EJERCICIO II- D

1 Expresa en la forma ordinaria de número complejo las siguientes expresiones con radicales.

a) $\sqrt{4} + \sqrt{-4}$

b) $\sqrt{9} + \sqrt{16} + \sqrt{-9} - \sqrt{-16}$

c) $\sqrt{-36} \cdot \sqrt{-9}$

d) $\sqrt{-8} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{8} \cdot \sqrt{-2}$

e) $\sqrt{-9} - \sqrt{-18} \cdot \sqrt{-2}$

2 Resuelve sobre C las siguientes ecuaciones:

a) $z^2 + 9 = 0$

b) $z^2 - 9 = 0$

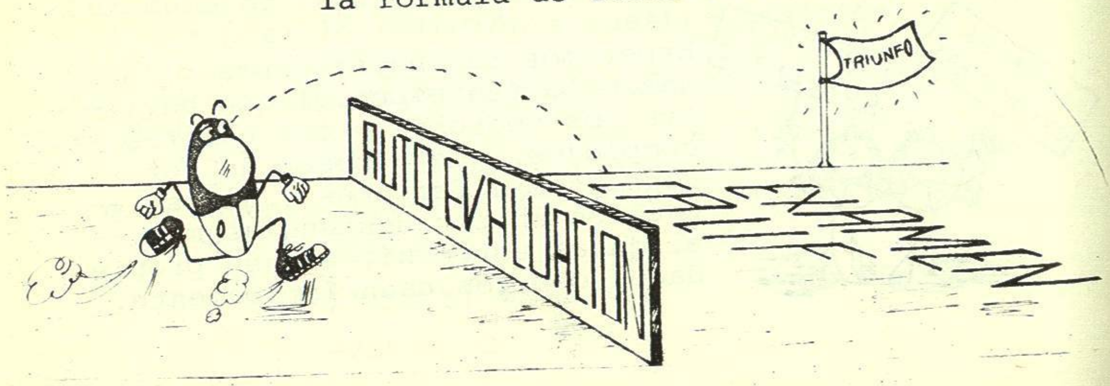
c) $z^2 - 8i = 0$

d) $z^2 - z + 4 = 0$

e) $z^2 + 2z + 8 = 0$

f) $(z-6)^2 = 5$

Sugerencia: Resolver los ejercicios d, e por medio de la fórmula de ecuaciones cuadráticas



RESUMEN

I. El álgebra vectorial.

Cantidad escalar es aquella que puede representarse por un simple número real sobre una recta numérica.

Cantidad vectorial es aquella que para representarse necesita dos o más números reales o componentes.

RXR representa el conjunto de todas las parejas ordenadas (o puntos) que existen en el plano Cartesiano. Cuando el punto inicial de una flecha coincide con el origen (0,0), se dice que la flecha está en posición ordinaria.

Dos parejas ordenadas en RXR, (x,y) y (a,b), son iguales si y sólo si $\underline{x} = a$ y $\underline{y} = b$.

Dadas dos parejas ordenadas (x,y) y (a,b), su adición es $(x,y) + (a,b) = (x+a, y+b)$.

Un vector es cualquier pareja ordenada que sea elemento de RXR.

TEOREMA: Si $\vec{s}$, $\vec{t}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ representan vectores y $\vec{s} = \vec{u}$ y $\vec{t} = \vec{v}$, entonces $\vec{s} + \vec{t} = \vec{u} + \vec{v}$.

Si $\vec{v} = (a,b)$ entonces $\|\vec{v}\| = \|(a,b)\| = \sqrt{a^2+b^2}$, siendo a y b números reales.

La norma de todo vector debe satisfacer siempre las condiciones siguientes:

a) $\|\vec{v}\| \geq 0$

b) Si $\|\vec{v}\| = 0$, entonces $\vec{v} = (0,0) = \vec{0}$

c) Dados dos vectores cualesquiera $\vec{v}$ y $\vec{t}$,

$$\|\vec{v} + \vec{t}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{t}\|$$

Si $\vec{v} = (a,b)$ es un vector cualquiera y r un escalar, entonces $r\,\vec{v} = r(a,b) = (ra, rb)$.

TEOREMA: Si $\vec{v}$ y $\vec{t}$ son respectivamente paralelos a un vector $\vec{u}$, diferente del vector cero, entonces $\vec{v}$ y $\vec{t}$ son vectores paralelos entre sí.

Si $\vec{v} = (v_1, v_2)$ y $\vec{t} = (t_1, t_2)$ son elementos de RXR, entonces el producto interno de $\vec{v}$ y $\vec{t}$ es

$$\vec{v}\cdot\vec{t} = v_1t_1 + v_2t_2$$

Una condición necesaria y suficiente para que dos vectores sean perpendiculares, es que su producto interno sea igual a cero.

