PREPARATORIA ABIERTA

MATEMATICA

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN ABIERTA

$$\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n} \qquad b \neq 0$$

$$(b^m)^n = b^{m \cdot n}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad b \neq 0$$

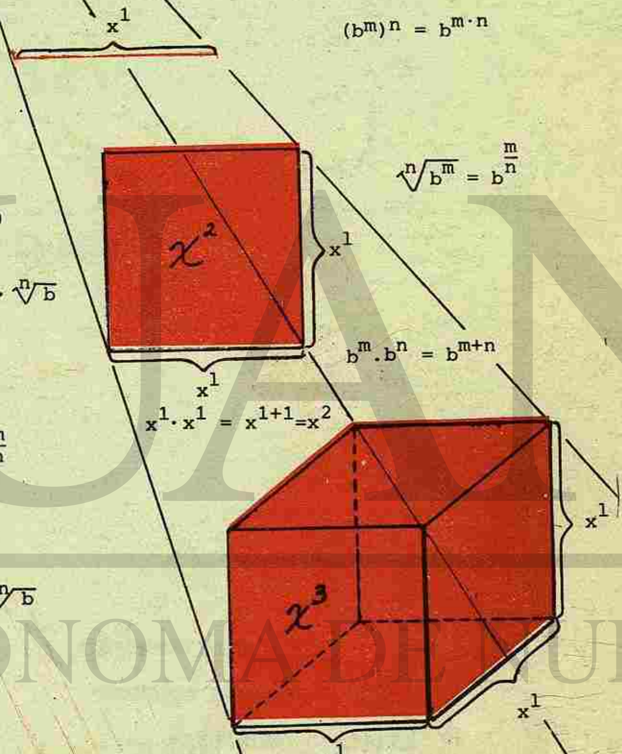
$$\sqrt[n]{b^m} = b^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$b^m . b^n = b^{m+n}$$

$$(b^m)^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[mn]{b}$$



$$x^1 \cdot x^1 = x^{1+1} = x^2$$

$$x^1 . x^1 . x^1 = x^{1+1+1} = x^3$$

$$b^m . b^n . b^p = b^{m+n+p}$$

CUARTA UNIDAD MONTERREY, N.L.

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
DEPARTAMENTO DE EDUCACION ABIERTA

PREPARATORIA
ABIERTA

CUARTA UNIDAD

MATEMATICAS
SEGUNDO SEMESTRE

ING. ALEJANDRO GONZALEZ
ING. JOSE DE J. CHEVAILI
PROFR. ANGEL A. TABOADA N.

Monterrey, N.L. 1977.

16-III-06
Mario

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

Rector: Dr. Luis E. Todd Pérez.

PREPARATORIA No. 3.

Director: Dr. Máximo de León Garza.

DEPARTAMENTO DE EDUCACION ABIERTA.

Coordinación General:

Ing. Joel S. Pérez Sáenz.

Coordinación Administrativa:

Lic. Homero Santos Reyes.

Coordinación Académica:

Lic. María Elena Chapa de Santos.

CUARTA UNIDAD: EXPONENTES Y RADICALES.

OBJETIVOS DE UNIDAD.

El alumno, al terminar la unidad, en el:

TEMA I. EXPONENTES

1. Aplicará las diferentes leyes de los exponentes positivos, cero, negativos y fraccionarios, para simplificar operaciones en ejercicios.

TEMA II. RADICALES

2. Aplicará las leyes de los radicales, en la realización de operaciones.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

El alumno, por escrito en su cuaderno, sin error, en el:

TEMA I. EXPONENTES

1.1 Identificará las leyes de los exponentes positivos, cero y negativos.

1.2 Definirá el concepto de restricción matemática, y cada una de las leyes de los exponentes con sus restricciones.

1.3 Simplificará ejercicios, aplicando las leyes de los exponentes positivos.

1.4 Simplificará operaciones en ejercicios, utilizando las leyes de los exponentes positivos, cero y negativos.

1.5 Identificará exponentes fraccionarios.

1.6 Definirá el término $a^{\frac{1}{n}}$.

1.7 Identificará un radical y las diferentes partes que lo componen.

1.8 Distinguirá cuándo un radical tiene una, dos o ninguna raíz, dentro del conjunto de los números reales.

1.9 Resolverá las operaciones en ejercicios, aplicando las leyes de los exponentes.

TEMA II. RADICALES

2.1 Establecerá la relación existente entre las leyes de los exponentes fraccionarios y las leyes de los radicales.

2.2 Citará los requisitos necesarios para considerar que un radical del tipo $\sqrt[n]{a}$, está completamente simplificado.

2.3 Distinguirá dos procedimientos para simplificar el índice de la raíz.

2.4 Identificará el proceso para introducir al radical, un factor que está fuera de él.

2.5 Resolverá ejercicios, aplicando las leyes de los radicales.

2.6 Identificará la ley de los radicales, en la que se apoya la operación de multiplicar radicales.

2.7 Determinará qué condición tienen que cumplir dos radicales para multiplicarlos y expresar su resultado como un solo radical.

2.8 Enunciará el procedimiento para multiplicar radicales con diferente índice de la raíz.

2.9 Realizará la multiplicación con radicales de igual y diferente índice.

2.10 Identificará la ley que se utiliza para realizar la división de radicales.

2.11 Indicará la condición que tienen que cumplir los radicales, para poder efectuar la división.

2.12 Enunciará el procedimiento de dividir radicales con diferente índice.

2.13 Realizará divisiones de radicales con índices iguales o diferentes, llegando hasta la racionalización, en caso de ser necesario.

2.14 Identificará la propiedad de los números reales, que se utiliza para la adición y sustracción de radicales.

2.15 Enunciará las dos condiciones necesarias para efectuar la adición y sustracción de radicales.

2.16 Definirá el concepto de radicales semejantes.

2.17 Enunciará el procedimiento para realizar la adición y sustracción de radicales, cuando tienen diferente radicando.

2.18 Realizará adiciones y sustracciones de radicales con igual y diferente radicando.

2.19 Definirá el concepto de número imaginario.

2.20 Identificará las partes que forman un número complejo.

2.21 Encontrará la raíz cuadrada de números negativos.

2.22 Identificará números imaginarios.

2.23 Obtendrá raíces imaginarias.

CUARTA UNIDAD

EXPONENTES Y RADICALES.

CONTENIDO

EXPONENTES Y RADICALES

INDICE

EXPONENTES Y RADICALES.

Introducción: Uno de los objetivos en esta unidad es que, después de haberte iniciado ya en las leyes de los exponentes, (en la primera unidad del segundo semestre) llegues a dominarlas totalmente, pues éstas te serán de gran utilidad, cuando estudies temas como: ecuaciones cuadráticas, cúbicas, etc., ecuaciones exponenciales y logarítmicas, principio o ley de inducción matemática, las ecuaciones canónicas de las 4 figuras cónicas - - (es decir, círculo, parábola, hipérbola y elipse). Estas leyes, así como las de los radicales y sus operaciones, también te serán útiles cuando estudies las funciones trigonométricas y sus aplicaciones. Por todo lo anterior, te exhortamos a estudiar con mucho ahínco, esta unidad.

I. EXPONENTES.

A. Exponentes enteros positivos.

Tomando en cuenta que, ya en la primera unidad estudiaste conceptos tales como: coeficiente, base, potencia, exponente, grado, términos semejantes, etc. y que inclusive ya manejaste las leyes de exponentes para la multiplicación y -- división de potencias de bases diferentes de cero y con exponentes enteros positivos; ahora te ampliaremos dichos conceptos, enseñándote algunas leyes nuevas y útiles en la matemática.

Te daremos estas leyes en forma de lista y después te explicaremos las que consideramos que aún no conoces.

Leyes de los exponentes enteros positivos.

Si <u>a</u> y <u>b</u> son números reales, (donde <u>a</u> y <u>b</u> se usarán como bases) - <u>m</u> y <u>n</u> son números enteros positivos, entonces:

LEYES	CONDICIONES O RESTRICCIONES.
1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	
2) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$	
3) $(a^m)^n = a^{mn}$	
4) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$,	si $m>n$ y $a \neq 0$
5) $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$,	si $n>m$ y $a \neq 0$
6) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$,	si $b \neq 0$

B. Exponente cero.

Una extensión de estas leyes, es la siguiente:

$$\boxed{a^0 = 1 \text{ , si } a \neq 0}$$

Observa que la condición o restricción de <u>a</u>, es que ésta <u>no</u> -- valga cero. ¿Por qué?.

En primer lugar, veamos la razón por la cual $a^0 = 1$, para toda $a \in R$ y $a \neq 0$.

Ya vimos antes que $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, si $a \neq 0$, cuando m y n son enteros positivos. Ahora veamos que sucede si <u>m = n</u> :

$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$, pero como $\frac{a^m}{a^m} = 1$, si $a \neq 0$; por transitividad: $\underline{a^0 = 1}$

Veámoslo con un valor numérico para <u>a</u>.

$\frac{10^3}{10^3} = 1$, pues como $10^3 = 1000$, $\frac{1000}{1000} = 1$.

$$\underbrace{\frac{10^3}{10^3}}_{1} = \underbrace{10^{3-3}}_{10^0} \text{ (debido a la ley \#4).}$$

$1 = 10^0 \therefore 10^0 = 1$ (propiedad simétrica).

Ahora veamos porqué en la ley $a^0=1$, la $a \neq 0$: Si tuviéramos la - expresión 0^0, no podríamos adjudicarle un valor numérico específico, puesto que obtendríamos expresiones del tipo $\frac{0^n}{0^n} = \frac{0}{0}$, la cual es una fracción indeterminada. Si de por sí, una fracción que contenga al cero exclusivamente en el denominador, ya es absurda y no se puede definir; con mayor razón será absurdo querer determinar el valor de una fracción del tipo $\frac{0}{0}$ ó 0^0.

Te citaremos algunos errores, en los cuales se incurre generalmente, por no tener presente lo que se llama una <u>restricción matemática</u>, o excepción para una regla o ley matemática. <u>Se llama restricción matemática para una variable, en una expresión, al valor o conjunto de valores para los cuales la expresión no está definida.</u>

Si a un alumno de primaria le preguntaramos ¿Cuál es el resultado de $\frac{0}{0}$? quizás contestaría que $\frac{0}{0} = 1$, porque le han dicho que "toda cantidad o número dividido entre sí mismo es igual a 1", es decir, el sabe que:

$\frac{5}{5} = 1$; $\frac{7}{7} = 1$; $\frac{207}{207} = 1$, etc, etc.

