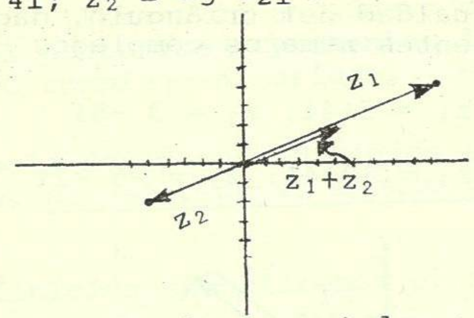
b) $z_1 = 10 + 4i$; $z_2 = -5 -2i$



En este caso, las flechas asociadas a cada número -- complejo dado son colineales, de lo cual se observa que también se cumple gráficamente la desigualdad -- del triángulo. Desarrollando los datos, obtenemos:

$$|(10+4i) + (-5 -2i)| \overset{?}{\leq} |10+4i| + |-5 -2i|$$

$$|5 + 2i| \overset{?}{\leq} \sqrt{100+16} + \sqrt{25+4}$$

$$\sqrt{25+4} \overset{?}{\leq} \sqrt{116} + \sqrt{29}$$

$$\sqrt{29} \overset{?}{\leq} \sqrt{116} + \sqrt{29}$$

Sumando $(-\sqrt{29})$ en ambos lados de la desigualdad

$$\sqrt{29} - \sqrt{29} \overset{?}{\leq} \sqrt{116} + \sqrt{29} - \sqrt{29}$$

$$\underline{0 < \sqrt{116}}$$

Con esto queda verificada numéricamente la desigualdad del triángulo.

EJERCICIO II-B-2

Calcula el valor absoluto (o módulo) y grafica los - siguientes números complejos.

a) $z = 2+2i$

b) $z = 3+4i$

c) $z = 3-4i$

d) $z = 5+0i$

e) $z = -3 +4i$

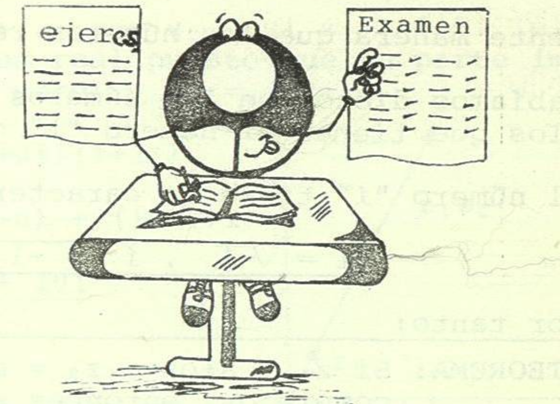
f) $z = -5+0i$

g) $z = 2i$

h) $z = -4i$

i) $z = -3 -4i$

j) $z = i$



Verifica el teorema de la desigualdad del triángulo para los siguientes pares de números complejos.

a) $z_1 = 2+3i$; $z_2 = 3+4i$

b) $z_1 = 2i$; $z_2 = -3 -4i$

c) $z_1 = 5+0i$; $z_2 = 4i$

d) $z_1 = 6+0i$; $z_2 = 8+0i$

e) $z_1 = 1+i$; $z_2 = 2 -4i$

3. Multiplicación de Números Complejos.

En la multiplicación de números complejos, existe una gran similitud con el producto de dos binomios. Como recordarás, la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición afirma que:

$$\underline{(a+b)(c+d) = (ac+bd) + (ad+cb)}$$

En forma muy semejante se define la multiplicación de números complejos, sólo con una pequeña diferencia: - que las segundas componentes de los complejos son, como dijimos, imaginarios y éstos se comportan de diferente manera que los números reales.

Habíamos dicho que los números imaginarios son aquellos que tienen el número "i" como factor.

