racionalizando el denominador, tenemos que $b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Haciendo lo mismo para el valor de $a = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, obtenemos a $b = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ Las raíces cuadradas de $z = 4 + 3i$ son:

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad y \quad -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Como vemos, a cada número complejo se le asignan dos raíces cuadradas. Esa es una propiedad especial de los números complejos que se extiende a todas las raíces. Por ejemplo, cualquier número complejo tiene tres raíces cúbicas, cuatro raíces cuartas, cinco raíces quintas, etc. En unidades posteriores te señalaremos un método muy simplificado que sirve para obtener cualquier tipo de raíces de números complejos.

EJERCICIO II-C-4

Encuentra las raíces cuadradas de cada uno de los siguientes números complejos.

a) $z = 9+0i$

b) $z = -9+0i$

c) $z = i$

d) $z = -4i$

e) $z = 1+i$

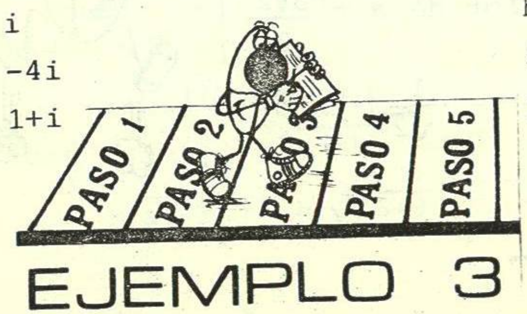
f) $z = 1-i$

g) $z = 4+3i$

h) $z = -4-3i$

i) $z = 4-3i$

j) $z = -4+3i$



D. Solución de Ecuaciones sobre el Campo de los Números Complejos C.

En la introducción de este tema, comenzamos a hablar sobre polinomios reducibles e irreducibles sobre un campo determinado; y llegamos a la conclusión de que de los polinomios sobre los números reales (R) no todos eran reducibles sobre el mismo campo R y que sí lo eran sobre el campo de los números complejos C.

Todos los números reales se pueden expresar como números complejos, pero con la componente imaginaria igual a cero.

Los números complejos provienen de expresiones con radicales cuadráticos que tienen radicandos negativos

Ejemplo 1. Expresar en forma ordinaria el número $\sqrt{-4}$

Solución: El número $\sqrt{-4}$ se puede escribir

$$\begin{aligned}\sqrt{-4} &= \sqrt{-1}\sqrt{4}\\ &= i\sqrt{4}\\ &= 2i\end{aligned}$$

Ejemplo 2. Expresar en forma ordinaria $\sqrt{-9} + \sqrt{25}$

Solución: El número $\sqrt{-9} + \sqrt{25}$ se puede escribir así:

$$\begin{aligned}\sqrt{-9} + \sqrt{25} &= \sqrt{25} + \sqrt{-1}\sqrt{9}\\ &= 5 + 3i\end{aligned}$$

Ejemplo 3. Expresar en forma ordinaria $\sqrt{-25} + \sqrt{-9} - \sqrt{36}$

Solución: La expresión $\sqrt{-25} + \sqrt{-9} - \sqrt{36}$ se escribe como

$$\sqrt{-25} + \sqrt{-9} - \sqrt{36} = \sqrt{-1}\sqrt{25} + \sqrt{-1}\sqrt{9} - \sqrt{36}$$

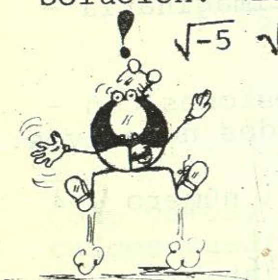
$$= 5i+3i - 6$$

$$= \underline{-6+8i}$$

Ejemplo 4. Expresar en forma ordinaria

$$\sqrt{-5}\cdot\sqrt{-4} + \sqrt{-36}$$

Solución: La expresión $\sqrt{-5}\cdot\sqrt{-4} + \sqrt{-36}$ se escribe



$$\sqrt{-5}\sqrt{-4} + \sqrt{-36} = \sqrt{-1}\sqrt{5}\cdot\sqrt{-1}\sqrt{4} + \sqrt{-1}\sqrt{36}$$

$$= (i\sqrt{5}\cdot i\sqrt{4}) + i\sqrt{36}$$

$$= (\sqrt{5\cdot 4}\; i^2) + 6i$$

$$= \underline{-\sqrt{20} + 6i}$$

Una expresión matemática que posee variables y que está igualada a alguna cantidad constante se le llama ecuación.