Lo que sucede es que, no se le advirtió que existe una excepción a esa regla, es decir, existe una restricción matemática. En otras palabras, la regla completa es: "Todo número a , excepto 0, dividido entre sí mismo es igual a la unidad", es decir:

$$\boxed{\frac{a}{a} = 1, \text{ si } a \neq 0}$$

Otro error sería, que el alumno contestara que $\frac{0}{0} = 0$, basándose en que, se le dijo en primaria que "el cero dividido por cualquier número, es igual a cero".

El error está en que falta la restricción matemática para el denominador, el cual no debe ser cero, de lo contrario la fracción es indefinida. Es decir, $\boxed{\frac{0}{a} = 0, \text{ si } a \neq 0}$

Algunos errores como los anteriores, están fundamentados en razonamientos equívocos, como los siguientes:

Algunos alumnos que piensan erróneamente que $\frac{0}{0} = 1$, tratan de justificarlo con el siguiente razonamiento mal aplicado:

Si $\frac{0}{0} = 1$, entonces $0=0\times1$; y como $0\times1=0$, por lo tanto $0=0$.

Es necesario enfatizar, que el error comienza desde la hipótesis $\frac{0}{0} = 1$.

Los otros alumnos que, también erróneamente, piensan que $\frac{0}{0} = 0$, hacen también un razonamiento mal aplicado:

Si $\frac{0}{0} = 0$, entonces $0 = 0\times0 \therefore 0=0$

Hay que enfatizar, que el error comienza en la hipótesis $\frac{0}{0} = 0$.

Se enfatizó que las 2 hipótesis son erróneas, para recordarte que la división entre 0 es absurda o indefinida.

C. Exponentes enteros negativos.

Habiendo ya estudiado que $a^0 = 1$, si $a \neq 0$, ahora introduciremos el concepto de una base con exponente negativo.

Basándonos en la primera ley: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, hagamos que $m = -n$, donde n es un entero positivo.

Si $-n$, como un exponente, obedece la primera ley, es necesario que: $a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$, si $a \neq 0$.

Por lo tanto, definimos el concepto a^{-n}, por las igualdades siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} a^{-n} = a^{-n} \cdot \dfrac{a^n}{a^n} = \dfrac{a^0}{a^n} = \dfrac{1}{a^n} \\[2ex] \dfrac{1}{a^{-n}} = \dfrac{1 \cdot a^n}{a^{-n} \cdot a^n} = \dfrac{a^n}{a^0} = \dfrac{a^n}{1} = a^n \end{array}\right\} \text{ si } a \neq 0 \text{ y } n \text{ es entero positivo}$$

Te ilustraremos con algunos ejemplos esta ley:

Ejemplo 1. Simplificar.

$$15ab^{-2} = 15a \cdot \frac{1}{b^2} = \frac{15a \cdot 1}{b^2} = \frac{15a}{b^2}$$

Ejemplo 2. Simplificar.

$$\frac{3}{7}(a \cdot b)^{-1} = \frac{3}{7}\left(\frac{1}{ab}\right) = \frac{3}{7}\,\frac{(1)}{(ab)} = \frac{3}{7ab}$$

Ejemplo 3. Simplificar.

$x^{-1} - y^{-1} = \frac{1}{x^1} - \frac{1}{y^1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy}$, pero nunca confundas con el concepto erróneo de que:

$a^{-1} - b^{-1} = \frac{1}{a-b}$; pues realmente $a^{-1} - b^{-1} \neq \frac{1}{a-b}$

Un concepto semejante al anterior, pero diferente en cuanto a la operación algebraica (multiplicación en lugar de substracción) es:

$$a^{-1}\, b^{-1} = \left(\frac{1}{a^1}\right)\left(\frac{1}{b^1}\right) = \frac{(1)}{(a)}\,\frac{(1)}{(b)} = \frac{1}{ab}$$

Es muy común, que en expresiones que contengan exponentes negativos, se te pida que las expreses sin ellos.

Ejemplo 4. Escribir $\frac{3ab^{-1}}{5c^2d^{-2}}$ sin exponentes negativos.

Solución: $\dfrac{3ab^{-1}}{5c^2d^{-2}} = \dfrac{3a\,\frac{1}{b^1}}{5c^2\,\frac{1}{d^2}} = \dfrac{\frac{3a(1)}{b}}{\frac{5c^2(1)}{d^2}} = \dfrac{\frac{3a}{b}}{\frac{5c^2}{d^2}} = \dfrac{3a \cdot d^2}{5c^2 \cdot b}$

$$\therefore \quad \frac{3ab^{-1}}{5c^2d^{-2}} = \frac{3ad^2}{5bc^2}$$

Ejemplo 5. Simplificar: $(3a)^6 - 3a^0 - (3a)^0$.

Solución: $(3a)^6 - 3a^0 - (3a)^0 = 3^6 \cdot a^6 - 3(1) - (1)$

$$= 729a^6 - 3 - 1$$

$$\therefore (3a)^6 - 3a^0 - (3a)^0 = 729a^6 - 4$$

Es muy importante, que siempre tengas presente 2 leyes de los exponentes, los cuales en cierta forma, se derivan de las 6 leyes fundamentales.

$1^m = 1$, para toda $m \in$ Reales.

$0^m = 0$, solamente si $m > 0$

Ejemplo 6. Simplificar $1^{-13} = 1$; $1^{\frac{2}{7}} = 1$; $1^0 = 1$; $1^7 = 1$; $1^{1000} = 1$

Ejemplo 7. Simplificar $0^1 = 0$; $0^{175} = 0$; $0^{250} = 0$; $0^{1000} = 0$

EJERCICIO

1. Simplifica cada expresión (si es posible) y exprésala de tal forma que no contenga exponentes negativos ni exponentes 0.

a) 2^{-3}

b) 15^0

c) 4^{-3}

d) $(-5)^{-2}$

e) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

f) $3^0 \cdot 3^1$

g) $(4^1)^{-2}$

h) $\frac{2^3}{2^{-2}}$

i) $5b^0$

j) $\frac{3}{7x^0}$

k) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

l) $(-3)^2$

m) $(-18)^0$

n) $(0 \cdot 3)^{-2}$

o) $(7^{-1})^{-2}$

p) 1^7

q) $\frac{2^3}{(-2)^2}$

r) $\frac{7^{-3}}{7^{-5}}$

s) $2 + (10b)^0$

t) $3(x+2y)^0$

Después de resolver los ejercicios anteriores, te ilustraremos con algunos ejemplos, para que estés mejor preparado y resuelvas otros ejercicios menos sencillos, en los cuales, se incluyen varias operaciones al mismo tiempo.

Ejemplo 8. Simplificar $(6b^{-2})^2 \left[3b^7(b^{-5}+4)^{-3}\right]^0$

Solución. Aplicando las leyes de los exponentes tenemos:

Si $\underbrace{(6b^{-2})^2 = 6^2 b^{-4}}_{(ab)^m = a^m \cdot b^m}$ y $\underbrace{\left[3b^7(b^{-5}+4)^{-3}\right]^0 = 1}_{[a]^0 = 1 \text{ si } a \neq 0}$

entonces $(6^2 b^{-4}) \cdot 1 = 36b^{-4} = \frac{36}{b^4}$

$$\therefore (6b^{-2})^2 \left[3b^7 (b^{-5}+4)^{-3}\right]^0 = \frac{36}{b^4}$$

Ejemplo 9. Simplificar $4b^{-3}(-5b)^2 - 4(-5)^2 b^{-1}$

$$= 4\left(\frac{1}{b^3}\right)(-5)^2 b^2 - 4(25) \cdot \frac{1}{b^1}$$

$$= \frac{4}{b^3} \cdot 25b^2 - 100 \cdot \frac{1}{b}$$

$$= 100\left(\frac{b^2}{b^3}\right) - \frac{100}{b}$$

$$= \frac{100}{b} - \frac{100}{b} = 0$$

$$\therefore 4b^{-3}(-5b)^2 - 4(-5)^2 b^{-1} = 0$$

EJERCICIO.

2. Simplifica cada una de las expresiones siguientes:

a) $\frac{6}{(x-y)^6}$

b) $5a^{-1}b^{-2}c^3$

c) $(3a^{-1}b^2)^{-2}$

d) $2(-2)^{-2}$

e) $(-x^{-1})^{-1}$

f) $8^2 \cdot 2^{-5}$

g) $\frac{x^{-2}(-2x)}{3(-x)^{-1}}$

h) $(2^{-2} - 3^{-1})^{-1}$

i) $-(3^{-1}-b)^{-1}$

j) $(5b^{-1})^2 \left[2b^5(b^{-3}+2)^{-2}\right]^0$

k) $1-(n-1)^{-1} + (n+1)^{-1}$

l) $(3b)^{-1}(5a^{-1})^0 - 3b^{-1}$

m) $2b^{-3}(-3b)^2 - 2(-3)^2 b^{-1}$

n) $\frac{x-y^{-1}}{(x-y)^{-1}}$

o) $(2)^3(a)^{-4}(17)^0$

p) $(3a^{-1}b^{2})^{2}$

q) $\dfrac{-1}{(-1)^{-1}}$

r) $(-x^{-1})^{2}$

s) $\dfrac{5x^{-2}}{x^{-3}}$

t) $\dfrac{(5x^{-2})^{0}}{5(-x)^{0}}$

D. Exponentes fraccionarios.

Entre las leyes de los exponentes, además de los exponentes enteros positivos, cero y enteros negativos, tenemos también exponentes fraccionarios, es decir exponentes en forma de cocientes, tales como:

$$8^{\frac{5}{3}},\ x^{\frac{3}{4}},\ 27^{\frac{1}{3}},\ 4^{\frac{3}{2}},\ \text{etc.}$$

Para lograr una mejor comprensión de este tema, recordemos algunos elementos básicos de la raíz cuadrada, cúbica, cuarta, etc., de un número, en donde sabemos que el cuadrado, cubo, cuarta potencia etc., de un número real, lo obtenemos multiplicando el número por sí mismo, cuantas veces indique el exponente; también sabemos que la potencia de un número real, es el producto de factores iguales a dicho número, así pues:

$2^{2} = 2^{1}\cdot 2^{1}$; $3^{3} = 3^{1}\cdot 3^{1}\cdot 3^{1}$; $4^{4} = 4^{1}\cdot 4^{1}\cdot 4^{1}\cdot 4^{1}$

(nótese que los factores tienen exponente uno)

Ahora bien, consideremos la ecuación:

$a^{?}\cdot a^{?}\cdot a^{?} = a^{1}$; ($a$ es un número real),

en donde a^{1} es el producto de 3 factores iguales, es decir:

$$(a^{?})^{3} = a^{1}$$

¿Qué valor debe substituir al signo de interrogación, para que la ecuación se cumpla?