El número "i" tiene la característica de que:

$$i = \sqrt{-1} \quad , \quad i^2 = -1$$

Por tanto;

TEOREMA: Si $z_1 = a+bi$; $z_2 = c+di$ son dos números complejos, entonces su producto es:

$$z_1 \cdot z_2 = (a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+cb)i$$

Esto es válido ya que,

$$(a+bi)(c+di) = ac+adi + cbi+bd\,(i^2)$$

$$ac+bd(i^2) + adi+cbi$$

$$\updownarrow$$

$$ac+bd(-1) + adi+cbi$$

$$(a+bi)(c+di) = (ac - bd) + (ad+cb)i$$

Observa y compara el resultado del producto de dos binomios reales y el producto de dos números complejos aquí expuesto. La existencia del número "i" altera el parecido de ambas expresiones.

Ejemplo 1. Efectuar las multiplicaciones de los siguientes números complejos.

a) $z_1 = 5$; $z_2 = 1+2i$

b) $z_1 = 3i$; $z_2 = 2+i$

c) $z_1 = 1-i$; $z_2 = 2+i$

d) $z_1 = 1+2i$; $z_2 = 1-2i$

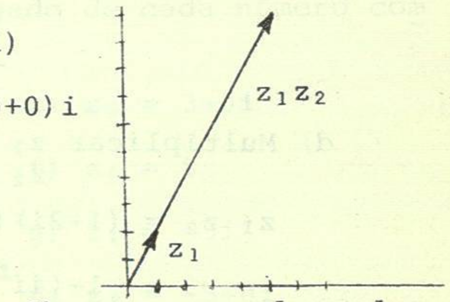
Solución:

a) Multiplicar z_1 por z_2, si $z_1 = 5+0i$ (el número z_1 es real puesto que su parte imaginaria es cero) y $z_2 = 1+2i$.

$$z_1\, z_2 = (5+0i)(1+2i)$$

$$= (5-0) + (10+0)i$$

$$z_1\, z_2 = 5 + 10i$$



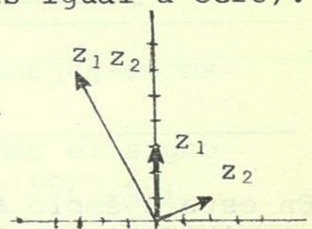
Observa que el producto $z_1\, z_2$ produjo un alargamiento de z_2, en z_1 veces.

b) Multiplicar z_1 por z_2, si $z_1 = 0+3i$ y $z_2 = 2+i$ (el número z_1 es imaginario puro, puesto que su parte real es igual a cero).

$$z_1\, z_2 = (0+3i)(2+i)$$

$$= (0-3) + (0+6)i$$

$$z_1\, z_2 = -3 + 6i$$



Observa que el vector de $z_1\, z_2$ quedó girado 90° con respecto a z_2, debido a que z_2 se multiplicó por un número imaginario puro, z_1.

c) Multiplicar z_1 por z_2, si $z_1 = 1-i$ y $z_2 = 2+i$

$$z_1\, z_2 = (1-i)(2+i)$$

$$= \boxed{2-(-1)} + (i - 2i)$$

$$= (2+1) + (1-2)i$$

$$\underline{z_1 z_2 = 3 - i}$$

Nota: La interpretación gráfica del producto $z_1 z_2$ de este ejemplo se complica puesto que hay cambios en dirección y en tamaño simultáneamente.

d) Multiplicar z_1 por z_2, si $z_1 = 1+2i$ y $z_2 = 1-2i$,

$$z_1 z_2 = (1+2i)(1-2i)$$

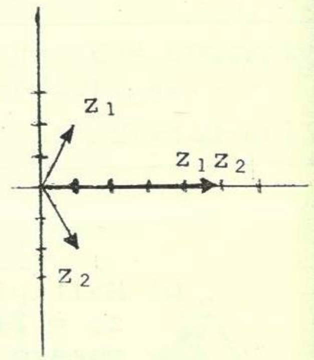
$$= 1-(4i^2) + (2i-2i)$$

$$= 1-(-4) + (2-2)i$$

$$= 1+4 + 0i$$

$$= 5 + 0i$$

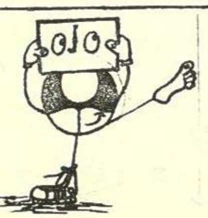
$$\underline{z_1 z_2 = 5}$$ número real



El producto de dos números complejos puede dar como resultado un número real.

