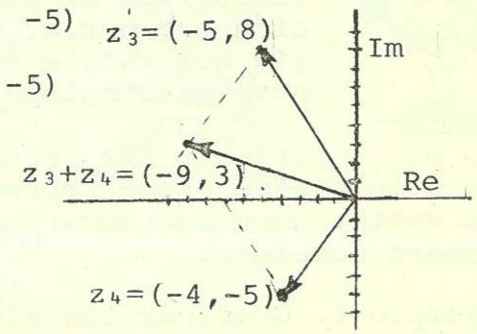
$$z_1 \text{ y } z_2 \; ; \; z_3 \text{ y } z_4$$



a) $z_1 = (5,\ 2)$; $z_2 = (6, -4)$

$z_1 + z_2 = (5,\ 2)+(6, -4)$

$\therefore\ z_1 + z_2 = (11,\ -2)$



b) $z_3 = (-5,\ 8)$; $z_4 = (-4,\ -5)$

$z_3 + z_4 = (-5,\ 8)+(-4,\ -5)$

$\therefore\ z_3+z_4=(-9,3)$

Asimismo, el <u>valor absoluto</u> de un número complejo -- corresponde a la <u>magnitud</u> de un vector que represente a dicho número.

Ejemplo 3. Calcular los valores absolutos o módulos de los números complejos del ejemplo anterior.

Solución: a) Según la fórmula del valor absoluto -- de un número complejo, $|z_1| = \sqrt{a^2+b^2}$ sustituyendo a=5 y b=2 en esta fórmula ya que $z_1 = (5,\ 2)$, tenemos:

$$|z_1| = \sqrt{5^2+2^2} = \sqrt{25+4} = \underline{\sqrt{29}}$$

b) $z_2 = 6 + (-4)i = (6, -4)$

De nuevo si aplicamos la fórmula de valor absoluto tenemos que:

$$|z_2| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Si a=6 y b= -4, entonces

$$|z_2| = \sqrt{6^2+(-4)^2}$$

$$|z_2| = \sqrt{36+16}$$

$$|z_2| = \sqrt{52} = \sqrt{(4)\cdot(13)}$$

$$\underline{|z_2| = 2\sqrt{13}}$$

c) $z_3 = -5+8i = (-5,\ 8)$. Si a= -5 y b=8, entonces

$$|z_3| = \sqrt{(-5)^2+8^2}$$

$$|z_3| = \sqrt{25+64}$$

$$\underline{|z_3| = \sqrt{89}}$$

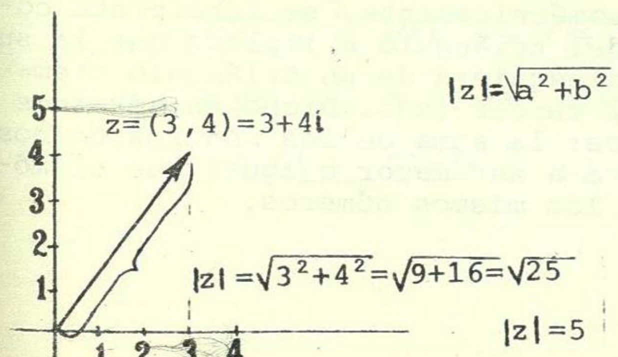
d) $z_4 = -4 -5i = (-4,-5)$

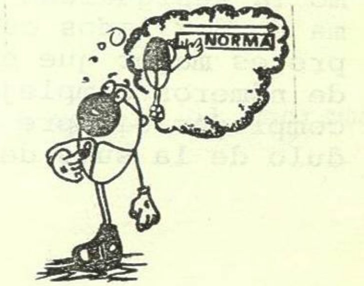
$$|z_4| = \sqrt{(-4)^2+(-5)^2}$$

$$|z_4| = \sqrt{16+25}$$

$$\underline{|z_4| = \sqrt{41}}$$

Gráficamente, el módulo (o valor absoluto) de un número complejo es equivalente a la norma (o magnitud) de un vector sobrepuesto a dicho número;





Es decir, el módulo, valor absoluto, magnitud, (como se le quiera llamar) de un número complejo es la distancia del punto que representan las coordenadas del número complejo al origen.

No importa hacia donde esta dirigido el vector o número complejo, <u>el valor de su módulo nunca es negativo</u>.

Dada esta definición enunciaremos el siguiente teorema:

TEOREMA: Si a+bi y c+di son números complejos, entonces siempre se cumple que:

1. $|a+bi| \geq 0$
   (valor absoluto nunca es negativo)
2. $|a+bi| = 0$ si y sólo si $a=0$ y $b=0$
3. $|(a+bi) + (c+di)| \leq |a+bi| + |c+di|$
   (desigualdad del triángulo)

Los incisos (1) y (2) están relacionados y significan la idea antes expuesta de que la distancia (o valor absoluto) de un número al origen es siempre positiva o cero.

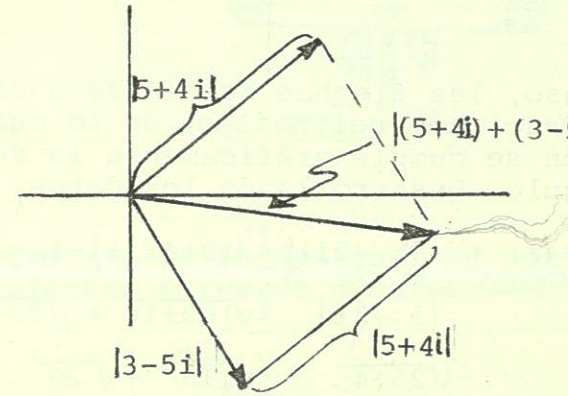
El inciso (3) es una ley que vale para cualquier número complejo. Geométricamente, se interpreta como la desigualdad del triángulo e implica que la suma de dos lados cualesquiera de un triángulo siempre es mayor que el tercer lado. Dicho en términos de números complejos: la suma de los módulos de dos complejos siempre va a ser mayor o igual que el módulo de la suma de los mismos números.

Ejemplo 4. Verificar gráfica y numéricamente la desigualdad del triángulo, dados los siguientes números complejos

a) $z_1 = 5+4i;\ z_2 = 3 - 5i$

b) $z_1 = 10+4i;\ z_2 = -5 - 2i$

Solución:



Observando el triángulo inferior de la gráfica del ejemplo, te podrás dar cuenta de la verificación del teorema de la desigualdad del triángulo; ya que:

$$|(5+4i) + (3-5i)| \overset{?}{\leq} |5+4i| + |3-5i|$$
$$|8-1i| \overset{?}{\leq} |5+4i| + |3-5i|$$
$$\sqrt{64+1} \overset{?}{\leq} \sqrt{25+16} + \sqrt{9+25}$$
$$\sqrt{65} \overset{?}{\leq} \sqrt{41} + \sqrt{34}$$
$$8.06 \overset{?}{\leq} 5.83 + 6.4$$

$\underline{8.06 < 12.24}$ Sí se cumple el teorema