Recordando las leyes de los exponentes, mencionados en el tema I-A, tenemos que si:

$(a^{m})^{n} = a^{mn}$; entonces, $(a^{\frac{1}{m}})^{m} = a^{m\cdot\frac{1}{m}} = a^{\frac{m}{m}} = a^{1}$

Por lo tanto, el valor de "?" debe ser $\frac{1}{3}$, así:

$\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{3} = a^{\frac{3}{3}} = a^{1}$. Esto se hace extensivo para cualquier número real con un exponente $\frac{1}{n}$; (n debe ser entero positivo).

Tratando de llegar a una síntesis de lo expuesto, nos preguntamos ¿Existe un número real tal, que al elevarse a la n-ésima potencia, nos dé a? La respuesta es sí. $(\sqrt[n]{a})^{n} = a$, (donde $a \geq 0$)

El término $a^{\frac{1}{n}}$ se define pues como la raíz n-ésima de a y se escribe $\sqrt[n]{a^{1}}$

$\sqrt[n]{a^{1}}$ → A toda la expresión le llamamos radical

Las partes de un radical son:

índice de la raíz ← $\sqrt[n]{a^{1}}$ → exponente
→ radicando

Con esto vemos que se extiende el número de operaciones inversas en matemática. Decimos por ejemplo, que la operación inversa: de la adición, es la sustracción,

operaciones inversas

$5 + 5 - 5 = 5$

de la multiplicación, es la división,

operaciones inversas

$5 \times 5 \div 5 = 5$

de elevar un número a una potencia, es extraer su raíz,

operaciones inversas

si $x = 5$, $(\sqrt[3]{x^{3}}) = 5$

porque una operación anula lo que hace la otra.

Al inicio del tema, decíamos que para lograr una mejor comprensión de los exponentes fraccionarios, recordaríamos algunos elementos de las raíces; pues bien, la ayuda que las raíces nos prestan, de acuerdo a la siguiente definición:

Si e representa un número entero, i un número entero positivo y R un número entero real positivo, entonces: $R^{\frac{e}{i}} = \sqrt[i]{R^{e}}$

es que en muchas ocasiones, obtendremos como resultado un número real, más claro y simple que el término con exponente fraccionario.

Por ejemplo:

FORMA EXPONENCIAL		FORMA RADICAL						
$9^{\frac{1}{2}}$	=	$\sqrt[2]{9}$	=	$\left(\sqrt{(3)^2}\right)^1$	=	3^1	=	$\underline{3}$
$8^{\frac{5}{3}}$	=	$\sqrt[3]{8^5}$	=	$\left(\sqrt[3]{(2)^3}\right)^5$	=	2^5	=	$\underline{32}$
$27^{\frac{4}{3}}$	=	$\sqrt[3]{27^4}$	=	$\left(\sqrt[3]{(3)^3}\right)^4$	=	3^4	=	$\underline{81}$
$3125^{\frac{2}{5}}$	=	$\sqrt[5]{3125^2}$	=	$\left(\sqrt[5]{(5)^5}\right)^2$	=	5^2	=	$\underline{25}$

cuando el índice es 2, generalmente no se escribe.

resultados más claros y simples.

Observa que el numerador de la fracción indica la potencia a la que debe elevarse R; y que el denominador indica el índice de la raíz.

Es importante antes de continuar, precisar que estamos trabajando con el <u>conjunto de los números reales</u>, especialmente al considerar las raíces de los radicales. De acuerdo a esto, analicemos 3 posibilidades.

a) Todo número positivo tiene dos raíces reales cuando su índice es dos, una es positiva y la otra es negativa. Por ejemplo:

$$\sqrt{16} = \begin{cases} +4 & \text{porque } (4)(4) = 16 \\ -4 & \text{porque } (-4)(-4) = 16 \end{cases}$$

A la raíz positiva la llamamos <u>raíz principal</u>.

b) Un número positivo o negativo tiene nada más una sola raíz, cuando su índice es impar, siendo el signo de la raíz igual al signo del número. Por ejemplo:

$\sqrt[3]{8} = 2$ porque $(2)(2)(2) = 8$

$\sqrt[5]{-1024} = -4$ porque $(-4)(-4)(-4)(-4)(-4) = -1024$

c) Un número negativo no tiene raíz enésima real si su índice <u>n</u> es número par. Por ejemplo:

$\sqrt{-4}$ = su raíz no está definida, en los números reales porque no existen dos números reales iguales cuyo producto sea -4.

$\sqrt[4]{-25}$ = tampoco existe su raíz en el conjunto de los números reales.

Volviendo a las leyes de los exponentes, analicemos el término $a^{\frac{m}{n}}$, (<u>a</u> es número real y $n \neq 0$) que puede tener 2 opciones para -- expresarse:

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{o}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

según esto, ejemplifiquemos:

$$36^{\frac{3}{2}} = \left(36^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \left(\sqrt{36}\right)^3 = 6^3 = 216 \quad \text{o}$$

$$36^{\frac{3}{2}} = \left(36^3\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{46,656} = 216.$$

Como podemos observar, en el primer ejemplo trabajamos con números más pequeños, por lo que en general, al estar operando con exponentes fraccionarios, conviene, en cuanto sea posible, <u>sacar una raíz, antes que elevar a una potencia</u>.

Ahora pondremos en práctica los conocimientos adquiridos sobre exponentes positivos, negativos, cero, así como fraccionarios, para solucionar ejercicios que incluyen estos tipos de exponentes. Al obtener la respuesta de cualquier <u>expresión exponencial</u> (expresión que contiene un exponente), consideremos que en general es mejor tener exponentes positivos que negativos y que cuando un exponente fraccionario puede expresarse en forma más simple y clara al transformarlo con raíces, es conveniente hacerlo. Cabe hacer notar que las leyes que se dieron <u>para los exponentes positivos, se aplican en general para los exponentes fraccionarios</u>; por ejemplo la aplicación de algunas de estas leyes, serían:

$$(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \; b^{\frac{m}{n}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$$

Ejemplo 1. Escribir una expresión equivalente en forma radical.

$$15^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{15^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

Ejemplo 2. Idem.

$$3^{\frac{2}{3}} \cdot c^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[3]{c}$$

$$= \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{c}$$

$$= \sqrt[3]{9c}$$

Ejemplo 3. Dar una expresión equivalente en forma exponencial.

$$\sqrt[5]{x^2}\,\sqrt{y^5} = x^{\frac{2}{5}} \cdot y^{\frac{5}{2}}$$

Ejemplo 4. Idem.

$$\sqrt{a^2 + b^2} = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$$

Ejemplo 5. Encontrar el valor numérico más simple.

$$(5^2 + 12^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(5^2 + 12^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5^2 + 12^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{25+144}} = \frac{1}{\sqrt{169}} = \frac{1}{\pm 13}$$

Ejemplo 6. Idem.

$$(5^2 \cdot 4^2)^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{2}{2}} \cdot 4^{\frac{2}{2}} = 5^1 \cdot 4^1 = 20$$

Ejemplo 7. Efectuar las operaciones indicadas y simplificar, dejando las respuestas sin exponentes cero, negativos o fraccionarios.

$$\frac{2^0 m}{m^{\frac{1}{2}}} = 1 \cdot m^{1-\frac{1}{2}} = m^{\frac{1}{2}} = \sqrt{m}$$

Ejemplo 8. Idem.

$$\left(\frac{-27}{a^6 b^6}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{(-27)^{\frac{1}{3}}}{a^{(6)(-\frac{1}{3})}\, b^{(6)(-\frac{1}{3})}}$$

$$= \frac{a^{\frac{6}{3}}\, b^{\frac{6}{3}}}{(-27)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{a^2 b^2}{\sqrt[3]{-27}} = \frac{a^2 b^2}{-3}$$

Ejemplo 9. Idem.

$$(6^2 - 3^2)^{\frac{1}{3}} = (36-9)^{\frac{1}{3}}$$

$$= (27)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \sqrt[3]{27} = 3$$

Ejemplo 10. Idem.

$$\frac{4a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}} b^{-\frac{1}{2}}} = \frac{4b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}} = \frac{4\sqrt{b}}{a^{\frac{2}{2}}} = \frac{4\sqrt{b}}{a}$$

EJERCICIO

1. Escribe una expresión equivalente en forma radical.

a) $4^{\frac{1}{3}}$

b) $x^{\frac{2}{5}}$

c) $16^{-\frac{1}{3}}$

d) $4a^{\frac{2}{3}}$

e) $3x^{\frac{3}{4}}$

f) $7b^{\frac{3}{7}}$

g) $(7b)^{\frac{3}{7}}$

h) $\dfrac{1}{(2x)^{-\frac{1}{3}}}$

2. Escribe una expresión equivalente en forma exponencial.

a) $\sqrt{3x}$

b) $\sqrt[3]{8^2}$

c) $\sqrt[3]{27a^3}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{49x}}$

e) $4\sqrt[3]{5xy^2}$

f) $\sqrt[3]{a+b}$

g) $\sqrt[5]{32a^{10}b^{10}}$

h) $\sqrt[10]{(x+y)^5\, z^4}$

3. Encuentra el valor numérico más simple.

a) $9^{\frac{1}{2}}$

b) $343^{\frac{2}{3}}$

c) $25^{\frac{3}{2}}$

d) $16^{-\frac{3}{4}}$

e) $(-27)^{\frac{2}{3}}$

f) $81^{-\frac{3}{4}}$

g) $64^{\frac{3}{2}}$

h) $32^{-\frac{2}{5}}$

i) $\left(8^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot 2^0$

j) $(5^2 - 4^2)^{\frac{1}{2}}$

4. Efectúa las operaciones indicadas y simplifica, dejando las respuestas sin exponente cero, negativo o fraccionario.

a) $\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^3$

b) $(4a^2 b^0)^{\frac{1}{2}}$

c) $x^{-2} \cdot x^{\frac{2}{3}}$

d) $\left(\dfrac{b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}}}\right)^2$

e) $\left(y^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{4}}\right)^{-1}$

f) $\left(\dfrac{125a^6}{27b^{-3}}\right)^{-\frac{1}{3}}$

g) $\dfrac{2a^2}{a} + \dfrac{3}{a^{-1}}$ i) $\dfrac{(ab)^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}$

h) $\left(2a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}c\right)^3$ j) $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^0$

II. RADICALES.

A. Leyes de los radicales.

Con frecuencia, una expresión algebraica expresada en forma radical, es conveniente o necesario cambiarla por otra expresión que resulte ser más simple o útil. Para lograr esto, utilizaremos las leyes de los radicales, que no son otra cosa más que una transformación de las leyes de los exponentes.