En este ejemplo anterior se observa cómo dos números complejos multiplicados entre sí, dan como resultado un número real. Este caso sólo sucede, cuando los números a multiplicar son <u>conjugados</u>.

El conjugado de un número complejo $a+bi$ es el complejo $a-bi$.



Así, el conjugado de un número $z = a+bi$ es denotado como

$$\bar{z} = a - bi.$$

En la misma forma, para un complejo $z = c-di$, su conjugado es

$$\bar{z} = c+di.$$

Lo único que cambia es el signo de la parte imaginaria <u>bi</u>. Si bi es positivo, el conjugado de $a+bi$ cambia <u>su</u> signo por $-bi$ y viceversa.

Ejemplo 2. Encontrar el conjugado de cada número complejo dado.

a) $z_1 = 4+3i$

b) $z_2 = 5-\frac{2}{3} i$

c) $z_3 = -2+i$

d) $z_4 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} i$

e) $z_5 = 3+0i$

f) $z_6 = i$

g) $z_7 = -3i$

h) $z_8 = -5+0i$

Solución:

a) Si $z_1 = 4+3i$, entonces su conjugado es

$$\bar{z}_1 = 4 -3i$$

Observa que cambiamos el signo de $3i$ por $-3i$

b) Si $z_2 = 5-\frac{2}{3}i$, entonces su conjugado es

$$\bar{z}_2 = 5+\frac{2}{3}i$$

Cambiamos el signo de $-\frac{2}{3} i$ por $+\frac{2}{3} i$

c) Si $z_3 = -2+i$, entonces su conjugado es

$$\bar{z}_3 = -2 -i$$

No importa el signo del primer número <u>a</u>, solamente cambiamos el signo de la parte imaginaria <u>bi</u>

d) Si $z_4 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}i$, entonces su conjugado es

$$\bar{z}_4 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}i$$

e) Si $z_5 = 3$, que en forma de número complejo se puede expresar como $z_5 = 3+0i$, entonces su conjugado es

$$\bar{z}_5 = 3 - 0i$$

es decir, $\bar{z}_5 = 3$

El conjugado de un número real es el mismo número

f) Si $z_6 = i$, que expresado en forma de complejo, $z_6 = 0+i$, su conjugado es

$$\bar{z}_6 = 0 - i$$

$$\bar{z}_6 = -i$$

El conjugado de un número imaginario es el negativo del mismo.

g) Si $z_7 = -3i = 0 - 3i$, entonces

$$\bar{z}_7 = 0 + 3i$$

$$\bar{z}_7 = 3i$$

h) Si $z_8 = -5 = -5+0i$

$$\bar{z}_8 = -5 - 0i$$

$$\bar{z}_8 = -5$$

Cuando multiplicamos un número complejo por su conjugado el resultado es un número real. Veamos porqué: si tenemos un número $z = a+bi$, su conjugado es $\bar{z} = a-bi$; si multiplicamos $z\bar{z}$ tenemos que

$$z\bar{z} = (a+bi)(a-bi)$$

$$= a^2-(b^2i^2) + (abi - abi)$$

$$= a^2-(-b^2) + (ab-ab)i$$

Se elimina la parte imaginaria.

$$= (a^2+b^2) + 0i$$

$$\therefore\ z\bar{z} = a^2 + b^2$$

Observa que a^2+b^2 es un número real pues a y b son reales.

Ejemplo 3. Verificar que al multiplicar dos números conjugados complejos se obtiene un número real.

Sea el complejo $z = 2-4i$.

Solución: Si $z = 2-4i$, el conjugado $\bar{z}$ será

$$\bar{z} = 2+4i$$

Multiplicándolos y realizando operaciones

$$z\,\bar{z} = (2-4i)(2+4i)$$

$$= 4-(-16) + 8i - 8i$$

$$= 4 + 16$$

$$\therefore\ z\,\bar{z} = 20$$

Número real

Se elimina la parte imaginaria.

Para ser consistentes con los axiomas de campo, ahora, que te expusimos la definición del producto de números complejos, tenemos que definirte el recíproco de un número complejo.