Un polinomio igualado a alguna cantidad, es un ejemplo clásico de ecuación. En el caso de una ecuación polinomial, se dice que está sobre C si sus coeficientes pertenecen a C. Sus raíces (o respuestas) estarán también en C.

Ejemplo 5. Resolver la ecuación $z^2+4 = 0$ sobre C.

Solución: Se procede en forma parecida como se hacía con las ecuaciones sobre R.

Se despeja z, de donde

$$z^2 = -4$$

si obtenemos raíz cuadrada en cada miembro, entonces

$$\sqrt{z^2} = \pm\sqrt{-4}$$

$$z = \pm\sqrt{-1}\sqrt{4}$$

$$\therefore\ \underline{z = \pm 2i}$$

La solución pertenece al campo C.

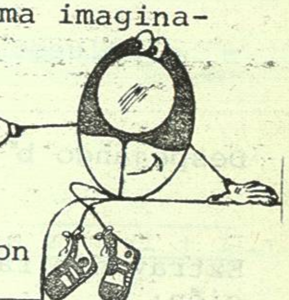
Ejemplo 6. Resolver la ecuación $(z-3)^2 = -16$, sobre el campo C.

Solución: Para resolverla procedamos a extraer raíz cuadrada a cada miembro de la ecuación original.

$$(z-3)^2 = -16$$

$$z-3 = \pm\sqrt{-16}$$

Convirtiendo el miembro derecho a la forma imaginaria nos queda:



$$z-3 = \pm\, i\sqrt{16}$$

$$z-3 = \pm\ 4i$$

$$z = 3 \pm\ 4i$$

Las dos soluciones para dicha ecuación son

$$\underline{z = 3+4i} \quad ; \quad \underline{z_2 = 3-4i}$$

La solución pertenece al campo C

Ejemplo 7. Resolver la ecuación $z^2 = -2i$ sobre C.

Solución: Si $z = a+bi$ es la solución, entonces

$$(a+bi)^2 = -2i$$

desarrollando el binomio complejo elevado al cuadrado, obtenemos

$$a^2-b^2 + 2abi = -2i$$

igualando término a término , partes reales e imaginarias, respectivamente,

$$(a^2-b^2) + 2abi = 0 -2i$$

$$(1)\quad a^2-b^2 = 0$$

$$(2)\quad 2ab = -2$$

Por la ecuación (1) sabemos que si $a^2-b^2 = 0$, entonces

$$a^2 = b^2$$

$$\therefore \quad a = \pm b$$

Substituyendo uno de estos resultados en la ecuación (2), digamos $a = +b$.

$$2ab = -2$$

$$2(b)b = -2$$

$$2b^2 = -2$$

Despejando b^2

$$b^2 = -\frac{2}{2} = -1$$

Extrayendo raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación:

$$b^2 = -1$$

$$\sqrt{b^2} = \sqrt{-1}$$

$$\underline{b = \pm i}$$

En este resultado existe una contradicción, puesto que por definición de número complejo, $\underline{a}$ y $\underline{b}$ deben ser números reales exclusivamente, de donde desechamos esa posible solución a nuestra ecuación.

Ahora, tomamos el otro resultado de la ecuación (1), es decir:

$$a = -b$$

Substituyendo dicho valor en la ecuación (2)

$$2ab = -2$$

$$2(-b)(b) = -2$$

$$-2b^2 = -2$$

Despejando b^2 de la ecuación

$$b^2 = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$b^2 = 1$$

Extrayendo raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación.

$$\sqrt{b^2} = \sqrt{1}$$

$$\underline{b = \pm 1}$$

Este resultado si es válido puesto que, hemos obtenido un número real, satisfaciendo la definición de número complejo.

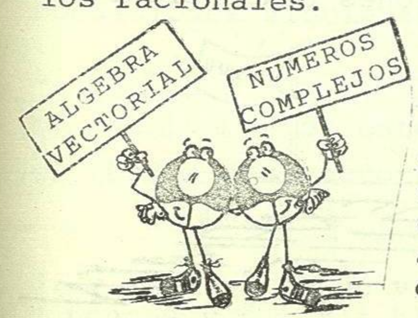
De la ecuación (1) solamente tomamos el resultado $a = -b$

$\therefore$ Si $b = +1$, entonces $a = -1$ y

si $b = -1$, entonces $a = +1$,

Por lo tanto la solución a la ecuación es $\overline{\underline{z_1 = -1 + i}}$ y $\overline{\underline{z_2 = 1-i}}$

El conjunto de los números complejos es un ejemplo de conjunto vectorial sobre el plano de dos ejes (o dimensiones) como ya te habíamos mencionado al principio de este tema. Los números complejos; a su vez, forman un campo (la demostración de ésto se deja para el alumno)* como el de los números reales y los racionales.