Veamos más detalladamente estas leyes, que podemos reducirlas a cuatro. En cuanto a los radicandos, recordemos que a y b son números reales y que $n \in N$; ningún radicando es negativo si n es par.

Leyes de los exponentes fraccionarios.	$\longrightarrow$ Leyes de los radicales.
$\left(a^n\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n$	$\sqrt[n]{a^n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n$, $(a \geq 0)$
$a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
$\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}}$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
$\dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$, $(b \neq 0)$	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, $b \neq 0)$

Estas leyes o propiedades de los radicales, las usaremos para la simplificación de radicales.

Consideramos que un radical del tipo $\sqrt[n]{a}$ está en forma simplificada, cuando:

1) El radicando no contiene factores a la n-ésima potencia.

2) El radicando no contiene fracciones.

3) El índice de la raíz es el mínimo entero posible.

De acuerdo a esto, la simplificación de radicales podemos reducirla a tres casos:

a) Factorización del radicando.

b) Racionalización del denominador.

c) Simplificación del índice.

Analicemos cada caso en particular:

a) Factorización del radicando.

Como el título dice, el proceso a seguir es factorizar el radicando.

Ejemplo 1. Factorizar el radicando.

$\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5}$; aplicando una de las propiedades de los radicales, tenemos que:

$$\sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}.$$

En el proceso de factorizar el radical, hay que tener muy en cuenta el índice enésimo de la raíz, para poder sacar equis factor a su raíz enésima, como coeficiente del radical. Por ejemplo, en el radical $\sqrt[5]{32a^7} = \sqrt[5]{32a^5(a^2)}$, donde $32a^5$ es un factor que tiene raíz quinta exacta, ésta es $2a$, por lo que al radical conviene factorizarlo así:

$$\sqrt[5]{32a^7} = \sqrt[5]{32a^5 \cdot a^2} = 2a\sqrt[5]{a^2}$$

Ejemplo 2. Expresar el radical $\sqrt{54x^3y}$ en su forma más simple.

$$\sqrt{54x^3y} = \sqrt{9x^2 \cdot 6xy} = \sqrt{9x^2} \cdot \sqrt{6xy} = 3x\sqrt{6xy}$$

b) Racionalización del denominador.

Para eliminar las fracciones del radicando, se multiplican numerador y denominador por el mínimo número que tenga la propiedad de transformar el denominador en una potencia n-ésima perfecta.

Ejemplo 1. Cambiar $\sqrt{\frac{3}{4}}$ a una forma que no tenga fracción bajo el radical.

$$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} \cdot \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 3}}{4} = \frac{2}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Ejemplo 2. Idem $\sqrt{\frac{3a}{8b}}$

$$\sqrt{\frac{3a^3}{8b}} = \frac{\sqrt{3a^3}}{\sqrt{8b}} \cdot \frac{\sqrt{2b}}{\sqrt{2b}} = \frac{\sqrt{6a^3b}}{\sqrt{16b^2}} = \frac{\sqrt{6aba^2}}{\sqrt{16b^2}} = \frac{a}{4b}\sqrt{6ab}$$

Ejemplo 3. Racionalizar el denominador.

de $\frac{2+\sqrt{7}}{5-\sqrt{7}}$; Se multiplican el numerador y el denominador por el conjugado del denominador $5+\sqrt{7}$, dado que esto nos da una diferencia de dos cuadrados y así se-simplifica y racionaliza el denominador.

$$\frac{2+\sqrt{7}}{5-\sqrt{7}} = \frac{(2+\sqrt{7})(5+\sqrt{7})}{(5-\sqrt{7})(5+\sqrt{7})} = \frac{10 + 7\sqrt{7} + 7}{5^2 - (\sqrt{7})^2}$$

$$= \frac{17 + 7\sqrt{7}}{25 - 7}$$

$$= \frac{17 + 7\sqrt{7}}{18}$$

c). Simplificación del índice de la raíz del radical.

Una última condición para considerar que el radical está completamente simplificado, es que el índice sea el mínimo entero posible.

Ejemplo 1. Expresar el radical $\sqrt[8]{9}$ en su forma más simple.

$$\sqrt[8]{9} = \sqrt[4\cdot 2]{9} = \sqrt[4]{\sqrt{9}} = \sqrt[4]{3}$$

Ejemplo 2. Expresar el radical $\sqrt[6]{81x^4}$ en su forma más simple.

$$\sqrt[6]{81x^4} = \sqrt[3\cdot 2]{81x^4} = \sqrt[3]{\sqrt{81x^4}} = \sqrt[3]{9x^2}$$

Como puedes observar, la simplificación del índice de la raíz -- puede llevarse a cabo, cuando hay posibilidad de factorizar dicho índice en factores mayores que uno.

Otra forma de simplificar el índice de la raíz del radical, es -- convertir dicho radical a una expresión con exponente fracciona-- rio, simplificarlo y luego transformarlo de nuevo a radical.

Ejemplo 3. Expresar el radical $\sqrt[12]{x^2y^4z^8}$ en su forma más simple.

$$\sqrt[12]{x^2y^4z^8} = x^{\frac{2}{12}}y^{\frac{4}{12}}z^{\frac{8}{12}}$$

$$= x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{2}{6}}z^{\frac{4}{6}}$$

$$= \sqrt[6]{x\,y^2z^4}$$

Como complemento de este tema, veremos un último punto que será de mucha importancia en álgebra y trigonometría, y que está relacionado desde luego con los radicales. Nos referimos al hecho de "introducir un factor que está fuera del radical, dentro del radical"

La forma de realizar este proceso es elevar a la potencia n-ésima del radical, el coeficiente o término exterior del radical, e introducirlo dentro de él como factor.

Ejemplo 1. Introducir el coeficiente, elevado a la potencia apropiada, al radical.

$$2a\sqrt{3b} = \sqrt{3b\cdot 4a^2} = \sqrt{12a^2b}$$

Ejemplo 2. Idem.

$$2x\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^3}} = \sqrt[3]{8x^3\left(1 - \frac{1}{x^3}\right)}$$

$$= \sqrt[3]{8x^3-8}$$

EJERCICIO

1. Expresa cada radical en su forma más simple.

a) $\sqrt{50}$

b) $\sqrt[3]{16}$

c) $\sqrt{\frac{5}{21}}$

d) $\sqrt{\frac{12xy^2}{100}}$

e) $\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$

f) $\sqrt{\frac{8ab^2}{25}}$

g) $\sqrt[4]{9}$

h) $\sqrt[3]{2^6}$

i) $\sqrt{\frac{75}{27}}$

j) $\sqrt[6]{8x^6y^9}$

k) $\sqrt[4]{\frac{64a^6}{25}}$

l) $\sqrt[3]{\frac{2}{9x}}$

m) $\sqrt[4]{49x^2}$

n) $\sqrt[6]{27a^3b^9}$

o) $\sqrt[4]{a^2-2ay+y^2}$

p) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$

2. Introduce al radical, el factor que está fuera de él.

a) $4\sqrt{3}$

b) $3x\sqrt{2y}$

c) $\frac{3}{4}\sqrt{2ab^2}$

d) $3x\sqrt{\frac{4-x}{9x^2}}$

e) $2\sqrt[3]{4}$

f) $\frac{1}{2b}\sqrt{18a^3b}$

g) $2\sqrt[4]{y}$

h) $5a\sqrt{\frac{1}{25}-\frac{1}{a^2}}$

B. Multiplicación de radicales.

Apoyados en la ley $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

Realicemos la multiplicación de radicales.

Es importante hacerte notar que son iguales los índices de las raíces que se multiplican y además iguales al índice de la raíz resultante.

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$ mismo índice de la raíz.

Dicho de otra manera, la condición para multiplicar radicales y expresar el resultado como un solo radical, es que tengan un mismo índice de la raíz.

Ejemplo 1. Efectuar la operación indicada $\sqrt{2a}\cdot\sqrt{7b}$ y simplificar.

$$\sqrt{2a}\cdot\sqrt{7b}=\sqrt{2a\cdot 7b}$$

$$\therefore\ \sqrt{2a}\cdot\sqrt{7b}=\sqrt{14ab}$$

Ejemplo 2. Idem $\sqrt[3]{3ac}\cdot\sqrt[3]{5a^2}$

$$\sqrt[3]{3ac}\cdot\sqrt[3]{5a^2}=\sqrt[3]{(3ac)(5a^2)}$$

$$=\sqrt[3]{15a^3c}$$

$$\therefore\ \sqrt[3]{3ac}\cdot\sqrt[3]{5a^2}=a\sqrt[3]{15c}$$

Ejemplo 3. Idem $7w\sqrt[4]{3w}\cdot\sqrt[4]{4m}$

$$7w\sqrt[4]{3w}\cdot\sqrt[4]{4m}=7w\sqrt[4]{(3w)(4m)}$$

$$\therefore\ 7w\sqrt[4]{3w}\cdot\sqrt[4]{4m}=7w\sqrt[4]{12wm}$$

Ejemplo 4. Idem. $3s\sqrt{2t}\cdot 5t\sqrt{2s}$

$$3s\sqrt{2t}\cdot 5t\sqrt{2s}=3s\cdot 5t\sqrt{(2t)(2s)}$$

$$=15st\sqrt{4st}$$

$$=15st(2)\sqrt{st}$$

$$\therefore\ 3s\sqrt{2t}\cdot 5t\sqrt{2s}=30st\sqrt{st}$$

En caso de que haya diferentes índices de la raíz, debes proceder como lo muestran los ejemplos siguientes:

Ejemplo 1. Multiplicar los radicales $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{b}$ diferente índice de la raíz.

Como primer paso, representaremos cada radical, por una expresión exponencial equivalente:

$$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{b}=(a)^{\frac{1}{3}}(b)^{\frac{1}{2}}$$

y tratamos cada exponente fraccionario, de tal manera que consigamos que sus denominadores sean iguales:

$$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[2]{b}=a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{2}}$$

$$=(a)^{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}}(b)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3}}$$

$$=a^{\frac{2}{6}}\,b^{\frac{3}{6}}$$

al formar el exponente fraccionario, el índice de la raíz viene a ser el denominador y el exponente del radicando es el numerador.