El recíproco o inverso multiplicativo de un número complejo $z = a+bi$, es un número tal que z multiplicado por su recíproco dé como resultado la unidad.

Si $z = a+bi$, su inverso multiplicativo (o recíproco) es $\frac{1}{z}$ ya que

$$z\ \frac{1}{z} = 1$$

concretizando, si $z = a+bi$, entonces

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi}$$

$$= (a^2+b^2) + 0i$$

$$\therefore\ z\bar{z} = a^2+b^2$$

Observa que a^2+b^2 es un número real pues a y b son reales.

Ejemplo 3. Verificar que al multiplicar dos números conjugados complejos se obtiene un número real.
Sea el complejo z = 2-4i.

Solución: Si z = 2-4i, el conjugado $\bar{z}$ será

$$\bar{z} = 2+4i$$

Multiplicándolos y realizando operaciones

$$z\,\bar{z} = (2-4i)(2+4i)$$

$$= 4-(-16) + 8i - 8i$$

Se elimina la parte imaginaria.

$$= 4 + 16$$

$$\therefore\ z\,\bar{z} = 20$$

Número real

Para ser consistentes con los axiomas de campo, ahora, que te expusimos la definición del producto de números complejos, tenemos que definirte el recíproco de un número complejo.

El recíproco o inverso multiplicativo de un número complejo z = a+bi, es un número tal que z multiplicado por su recíproco dé como resultado la unidad.

Si z = a+bi, su inverso multiplicativo (o recíproco) es $\frac{1}{z}$ ya que

$$z\ \frac{1}{z} = 1$$

concretizando, si z = a+bi, entonces

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} \quad (1)$$

Si multiplicamos por la unidad no se altera el número.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi}$$

La unidad se expresa como un número dividido entre sí mismo; en este caso el conjugado del denominador.

$$= \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}$$

realizamos la operación

$$= \frac{a-bi}{(a^2+b^2)}$$

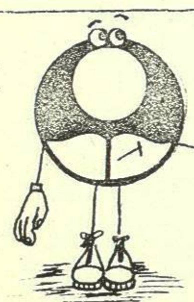
El producto de dos binomios complejos conjugados da un número real de la forma a^2+b^2

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

Si separamos en parte real y parte imaginaria, tenemos el número complejo recíproco de z.

TEOREMA. Dado un número complejo z = a+bi, existe un número y sólo uno $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$ llamado recíproco de z, tal que

$$(z)\left(\frac{1}{z}\right) = 1.$$



En otras palabras, a cada número complejo z se le asigna un número $\frac{1}{z}$ tal que al multiplicarlos entre sí, dan como resultado la unidad. Por esta razón $\frac{1}{z}$ se llama el recíproco o in-

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} \quad (1)$$

Si multiplicamos por la unidad no se altera el número.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi}$$

La unidad se expresa como un número dividido entre sí mismo; en este caso el conjugado del denominador.

$$= \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}$$

realizamos la operación

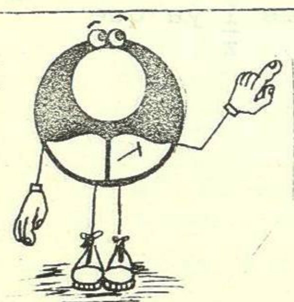
$$= \frac{a-bi}{(a^2+b^2)}$$

El producto de dos binomios complejos conjugados da un número real de la forma a^2+b^2

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

Si separamos en parte real y parte imaginaria, tenemos el número complejo recíproco de z.

TEOREMA. Dado un número complejo $z = a+bi$, existe un número y sólo uno $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$ llamado recíproco de z, tal que $(z)\left(\frac{1}{z}\right) = 1.$



En otras palabras, a cada número complejo z se le asigna un número $\frac{1}{z}$ tal que al multiplicarlos entre sí, dan como resultado la unidad. Por esta razón $\frac{1}{z}$ se llama el recíproco o inverso multiplicativo de z.