Esperamos que hayas captado la analogía tan especial que hay entre los vectores y los números complejos, que a pesar de ser conceptos diferentes y que se crearon en circunstancias muy alejadas entre sí, tienen propiedades que los unen íntimamente.

EJERCICIO II-D

1 Expresa en la forma ordinaria de número complejo las siguientes expresiones con radicales.

a) $\sqrt{4} + \sqrt{-4}$

b) $\sqrt{9} + \sqrt{16} + \sqrt{-9} - \sqrt{-16}$

c) $\sqrt{-36} \cdot \sqrt{-9}$

d) $\sqrt{-8} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{8} \cdot \sqrt{-2}$

e) $\sqrt{-9} - \sqrt{-18} \cdot \sqrt{-2}$

2 Resuelve sobre C las siguientes ecuaciones:

a) $z^2 + 9 = 0$

b) $z^2 - 9 = 0$

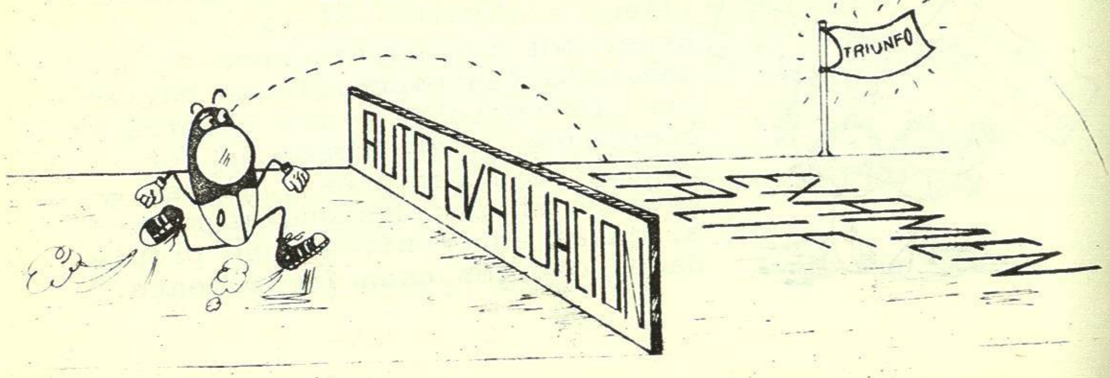
c) $z^2 - 8i = 0$

d) $z^2 - z + 4 = 0$

e) $z^2 + 2z + 8 = 0$

f) $(z-6)^2 = 5$

Sugerencia: Resolver los ejercicios d, e por medio de la fórmula de ecuaciones cuadráticas



RESUMEN

I. El álgebra vectorial.

Cantidad escalar es aquella que puede representarse por un simple número real sobre una recta numérica.

Cantidad vectorial es aquella que para representarse necesita dos o más números reales o componentes.

RXR representa el conjunto de todas las parejas ordenadas (o puntos) que existen en el plano Cartesiano. Cuando el punto inicial de una flecha coincide con el origen (0,0), se dice que la flecha está en posición ordinaria.

Dos parejas ordenadas en RXR, (x,y) y (a,b), son iguales si y sólo si $\underline{x} = a$ y $\underline{y} = b$.

Dadas dos parejas ordenadas (x,y) y (a,b), su adición es $(x,y) + (a,b) = (x+a,\ y+b)$.

Un vector es cualquier pareja ordenada que sea elemento de RXR.

TEOREMA: Si $\vec{s}$, $\vec{t}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ representan vectores y $\vec{s} = \vec{u}$ y $\vec{t} = \vec{v}$, entonces $\vec{s} + \vec{t} = \vec{u} + \vec{v}$.

Si $\vec{v} = (a,b)$ entonces $\|\vec{v}\| = \|(a,b)\| = \sqrt{a^2+b^2}$, siendo a y b números reales.

La norma de todo vector debe satisfacer siempre las condiciones siguientes:

a) $\|\vec{v}\| \geq 0$

b) Si $\|\vec{v}\| = 0$, entonces $\vec{v} = (0,0) = \vec{0}$

c) Dados dos vectores cualesquiera $\vec{v}$ y $\vec{t}$,

$$\|\vec{v} + \vec{t}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{t}\|$$

Si $\vec{v} = (a,b)$ es un vector cualquiera y r un escalar, entonces $r\,\vec{v} = r(a,b) = (ra,\ rb)$.