Ahora, pasando de estas nuevas expresiones exponenciales a radicales, tenemos:

$$=\sqrt[6]{a^2}\cdot\sqrt[6]{b^3}$$

como puedes observar, en el miembro derecho de la igualdad, se ha cumplido con la condición de tener un mismo índice de la raíz; por lo que se procede a realizar la operación indicada.

$$=\sqrt[6]{a^2}\cdot\sqrt[6]{b^3}$$

$$\therefore\ \sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt[6]{a^2b^3}$$

Ejemplo 2. Realizar la operación $\sqrt[4]{2b^2}\cdot\sqrt[5]{3b}$

Forma exponencial:

$$\sqrt[4]{2b^2}\cdot\sqrt[5]{3b} = (2b^2)^{\frac{1}{4}}(3b)^{\frac{1}{5}}$$

$$= (2b^2)^{\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{5}}(3b)^{\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{4}}$$

$$= (2b^2)^{\frac{5}{20}}(3b)^{\frac{4}{20}}$$

Forma radical:

$$= \sqrt[20]{(2b^2)^5}\cdot\sqrt[20]{(3b)^4}$$

$$= \sqrt[20]{32b^{10}}\cdot\sqrt[20]{81b^4}$$

$$= \sqrt[20]{(32b^{10})(81b^4)}$$

$$\therefore \quad \sqrt[4]{2b^2}\cdot\sqrt[5]{3b} = \sqrt[20]{2592b^{14}}$$

Ejemplo 3. Realizar la operación $\sqrt{7w^3}\cdot\sqrt[3]{3t^2}$

$$\sqrt{7w^3}\cdot\sqrt[3]{3t^2} = (7w^3)^{\frac{1}{2}}(3t^2)^{\frac{1}{3}}$$

$$= (7w^3)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3}}(3t^2)^{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}}$$

$$= (7w^3)^{\frac{3}{6}}(3t^2)^{\frac{2}{6}}$$

$$= \sqrt[6]{(7w^3)^3}\cdot\sqrt[6]{(3t^2)^2}$$

$$= \sqrt[6]{343w^9}\cdot\sqrt[6]{9t^4}$$

$$= \sqrt[6]{(343w^9)(9t^4)}$$

$$\therefore \quad \sqrt{7w^3}\cdot\sqrt[3]{3t^2} = \sqrt[6]{3087w^9t^4}$$

Los siguientes ejemplos, te ilustran la forma de proceder cuando haya que multiplicar polinomios que contengan radicales.

Ejemplo 1. Realizar la operación $\sqrt{3}\,(\sqrt{2}-\sqrt{5})$

$$\sqrt{3}\,(\sqrt{2}-\sqrt{5}) = \sqrt{3}\cdot\sqrt{2} - \sqrt{3}\cdot\sqrt{5} \quad \text{(propiedad distributiva)}$$

$$\sqrt{3}\,(\sqrt{2}-\sqrt{5}) = \sqrt{6} - \sqrt{15}$$

Ejemplo 2. Realizar la operación $(\sqrt{a}-1)(\sqrt{b}+2)$

$$(\sqrt{a}-1)(\sqrt{b}+2) = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+2\sqrt{a}-1\sqrt{b}-2$$

$$(\sqrt{a}-1)(\sqrt{b}+2) = \sqrt{ab}+2\sqrt{a}-\sqrt{b}-2$$

Ejemplo 3. Realizar la operación $\sqrt{7}(\sqrt[3]{3}-\sqrt{5})$

$$\sqrt{7}(\sqrt[3]{3}-\sqrt{5}) = \sqrt{7}\cdot\sqrt[3]{3} - \sqrt{7}\cdot\sqrt{5} \longrightarrow$$

Los radicales $\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}$ se expresan directamente en forma de un solo radical $\sqrt{35}$, porque tienen el mismo índice de la raíz.

$$= 7^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{3}} - \sqrt{(7)(5)}$$

$$= 7^{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3}}3^{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}} - \sqrt{35}$$

$$= 7^{\frac{3}{6}}\cdot 3^{\frac{2}{6}} - \sqrt{35}$$

$$= \sqrt[6]{7^3}\cdot\sqrt[6]{3^2} - \sqrt{35}$$

$$= \sqrt[6]{343}\cdot\sqrt[6]{9} - \sqrt{35}$$

$$= \sqrt[6]{(343)(9)} - \sqrt{35}$$

$$\sqrt{7}(\sqrt[3]{3}-\sqrt{5}) = \sqrt[6]{3087} - \sqrt{35}$$

Ejemplo 4. Realizar la operación $(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

Desarrollamos como binomios conjugados

$$(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = \sqrt{2}^2 - \sqrt{3}^2$$

$$= 2 - 3$$

$$(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = -1$$

EJERCICIO

1. Efectúa la operación indicada y expresa el resultado en su forma más simple.

a) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}$

b) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{10}$

c) $5\sqrt{6}\cdot\sqrt{8}$

d) $6\sqrt{2x}\cdot\sqrt{3y}$

e) $\sqrt{5zt}\cdot\sqrt{3z}$

f) $\frac{2}{5}\sqrt{15}\cdot\sqrt{15}$

g) $\frac{2}{9}\sqrt{13}\cdot\frac{7}{3}\sqrt{13}$

h) $\sqrt[3]{3m} \cdot \sqrt[3]{7q}$

i) $4\sqrt[4]{4xy^3} \cdot \sqrt[4]{64x^3y}$

j) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{2xw} \cdot \frac{1}{2}\sqrt[3]{4x^2}$

k) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{5}$

l) $3\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[4]{9}$

m) $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{5}$

n) $\sqrt[5]{5} \cdot \sqrt[3]{7}$

o) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{3}$

p) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}$

q) $\sqrt[3]{x^2y} \cdot \sqrt[4]{w}$

r) $\sqrt[3]{st^2} \cdot \sqrt{t^2w}$

s) $4m\sqrt[3]{u} \cdot \sqrt[4]{t}$

t) $\frac{2m}{5}\sqrt[4]{6m} \cdot \sqrt{2m}$

2. Realiza las siguientes multiplicaciones de polinomios con radicales.

a) $\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{5})$

b) $\sqrt{7}(\sqrt{7} - \sqrt[3]{4})$

c) $\sqrt[4]{2}(3 - \sqrt[3]{4})$

d) $\sqrt[3]{4}(\sqrt{7} - \sqrt[4]{6})$

e) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$

f) $(\sqrt{3a} - \sqrt{3b})^2$

g) $(a - \sqrt{3b})(a + \sqrt{3b})$

h) $(3\sqrt{7a} - \sqrt[3]{b})^2$

i) $(\sqrt[4]{u} - \sqrt[3]{t})^2$

j) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^3$

C. División de radicales.

Recurriendo a la ley $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$,

se realiza la división de radicales.

Al igual que en la operación de multiplicar, se requiere en la -- división que los índices de las raíces respectivas del numerador y denominador sean iguales al índice de la raíz, en el radical - resultante

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$ mismo índice de la raíz.

Ejemplo 1. Efectuar la operación $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}}$

$$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{9}{3}}$$

$$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Ejemplo 2. Efectuar la operación $\frac{\sqrt[3]{27a^2b}}{\sqrt[3]{9b}}$

$$\frac{\sqrt[3]{27a^2b}}{\sqrt[3]{9b}} = \sqrt[3]{\frac{27a^2b}{9b}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{27a^2b}}{\sqrt[3]{9b}} = \sqrt[3]{3a^2}$$

Ejemplo 3. Realizar la operación $\frac{2s\sqrt[4]{8t^2}}{\sqrt[4]{2t}}$

$$\frac{2s\sqrt[4]{8t^2}}{\sqrt[4]{2t}} = 2s\sqrt[4]{\frac{8t^2}{2t}}$$

$$\frac{2s\sqrt[4]{8t^2}}{\sqrt[4]{2t}} = 2s\sqrt[4]{4t}$$

La división de radicales, incluye en caso de ser necesaria, la racionalización.

Ejemplo 4. Efectuar la operación $\frac{\sqrt[3]{3w^2t}}{\sqrt[3]{6wt^2}}$

$$\frac{\sqrt[3]{3w^2t}}{\sqrt[3]{6wt^2}} = \sqrt[3]{\frac{3w^2t}{6wt^2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{w}{2t}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{w}}{\sqrt[3]{2t}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{w}}{\sqrt[3]{2t}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4t^2}}{\sqrt[3]{4t^2}} \Bigg\}$$ Este paso se justifica a partir de la propiedad multiplicativa del uno.

$$= \frac{\sqrt[3]{(w)(4t^2)}}{\sqrt[3]{(2t)(4t^2)}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{4t^2w}}{\sqrt[3]{8t^3}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{3w^2t}}{\sqrt[3]{6wt^2}} = \frac{\sqrt[3]{4t^2w}}{2t}$$

En algunos casos, la división consiste solamente en la racionalización del denominador.

Ejemplo 5. Efectuar la división $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{2}+\sqrt{5}}\cdot\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-\sqrt{5})}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}-1\cdot\sqrt{2}+1\cdot\sqrt{5}}{2-5}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{15}-\sqrt{2}+\sqrt{5}}{-3}$$

Para dividir radicales con diferente índice, se procede de la -- siguiente manera.

Ejemplo 6. Efectuar la división. $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$

Como primer paso, representamos cada radical, como una expre- - sión exponencial equivalente:

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \frac{4^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{2}}}$$

y se multiplica cada exponente fraccionario, por una fracción - equivalente a la unidad, que permita que los exponentes tengan un mismo denominador.

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \frac{4^{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}}}{2^{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3}}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \frac{4^{\frac{2}{6}}}{2^{\frac{3}{6}}}$$

Ahora, pasando de estas nuevas expresiones exponenciales a radicales:

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{2^3}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[6]{16}}{\sqrt[6]{8}}$$

Como puedes observar, en el miembro derecho de la igualdad, se - ha cumplido con la condición de tener un mismo índice de la raíz; por lo que podemos proceder a realizar la división.