Ejemplo 4. Calcular el recíproco de los siguientes números complejos.

a) $z = 1+i$

b) $z = 3-2i$

c) $z = 2+0i$

d) $z = -5i$

Solución: El proceso para encontrar el recíproco de un número complejo es el siguiente:

a) Si $z = 1+i$, entonces su recíproco es

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+i}$$

$$= \frac{1}{1+i} \cdot \frac{(1-i)}{(1-i)}$$

Para no alterar el número multiplicamos por la unidad, expresada como $\frac{1-i}{1-i}$, escogiendo siempre el conjugado del denominador para obtener un denominador real.

$$= \frac{1-i}{(1+i)(1-i)}$$

Efectuamos la multiplicación y como dijimos, no se alteró el número original.

$$= \frac{1-i}{1^2+1^2}$$

La multiplicación de conjugados del denominador dió un número real

$$= \frac{1-i}{2}$$

Se debe procurar que el denominador del resultado quede un número real.

$$\therefore \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,i$$

Este número complejo, es el recíproco de z.

b) Si z = 3-2i, entonces su recíproco es

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3-2i}$$

$$= \frac{1}{3-2i} \cdot \frac{(3+2i)}{(3+2i)}$$

$$= \frac{3+2i}{(3-2i)(3+2i)}$$

$$= \frac{3+2i}{9+4}$$

$$= \frac{3+2i}{13}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{z} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}\,i$$

c) Si $z=2+0i=2$,

Observa que 2 es un número real.

entonces

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2}$ es el recíproco - pues el denominador ya es un número real

d) Si $z = -5i$,

Observa que $-5i$ es - un número imaginario

entonces

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{-5i}$$

$$= \frac{1}{-5i} \cdot \frac{(+5i)}{(+5i)}$$

Multipliquemos $\frac{1}{-5i}$ por la unidad, para que no se altere, - procurando que la - fracción contenga - al conjugado del número z.

$$= \frac{5i}{-25i^2}, \quad \text{puesto que } i^2=-1$$

$$= \frac{5i}{-(-25)}$$

$$= \frac{5i}{25}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{z} = \frac{i}{5}$$

éste es el recíproco - del número complejo -- $z = -5i$

Ahora con todas las propiedades y operaciones que hemos definido, tenemos con los números complejos un nuevo campo que denotaremos con la letra C (mayúscula).

Cabe ahora pensar si acaso existe, para cada complejo, algún o algunos números dentro de C (números complejos), tal que multiplicados por sí mismos (o elevándolos al cuadrado) den el número complejo. En - - otras palabras, verificar la existencia de la raíz - cuadrada de cada número complejo; y ver que dicho número (o números) pertenezcan al campo C.

EJERCICIO II-C-3

1 Efectúa las siguientes multiplicaciones con números complejos.

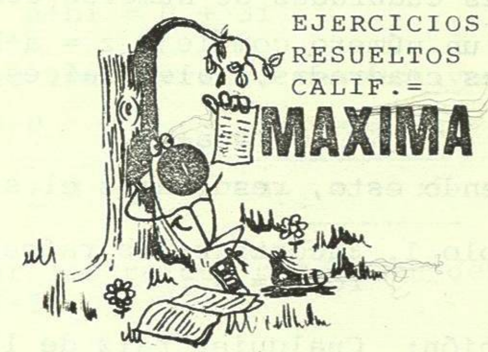
a) (5)(3+2i)

b) (2i)(1+4i)

c) (1+i)(5-3i)

d) (-1-i)(1-i)

e) (3+4i)(3-4i)



2 Encuentra el conjugado de los siguientes números complejos.

a) $5 + 0i$
b) $8i$
c) $3+9i$
d) $-4 -5i$
e) $5 -2i$
f) $-9 -8i$
g) $-3 +0i$
h) $-7i + 2$
i) $-8i$
j) $20i + 5$

3 Encuentra el recíproco de los siguientes números complejos.

a) $5 +0i$
b) $8i$
c) $3 + 9i$
d) $-4 + 5i$
e) $5 -2i$
f) $-9 -8i$
g) $-3+0i$
h) $-7i + 2$
i) $-8i$
j) $20i + 5$