TEOREMA: Sean $\vec{t} = (t_1, t_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ dos vectores en RXR. Entonces $\vec{t}$ es paralelo a $\vec{v}$ si y sólo si $\vec{t}$ y $\vec{v}_p$ son vectores perpendiculares, siendo

$$\vec{v}_p = (-v_2, v_1).$$

COROLARIO. $\vec{t} = (t_1, t_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ son vectores paralelos si y sólo si $\vec{t} \cdot \vec{v}_p = -t_1v_2 + t_2v_1 = 0$, donde $\vec{v}_p = (-v_2, v_1)$

A. Un campo numérico es un conjunto cuyos elementos satisfacen ciertas propiedades llamadas "axiomas de campo". Los axiomas de campo son de cuatro clases:

1. Axiomas de Igualdad.
2. Axiomas de la Adición.
3. Axiomas de la Multiplicación.
4. Axioma distributivo de la multiplicación con respecto a la adición.

Como ejemplos de campos numéricos tenemos a los números racionales y los reales. Además están los números complejos.

B. Un polinomio sobre un campo F es reducible sobre F, si es el producto de dos o más polinomios sobre F, ninguno de los cuales es una constante. Inversamente un polinomio que no es reducible sobre F se dice que es irreducible sobre F.

Se le llama "primo" a aquel polinomio irreducible cuyo primer coeficiente es igual a uno.

Los "Modelos de Factorización" o productos notables son:

$$x^2-a^2 = (x-a)(x+a)$$
$$x^3-a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$$
$$x^3+a^3 = (x+a)(x^2-ax+a^2)$$
$$x^2+2ax+a^2 = (x+a)^2$$
$$x^2+(a+b)x+ab = (x+a)(x+b)$$
$$x^3+3ax^2+3a^2x+a^3 = (x+a)^3$$

Se te mostró en dicho tema que para todos los polinomios irreducibles sobre el campo de los números reales existe un campo, más amplio, en el cual dichos polinomios sí son reducibles, éste es el campo de los números complejos.

Un número complejo se representa en dos formas:

a+bi	(a, b)
forma ordinaria	forma rectangular

donde a se denomina la parte real, y b se denomina la parte imaginaria de a+bi.

La unidad de los números imaginarios es i, la cual se define como

$$i = \sqrt{-1}$$

y tiene como característica escencial que:

$$i^2 = -1$$

C) 1. Dados dos números complejos $z_1 = a+bi$ y $z_2=c+di$, $z_1=z_2$ si y sólo si a=c y b=d.

Un número complejo se puede representar en el plano complejo en forma similar a los vectores sobre el plano Cartesiano.

Dados dos números complejos $z_1 = a+bi$ y $z_2 = c+di$, la suma es; $z_1+z_2 = (a+c) + (b+d)i$.

Dado un número $z = a+bi$, tiene un número asignado $-z = -a-bi$; llamado su inverso aditivo tal que la suma da como resultado cero, es decir:

$$z + (-z) = (a=bi) + (-a-bi) = (a-a) + (b-b)i$$

$$= 0+0i = 0$$

2. Valor absoluto, magnitud o módulo de un número complejo es la distancia del punto, que representa las coordenadas del número complejo, al origen, situando al número complejo en el plano complejo. Matemáticamente se le encuentra así:

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

El valor absoluto o módulo, siempre es positivo o cero; nunca negativo.

Dados dos números complejos $a+bi$ y $c+di$, siempre se cumple que

$$|(a+bi) + (c+di)| \leq |a+bi| + |c+di|$$

llamada la desigualdad del triángulo, pues significa que en todo triángulo la magnitud de cualquiera de sus lados siempre va a ser menor que la suma de las magnitudes de los otros lados.

3. Dados dos números complejos $z_1 = a+bi$ y $z_2 = c+di$, el producto de ambos se define así:

$$z_1 z_2 = (ac-bd) + (ad+cb)i$$

El conjugado de un número complejo $z = a+bi$ es

$$\bar{z} = a-bi$$

El recíproco o inverso multiplicativo de un número complejo $z = a+bi$, es

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\,i$$

El producto de un número complejo por su conjugado da un número real como resultado.

$$z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$$

El producto de un número complejo por su recíproco da la unidad como respuesta, es decir:

$$z\left(\frac{1}{z}\right) = (a+bi)\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\,i\right) = 1$$

F) Así sucede con los números reales, los números complejos también tienen raíces cuadradas.

Dado un número $c+di$ cualquiera, elemento de los complejos, existen dos números a_1+b_1i y a_2+b_2i, tal que:

$$(a_1+b_1i)^2 = c+di \quad y \quad (a_2+b_2i)^2 = c+di$$

donde

$$a^2-b^2 + 2abi = c+di$$

de lo cual

$$a^2-b^2 = c \quad y$$

$$2abi = di \quad ó \quad 2ab = d\,;$$

siendo esto válido para ambos números a_1+b_1i y a_2+b_2i, llamados raíces cuadradas de $c+di$