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{\frac{16}{8}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$$

Ejemplo 7. Efectuar la división $\frac{\sqrt{2a^3}}{\sqrt[3]{4a}}$

$$\frac{\sqrt{2a^3}}{\sqrt[3]{4a}} = \frac{(2a^3)^{\frac{1}{2}}}{(4a)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{(2a^3)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3}}}{(4a)^{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}}}$$

$$= \frac{(2a^3)^{\frac{3}{6}}}{(4a)^{\frac{2}{6}}}$$

$$= \frac{\sqrt[6]{(2a^3)^3}}{\sqrt[6]{(4a)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt[6]{8a^9}}{\sqrt[6]{16a^2}}$$

$$= \sqrt[6]{\frac{8a^9}{16a^2}}$$

$$= \sqrt[6]{\frac{a^7}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt[6]{a^7}}{\sqrt[6]{2}}$$

$$= \frac{a\sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{2}} \cdot \frac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt[6]{32}}$$ Paso que se justifica -- a partir de la propiedad multiplicativa del uno.

$$= \frac{a\sqrt[6]{32a}}{\sqrt[6]{64}}$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{2a^3}}{\sqrt[3]{4a}} = \frac{a\sqrt[6]{32a}}{2}$$

EJERCICIO

1. Efectúa las siguientes divisiones y expresa el resultado en su forma más simple.

a) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{4}}$

b) $\dfrac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$

c) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$

d) $\sqrt[3]{16x^2y} \div \sqrt[3]{4xy}$

e) $\sqrt[5]{w^2t^2z} \div \sqrt[5]{wt^2z}$

f) $\sqrt{ab} \div \sqrt{b^2}$

g) $7\sqrt[3]{h^2m^2} \div \sqrt[3]{3hm}$

h) $11\sqrt[4]{m^3t^2} \div \sqrt{m^2t^3}$

i) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

j) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$

k) $\dfrac{\sqrt{6}}{1 - \sqrt{2}}$

l) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{a} - \sqrt{c}}$

m) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3} - 2}$

n) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{5}$

o) $2\sqrt{7} \cdot 3\sqrt[4]{4}$

p) $6\sqrt[3]{2a} \cdot \sqrt[5]{3a}$

q) $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2} - 1}$

r) $\dfrac{\sqrt[4]{6}}{1 - \sqrt{7}}$

s) $\dfrac{\sqrt[3]{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - \sqrt{4}}$

t) $\dfrac{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{11}}$

D. Adición y sustracción de radicales.

Para efectuar la adición y sustracción de radicales, nos valdremos de la propiedad distributiva de la multiplicación; para la aplicación de esta propiedad en este tema, la podemos enunciar como:

$$\sqrt[n]{a}\,(b + c - d) = b\sqrt[n]{a} + c\sqrt[n]{a} - d\sqrt[n]{a}$$ Propiedad Distributiva.

por la propiedad simétrica tenemos:

$$b\sqrt[n]{a} + c\sqrt[n]{a} - d\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}\,(b+c-d)$$

Observando detenidamente la última expresión, se concluye que: para sumar radicales, éstos tienen que cumplir con dos condiciones: primero tener el mismo índice de la raíz y segundo tener un mismo radicando.

mismo índice de la raíz.

$$b\sqrt[n]{a} + c\sqrt[n]{a} - d\sqrt[n]{a}$$

mismo radicando.

Radicales semejantes: son los que tienen un mismo índice de la raíz y un mismo radicando. Radicales no semejantes son aquéllos que no cumplen las dos condiciones.

Radicales no semejantes: $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$; $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt{7}$

Los siguientes ejemplos nos muestran la forma de sumar radicales semejantes.

Ejemplo 1. Efectuar la operación. $5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$

$$= \sqrt{3}\,(5 - 3 + 7 - 2)$$

$$= \sqrt{3}\,(7)$$

$$\therefore \quad 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

Ejemplo 2. Efectuar la operación. $5\sqrt[3]{7} - 2\sqrt[3]{7} + 11\sqrt[3]{7}$

$$5\sqrt[3]{7} - 2\sqrt[3]{7} + 11\sqrt[3]{7} = (5 - 2 + 11)\sqrt[3]{7}$$

$$5\sqrt[3]{7} - 2\sqrt[3]{7} + 11\sqrt[3]{7} = 14\sqrt[3]{7}$$

Ejemplo 3. Reducir los radicales semejantes. $\sqrt{6} - 2\sqrt{6} + 3\sqrt[4]{6} - \sqrt[4]{6}$

$$\sqrt{6} - 2\sqrt{6} + 3\sqrt[4]{6} - \sqrt[4]{6} = (1-2)\sqrt{6} + (3 - 1)\sqrt[4]{6}$$

$$\sqrt{6} - 2\sqrt{6} + 3\sqrt[4]{6} - \sqrt[4]{6} = -\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6}$$

En caso de que tengamos diferente radicando, se procede conforme lo indica el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4. Efectuar la operación $\sqrt{18} + \sqrt{128} - \sqrt{50}$

Como primer paso, se factorizan los radicandos en forma conveniente.

$$\sqrt{18} + \sqrt{128} - \sqrt{50} = \sqrt{9\cdot 2} + \sqrt{64\cdot 2} - \sqrt{25\cdot 2}$$

En seguida se aplica la ley: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

$$\sqrt{18} + \sqrt{128} - \sqrt{50} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{2} + \sqrt{64}\cdot\sqrt{2} - \sqrt{25}\cdot\sqrt{2}$$
$$= 3\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$$

En el miembro derecho de la igualdad, se ha cumplido con las dos condiciones necesarias para sumar radicales. Por lo que se procede a realizar la operación:

$$\sqrt{18} + \sqrt{128} - \sqrt{50} = (3 + 8 - 5)\sqrt{2}$$
$$\sqrt{18} + \sqrt{128} - \sqrt{50} = 6\sqrt{2}$$

Ejemplo 5. Reducir los radicales semejantes.

$$\sqrt{45} - \sqrt{245} + \sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{108}$$

$$\sqrt{45} - \sqrt{245} + \sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{108} = \sqrt{9\cdot 5} - \sqrt{49\cdot 5} + \sqrt[3]{8\cdot 4} + \sqrt[3]{27\cdot 4}$$
$$= \sqrt{9}\cdot\sqrt{5} - \sqrt{49}\cdot\sqrt{5} + \sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{4}$$
$$= 3\sqrt{5} - 7\sqrt{5} + 2\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{4}$$
$$= (3 - 7)\sqrt{5} + (2 + 3)\sqrt[3]{4}$$

$$\therefore \sqrt{45} - \sqrt{245} + \sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{108} = -4\sqrt{5} + 5\sqrt[3]{4}$$

Ejemplo 6. Reducir los radicales semejantes.

$$\sqrt{75a} + \sqrt{147a} - \sqrt[3]{40b^2} - \sqrt[3]{320b^2}$$

$$\sqrt{75a} + \sqrt{147a} - \sqrt[3]{40b^2} - \sqrt[3]{320b^2} = \sqrt{25\cdot 3a} + \sqrt{49\cdot 3a} - \sqrt[3]{8\cdot 5b^2} - \sqrt[3]{64\cdot 5b^2}$$
$$= \sqrt{25}\cdot\sqrt{3a} + \sqrt{49}\cdot\sqrt{3a} - \sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{5b^2} - \sqrt[3]{64}\cdot\sqrt[3]{5b^2}$$
$$= 5\sqrt{3a} + 7\sqrt{3a} - 2\sqrt[3]{5b^2} - 4\sqrt[3]{5b^2}$$
$$= (5 + 7)\sqrt{3a} - (2+4)\sqrt[3]{5b^2}$$

$$\therefore \sqrt{75a} + \sqrt{147a} - \sqrt[3]{40b^2} - \sqrt[3]{320b^2} = 12\sqrt{3a} - 6\sqrt[3]{5b^2}$$

Es importante analizar detenidamente las raíces de índice par, para números reales,
por ejemplo: $\sqrt{4} = +2$
$\sqrt{4} = -2$

ambos números el (+2) y el (-2) son raíces de $\sqrt{4}$ porque:

$$\sqrt{4} = \sqrt{(+2)(+2)} = +2$$
$$\sqrt{4} = \sqrt{(-2)(-2)} = \sqrt{(-2)^2} = -2$$
$$\therefore \sqrt{4} = \pm 2$$

La expresión $\sqrt{4} = \pm 2$, es una forma compacta de representar $\sqrt{4} = +2$ y $\sqrt{4} = -2$.

Ahora bien, este fue el caso de un número positivo. ¿Qué ocurre si quisiéramos obtener la raíz cuadrada de un número negativo?

$$\sqrt{-4} = (+2)(-2) = ?$$

El (-2) no es raíz de $\sqrt{-4}$, ya que tiene que cumplir como toda raíz cuadrada que, al elevarlo al cuadrado, nos dé nuevamente el valor del radicando.

$$(-2)^2 = (-2)(-2) = +4$$

o bien si escogemos el (+2), también tiene que cumplir con la condición de que al elevarlo al cuadrado nos dé el mismo radicando.

$$(+2)^2 = (+2)(+2) = +4$$

Como ves, ninguno de los dos valores es la raíz de $\sqrt{-4}$. Por lo que podemos generalizar que: no existe ningún número real, que sea la raíz cuadrada de un número negativo.
Razón por la cual tenemos la necesidad de utilizar un sistema de numeración que nos permita obtener la raíz cuadrada de números negativos.

Este tipo de números se denominan imaginarios y se manejan conforme lo indican los ejemplos:

Ejemplo 1. Obtener la raíz de $\sqrt{-4}$

$$\sqrt{-4} = \sqrt{(4)(-1)} = \pm\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}$$
$$= \pm 2\sqrt{-1}$$

esta raíz del negativo uno, se representa por la letra minúscula $i = \sqrt{-1}$; lo que facilita su escritura:

$$\sqrt{-4} = \pm 2\,i$$

Ejemplo 2. Obtener la raíz de $\sqrt{-25}$

$$\sqrt{-25} = \sqrt{(25)(-1)}$$
$$= \pm\sqrt{25}\cdot\sqrt{-1}$$
$$= \pm 5\sqrt{-1}$$
$$\therefore \sqrt{-25} = \pm 5\,i$$

Ejemplo 3. Realizar la operación $\sqrt{-121}$

$$\begin{aligned}\sqrt{-121} &= \sqrt{(121)(-1)}\\ &= \pm\sqrt{121}\cdot\sqrt{-1}\\ &= \pm\, 11\sqrt{-1}\\ \sqrt{-121} &= \pm\, 11i\end{aligned}$$

Cuando se extrae la raíz cuadrada de un número negativo, se obtiene un <u>número imaginario</u>.

Cuando un número real y un imaginario se suman algebraicamente, dan lugar a un número <u>complejo</u>, que se expresa de manera general como:

$$\underbrace{a}_{\text{parte real}} + \underbrace{bi}_{\text{parte imaginaria}} \longrightarrow \text{número complejo}$$

Cuando la literal b=0, al número complejo se le llama real y cuando a=0, al número complejo se le llama imaginario puro.

a la literal $i = \sqrt{-1}$, se le llama <u>unidad imaginaria</u>.

Como puedes observar, este es el recurso para obtener la raíz par de un número negativo.

La siguiente ilustración te enseña la manera de determinar el valor de toda potencia entera de i.