4. Raíces Cuadradas de Números Complejos.

Dado un número complejo $z = a+bi$ encontremos sus raíces cuadradas. Tales raíces r, deben cumplir que

$$r^2 = a+bi$$

Sabiendo esto, resolvamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Encontrar las raíces cuadradas del número $z = 4$

Solución: Cualquier raíz de la forma $z_r = a+bi$ debe cumplir que

$$(a+bi)^2 = 4$$

Si extraemos raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación, entonces

$$a+bi = \pm 2$$

El número real 2 se puede escribir como $2+0i$, similarmente, -2 se puede escribir como $-2+0i$.
Si igualamos las partes reales y las imaginarias, respectivamente, en cada lado de la ecuación, entonces

$$a = \pm 2 \quad y \quad b = 0$$

Las raíces cuadradas son:

$$\underline{z_{r_1} = a+bi = +2} \; ; \; \underline{z_{r_2} = a+bi = -2}$$

Ejemplo 2. Encontrar las raíces cuadradas del número $z = -9$

Solución: Cualquier raíz $z_r = a+bi$ de -9 debe cumplir que:

$$z_r^2 = (a+bi)^2 = -9$$

Si extraemos raíz cuadrada, obtenemos que

$$a+bi = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i$$

es decir

$$a+bi = 0 \pm 3i$$

Igualamos las partes imaginarias, respectivamente,

$$a = 0 \qquad z_{r_1} = +3i$$
$$b = \pm 3 \quad \therefore \quad z_{r_2} = -3i$$

Ejemplo 3. Encontrar las raíces cuadradas del número $z = 4+3i$

Solución: Cualquier raíz cuadrada de z deberá cumplir que

$$(a+bi)^2 = 4+3i$$

En este ejemplo no se puede obtener la raíz cuadrada directamente; lo que se hace es desarrollar el binomio complejo que está elevado al cuadrado, es decir:

$$a^2 + 2abi + b^2 i^2 = 4+3i$$

simplificando y ordenando el miembro izquierdo, tenemos:

$$(a^2 - b^2) + 2abi = 4+3i$$

Ahora igualamos las partes reales e imaginarias, respectivamente, en cada lado de la ecuación, para obtener el siguiente par de ecuaciones:

1) $a^2 - b^2 = 4$ Partes reales

2) $2abi = 3i$ Partes imaginarias

Este es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, el cual puedes resolver por cualquiera de los métodos que ya conoces.

Para simplificar el proceso, podemos encontrar otra ecuación que auxilia y agiliza el problema, de la manera siguiente:

Si tomamos el módulo, en cada miembro, de la expresión

$$(a+bi)^2 = 4+3i$$

tenemos que:

$$|(a+bi)^2| = |4+3i|$$

Puesto que el módulo del cuadrado de un número complejo es igual que el cuadrado de su módulo, podemos escribir que:

$$|a+bi|^2 = |4+3i|$$

ahora, como $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$,

$$(\sqrt{a^2+b^2})^2 = \sqrt{16+9}$$

simplificando operaciones inversas nos queda:

$$a^2+b^2 = \sqrt{25} = 5$$

$$\therefore \quad \underline{a^2+b^2 = 5} \qquad \underline{\text{Ecuación auxiliar}} \quad (3)$$

Sumando las ecuaciones (1) y (3), tenemos que:

$$\begin{array}{r} a^2-b^2 = 4 \\ + \quad a^2+b^2 = 5 \\ \hline 2a^2+0 = 9 \end{array}$$

si despejamos a^2, entonces

$$a^2 = \frac{9}{2}$$

extrayendo la raíz cuadrada en cada miembro, obtenemos:

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$$

y racionalizando el denominador,

$$\therefore \quad a = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Ahora el valor de b, lo obtenemos de la ecuación (2)

$$2abi = 3i,$$

dividiendo entre i, obtenemos

$$2ab = 3\ ;$$

despejando b, se tiene que $b = \frac{3}{2a}$,

substituyendo el valor de $a = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ en la ecuación,

$$b = \frac{3}{2\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$