$i^2 = i\cdot i$ como $i = \sqrt{-1}$

$i^2 = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}$

$i^2 = \sqrt{(-1)(-1)}$

$\boxed{i^2 = -1}$

$i^3 = i^2\cdot i$ como $i^2 = -1$

$i^3 = -1\cdot i$

$\boxed{i^3 = -i}$

$i^4 = i^2\cdot i^2$ como $i^2 = -1$

$i^4 = (-1)(-1)$

$\boxed{i^4 = 1}$

$i^5 = i^4\cdot i$ como $i^4 = 1$

$i^5 = 1\cdot i$

$\boxed{i^5 = i}$

En la tabla siguiente se encuentran los valores de i, hasta la vigésima potencia. Se te sugiere que los compruebes.

$$\begin{aligned}
i &= \sqrt{-1}\\
i^2 &= (\sqrt{-1})^2 &&= -1\\
i^3 &= i^2\cdot i &&= (-1)\ i &&= -i\\
i^4 &= i^2\cdot i^2 &&= (-1)(-1) &&= 1\\
i^5 &= i^4\cdot i &&= (\ 1)(\ i) &&= i\\
i^6 &= i^4\cdot i^2 &&= (\ 1)(-1) &&= -1\\
i^7 &= i^6\cdot i &&= (-1)(\ i) &&= -i\\
i^8 &= i^4\cdot i^4 &&= (\ 1)(\ 1) &&= 1\\
i^9 &= i^8\cdot i &&= (\ 1)(\ i) &&= i\\
i^{10} &= i^8\cdot i^2 &&= (\ 1)(-1) &&= -1\\
i^{11} &= i^{10}\cdot i &&= (-1)(\ i) &&= -i\\
i^{12} &= i^{10}\cdot i^2 &&= (-1)(-1) &&= 1\\
i^{13} &= i^{12}\cdot i &&= (\ 1)(\ i) &&= i\\
i^{14} &= i^{12}\cdot i^2 &&= (\ 1)(-1) &&= -1\\
i^{15} &= i^{14}\cdot i &&= (-1)(\ i) &&= -i\\
i^{16} &= i^8\cdot i^8 &&= (\ 1)(\ 1) &&= 1\\
i^{17} &= i^{16}\cdot i &&= (\ 1)(\ i) &&= i\\
i^{18} &= i^{16}\cdot i^2 &&= (\ 1)(-1) &&= -1\\
i^{19} &= i^{18}\cdot i &&= (-1)(\ i) &&= -i\\
i^{20} &= i^{16}\cdot i^4 &&= (\ 1)(\ 1) &&= 1
\end{aligned}$$

Cuando el exponente de la unidad imaginaria es múltiplo de 4, se obtiene como resultado <u>la unidad</u>. Esto es:

$1^{4n} = 1$, para toda $n \in E$.

Observa que las flechas en la tabla nos indican que los valores se repiten y además que sólo existen 4 variantes, éstas son: i, -1, -i, 1.

En una unidad posterior te daremos más información acerca de éste nuevo conjunto de números imaginarios.

EJERCICIO.

1. Efectúa las operaciones indicadas.

a) $\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 8\sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{7} - 4\sqrt[3]{7} + 11\sqrt[3]{7}$

c) $\sqrt[4]{3} - 11\sqrt[4]{3} + 25\sqrt[4]{3}$

d) $\sqrt{147} - \sqrt{48} - \sqrt{108}$

e) $\sqrt{121a} - \sqrt{169a} - \sqrt{a}$

f) $\sqrt[3]{54a} + \sqrt[3]{2a} + \sqrt[3]{250a}$

g) $\sqrt{64st} - \sqrt{121st} + \sqrt[3]{340} - \sqrt[3]{605}$

h) $\sqrt[4]{7} - \sqrt[4]{112} + \sqrt{162} + \sqrt{242}$

i) $\sqrt[3]{3000} + \sqrt[3]{1331} - \sqrt[4]{324} + \sqrt[4]{64}$

j) $\sqrt{19} - \sqrt[3]{17} + \sqrt{76} - \sqrt[3]{136}$

2. Encuentra las siguientes raíces imaginarias.

a) $\sqrt{-64}$

b) $2\sqrt{-8}$

c) $3\sqrt{-25}$

d) $4\sqrt{-\frac{4}{25}}$

e) $\sqrt{-\frac{16}{81}}$

f) $\sqrt{-\frac{49}{4}}$

RESUMEN

En una potencia como b^m, $\underline{b}$ se llama la base y $\underline{m}$ el exponente.

Leyes de los exponentes enteros positivos.

Si $\underline{a}$ y $\underline{b}$ son números reales, (donde $\underline{a}$ y $\underline{b}$ se usarán como bases) - y $\underline{m},\underline{n}$ son números enteros positivos, entonces

LEYES	RESTRICCIONES MATEMATICAS
1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	
2) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$	
3) $(a^m)^n = a^{mn}$	
4) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	, si $m>n$ y $a\neq 0$
5) $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$	, si $n>m$ y $a\neq 0$
6) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	, si $b\neq 0$

Exponente cero

Algunas extensiones de las leyes de exponentes son:

$a^0 = 1$, si $a\neq 0$

$\frac{0}{0}$ es una fracción indeterminada.

$\frac{a}{a} = 1$, si $a\neq 0$

$\frac{0}{a} = 0$, si $a\neq 0$

Se llama restricción matemática para una variable, en una expresión, al valor o conjunto de valores, para los cuales la expresión no está definida.

g) $\sqrt{64st} - \sqrt{121st} + \sqrt[3]{340} - \sqrt[3]{605}$

h) $\sqrt[4]{7} - \sqrt[4]{112} + \sqrt{162} + \sqrt{242}$

i) $\sqrt[3]{3000} + \sqrt[3]{1331} - \sqrt[4]{324} + \sqrt[4]{64}$

j) $\sqrt{19} - \sqrt[3]{17} + \sqrt{76} - \sqrt[3]{136}$

2. Encuentra las siguientes raíces imaginarias.

a) $\sqrt{-64}$

b) $2\sqrt{-8}$

c) $3\sqrt{-25}$

d) $4\sqrt{-\frac{4}{25}}$

e) $\sqrt{-\frac{16}{81}}$

f) $\sqrt{-\frac{49}{4}}$

RESUMEN

En una potencia como b^m, <u>b</u> se llama la <u>base</u> y <u>m</u> el exponente.

<u>Leyes de los exponentes enteros positivos</u>.

Si <u>a</u> y <u>b</u> son números reales, (donde <u>a</u> y <u>b</u> se usarán como bases) - y <u>m,n</u> son números enteros positivos, entonces

LEYES	RESTRICCIONES MATEMATICAS
1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	
2) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$	
3) $(a^m)^n = a^{mn}$	
4) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	, si $m>n$ y $a \neq 0$
5) $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$	, si $n>m$ y $a \neq 0$
6) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	, si $b \neq 0$

<u>Exponente cero</u>

Algunas extensiones de las leyes de exponentes son:

$a^0 = 1$, si $a \neq 0$

$\frac{0}{0}$ es una fracción indeterminada.

$\frac{a}{a} = 1$, si $a \neq 0$

$\frac{0}{a} = 0$, si $a \neq 0$

Se llama <u>restricción matemática</u> para una variable, en una expresión, al <u>valor o conjunto de valores</u>, para los cuales la expresión <u>no</u> está definida.

Exponentes negativos.

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, si $a \neq 0$ y n es entero positivo

$\frac{1}{a^{-n}} = a^n$, si $a \neq 0$ y n es entero positivo

Exponentes fraccionarios.

Una expresión con exponente fraccionario es de la forma $4^{\frac{3}{7}}$

El término $a^{\frac{1}{n}}$ se puede definir como la raíz n-ésima de a y se escribe $\sqrt[n]{a^1}$.

A la expresión $\sqrt[n]{a^1}$, le llamamos radical.

Las partes que componen un radical son:

índice de la raíz $\leftarrow$ $\sqrt[3]{x^2}$ $\rightarrow$ exponente, $\searrow$ radicando

Cualquier número real a, se puede expresar de dos formas: exponencial o radical. (En los números racionales $b \neq 0$)

Número real ;	Forma exponencial ;	Forma radical
a =	$a^{\frac{1}{2}}$ =	$\sqrt{a}$

En álgebra, a una operación que anula lo que hace la otra, le llamamos operación inversa.

Al resultado de un radical lo llamamos raíz.

La raíz de todo número positivo es doble, cuando su índice es dos, una raíz es positiva y la otra es negativa; cuando su índice es cuatro, las raíces son cuatro, dos positivas y dos negativas; cuando su índice es seis, las raíces son seis, tres positivas y 3 negativas, y así sucesivamente.

Cuando tenemos como resultado una raíz positiva y una negativa, se considera a la raíz positiva como raíz principal.

Un número positivo o negativo tiene nada más una sola raíz, cuando su índice es impar, siendo el signo de la raíz igual al signo del número.

Un número negativo no tiene raíz enésima real, si su índice n es número par.

Las leyes de los exponentes fraccionarios son:

$(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$

Leyes de los radicales.

Si a y b son números reales, $n \in N$ y ningún radicando es negativo si n es par, tenemos:

1) $\left(a^n\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^n}$

2) $a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

3) $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

4) $\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Se considera que un radical de la forma $\sqrt[n]{a}$ está en forma simplificada, cuando:

a) El radicando no contiene factores a la n-ésima potencia.

b) El radicando no contiene fracciones.

c) El índice de la raíz es el mínimo entero posible.

Multiplicación de radicales.

Se recurre a la ley: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ para poder efectuar la multiplicación de radicales.

División de radicales.

La Ley: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ es el recurso que permite la división de radicales.

Adición y sustracción de radicales.

Las operaciones de adición y sustracción de radicales utilizan básicamente la propiedad distributiva de la multiplicación:

$$b\sqrt[n]{a} + c\sqrt[n]{a} + d\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}\,(a + b + c)$$

Con respecto al conjunto de números complejos tenemos:

$a + bi$ número complejo

parte real

parte imaginaria

la literal i= -1 se llama unidad imaginaria.

GLOSARIO

BASE DE UNA POTENCIA: En un número usado varias veces como factor, al producto se le llama potencia y el factor usado es la base.

EXPONENTE: Es un pequeño número o letra -- que se escribe arriba y a la derecha de una cantidad, para indicar cuántas veces se usa esa cantidad como factor.

EXPRESION EXPONENCIAL: Es una expresión que contiene - un exponente cualquiera.

HIPOTESIS: Cualquier enunciado que se acepta sin demostración, con el - - objeto de tener una base para - discusión.

INDICE DE LA RAIZ DE UN RADICAL Es un pequeño número que se escribe en el signo o símbolo de la raíz de un radical, e indica la raíz que debe extraerse.

NUMERO COMPLEJO: Es un número de la forma a+bi - donde a es la parte real y bi - la parte imaginaria. Ejemplo. - 2+3i, 5-7i.

NUMERO IMAGINARIO: Es un número que resulta al extraer la raíz cuadrada de un -- número negativo.
Ejemplo. $\sqrt{-25} = \pm 5i$; $\sqrt{-4} = \pm 2i$

PROPIEDAD SIMETRICA: Para dos números naturales a y b, si a = b, entonces b = a.

RACIONALIZAR: Es convertir en número racional el denominador de una fracción, cuando éste sea irracional.

RADICAL: Es la expresión o símbolo $\sqrt[n]{a}$, la cual se lee como: "la enésima raíz de a".

RADICALES NO SEMEJANTES: Son aquéllos que tienen diferente el índice o el radicando o -- ambos, ejemplo $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt{a}$; $\sqrt[3]{2b}$, $\sqrt[3]{3m}$; $\sqrt[4]{c}$ $\sqrt[5]{d}$;

RADICALES SEMEJANTES: Son aquellos radicales que tienen el mismo índice y el mismo radicando, ejemplo: $2\sqrt[3]{3}$, $5\sqrt[3]{3}$;

UNIDAD IMAGINARIA: Es la raíz cuadrada del negativo de 1, la cual se escribe como $i = \sqrt{-1}$

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.

Gordon Fuller. Algebra Elemental, C.E.C.S.A., México, 1973.

Parra Cabrera. Matemáticas 4o. Curso, Editorial Kapelusz Mexicana, México, 1974.

Peters Schaaf. Algebra, Editorial Reverté Mexicana, México 1972.

Rees y Sparks. Algebra, Editorial Reverté Mexicana, México 1972.

ANEXO

Respuestas de los ejercicios.

I. EXPONENTES.

A. Exponentes enteros positivos.

B. Exponente cero.

C. Exponentes enteros negativos.

1.

a) $\frac{1}{2^3}$ ó $\frac{1}{8}$

b) 1

c) $\frac{1}{4^3}$ ó $\frac{1}{64}$

d) $\frac{1}{(-5)^2}$ ó $\frac{1}{25}$

e) $\frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2}$ ó 25

f) 3

g) $\frac{1}{(4^1)^2}$ ó $\frac{1}{16}$

h) $\frac{2^8}{2^{\frac{1}{2}}}$ ó 32

i) 5

j) $\frac{3}{7}$

k) 2

l) 9

m) 1

n) $\frac{1}{0.09}$ ó $\frac{100}{9}$

o) 49

p) 1

q) 2

r) 49

s) 3

t) 3

2.

a) 6

b) $\frac{5c^3}{ab^2}$

c) $\frac{a^2}{9b^4}$

d) $\frac{1}{2}$

e) $-x$

f) 2

g) $\frac{2}{3}$

h) -12

i) $\frac{3}{3b-1}$

j) $\frac{25}{b^2}$

k) $\frac{n^2-3}{(n-1)(n+1)}$ ó $\frac{n^2-3}{n^2-1}$

l) $\frac{1}{3b} - \frac{3}{b}$ ó $\frac{-8}{3b}$

m) 0

n) $\frac{(xy-1)(x-y)}{y}$

o) $\frac{1}{2}$

p) $\frac{9b^4}{a^2}$

q) 1

r) $\frac{1}{x^2}$

s) $5x$

t) $\frac{1}{5}$

D. Exponentes fraccionarios

1.

a) $\sqrt[3]{4}$

b) $\sqrt[4]{x^2}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{16}}$

d) $4\sqrt[3]{a^2}$

e) $3\sqrt[4]{x^3}$

f) $7\sqrt[7]{b^5}$

g) $\sqrt[7]{(7b)^3}$

h) $\sqrt[3]{2x}$

2.

a) $(3x)^{\frac{1}{2}}$

b) 4

c) $3a^{\frac{3}{4}}$

d) $\dfrac{1}{7x}$

e) $4\ (5^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}})$

f) $(a+b)^{\frac{1}{3}}$

g) $2a^2b^2$

h) $(x+y)^{\frac{1}{2}}z^{\frac{2}{5}}$

3.

a) 3

b) 49

c) 125

d) $\frac{1}{8}$

e) 9

f) $\frac{1}{27}$

g) 512

h) $\frac{1}{4}$

i) $\frac{1}{2}$

j) 3

4.

a) $\dfrac{1}{x}$

b) $2a$

c) $\dfrac{1}{x^2}\sqrt[3]{x^2}$ ó $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$

d) $\dfrac{b}{\sqrt[3]{b^2}}$ ó $\sqrt[3]{b}$

e) $\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt[4]{y}}$ ó $\sqrt[4]{y}$

f) $\dfrac{3}{5a^2b}$

g) $5a$

h) $\dfrac{8b^2c^3}{a}$

i) $\dfrac{1}{b+a}$

j) 1

II. RADICALES

A. Leyes de los exponentes

1.

a). $5\sqrt{2}$

b) $2\sqrt[3]{2}$

c) $\dfrac{\sqrt{105}}{21}$

d) $\dfrac{y\sqrt{3x}}{5}$

e) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{4}$

f) $\dfrac{2b\sqrt{2a}}{5}$

g) $\sqrt{3}$

h) 4

i) $\frac{5}{3}$

j) $xy\sqrt{2y}$

k) $\dfrac{2a\sqrt{10a}}{5}$

l) $\dfrac{\sqrt[3]{6x^2}}{3x}$

m) $\sqrt{7x}$

n) $\sqrt{3ab^3}$

o) $\sqrt{a-y}$

p) $\dfrac{7-2\sqrt{10}}{3}$

D. Adición y sustracción de radicales.

1.

a) $7\sqrt{5}$

b) $8\sqrt[3]{7}$

c) $15\sqrt[4]{3}$

d) $-3\sqrt{3}$

e) $-3\sqrt{a}$

f) $7\sqrt[3]{2a}$

g) $-3\sqrt{st} - 7\sqrt[3]{5}$

h) $-\sqrt[4]{7} + 20\sqrt{2}$

i) $21\sqrt[3]{3} - \sqrt[4]{4}$

j) $3\sqrt{19} - 3\sqrt[3]{17}$

2.

a) $8i$

b) $4i\sqrt{2}$

c) $15i$

d) $\frac{8}{5}\, i$

e) $\frac{4}{9}\, i$

f) $\frac{7}{2}\, i$

AUTOEVALUACION

I. Relaciona las dos columnas, colocando en el paréntesis de la izquierda, la letra que corresponda a la respuesta correcta.

CONCEPTOS

1. ( ) Ley que se utiliza para efectuar la multiplicación de radicales.

2. ( ) Son las restricciones matemáticas de $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$

3. ( ) Es la raíz n-ésima de a, expresada en forma exponencial.

4. ( ) Ley que se utiliza para efectuar la división de radicales.

5. ( ) Es convertir en número racional el denominador de una fracción, cuando éste sea irracional.

6. ( ) Son las restricciones matemáticas de $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

7. ( ) Propiedad de los números reales que se utiliza para efectuar la adición y sustracción de radicales.

8. ( ) Nombre que se les asigna a los radicales que tienen el mismo índice y mismo radicando.

9. ( ) Es el valor o conjunto de valores de una variable en una expresión, para los cuales no está definida dicha expresión.

10. ( ) Es la raíz positiva de un radicando, cuando una raíz es negativa y la otra es positiva.

DEFINICIONES

A) Racionalizar.

B) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

C) Restricción matemática.

D) $n>m$, $a \neq 0$

E) Raíz principal.

F) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

G) $a^{\frac{1}{n}}$

H) $m>n$, $a \neq 0$

I) Radicales semejantes

J) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

K) $b\sqrt[n]{a} + c\sqrt[n]{a} - d\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}\,(b+c-d)$

L) $\sqrt{a}$

II. Lee las siguientes expresiones; en cada una de ellas hay cuatro posibles respuestas. Selecciona la correcta y escríbela en el paréntesis de la derecha.

Simplifica cada una de las expresiones siguientes:

11) $\dfrac{100}{10(b-c)^0}$ ( )

m) 100 o) 1

n) 10 p) $\dfrac{10}{(b-c)}$

12) $[12b^7(x^{-5}+1)^{-2}]^0$ ( )

q) 1 s) $\dfrac{12b^7}{x^5+1}$

r) $12b^7$ t) $\dfrac{12b^7}{(x^{-5}+1)^2}$

13) $15a^{-1}b^{-2}c^3$ ( )

u) $-15(abc)^0$ w) $\dfrac{15c^3}{ab^2}$

v) $\dfrac{15a^3}{b^2c}$ x) $\dfrac{15ab^2}{c^3}$

14) Escribe la expresión $(6x)^{\frac{2}{5}}$ en forma radical. ( )

y) $\sqrt{6x^2}$

z) $\sqrt[5]{(6x)^2}$

a) $\sqrt{(6x)^5}$

b) $\sqrt{6x^5}$

15) Expresa el radical $\sqrt[8]{a^2b^6c^8}$ en su forma más simple. ( )

c) $\sqrt[4]{a^2b^4c}$

d) $\sqrt[8]{ab^2c}$

e) $\sqrt[8]{a^2b^4c}$

f) $\sqrt[4]{ab^3c}$

16) Introduce al radical, el factor que está fuera de él: $4x\sqrt{\dfrac{6-x}{16x^2}}$

g) $\sqrt{16x}$ ( )

h) $\sqrt{6-x}$

i) $\sqrt{20-x}$

j) $\sqrt{4-x}$

17. Efectúa la operación y simplifica $\sqrt{3}(\sqrt{2}-\sqrt{5})$ ( )

k) $3\sqrt{5}-2\sqrt{6}$

l) $2\sqrt{3}-3\sqrt{5}$

m) $\sqrt{6}-\sqrt{15}$

n) $\sqrt{15}-\sqrt{6}$

18. Efectúa la operación y simplifica $\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ ( )

o) $\sqrt{7}+\sqrt{5}$

p) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$

q) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{2}$

r) $\sqrt{5}-\sqrt{7}$

19. Efectúa la operación $\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{250}$ ( )

s) $-4\sqrt[3]{3}$

t) $-4\sqrt[3]{2}$

u) $-4\sqrt{3}$

v) $4\sqrt[3]{3}$

20. Es la raíz de $2\sqrt{-\dfrac{16}{25}}$ ( )

w) $\dfrac{8}{5}$

x) $-\dfrac{8}{5}$

y) $-\dfrac{8}{5}i$

z) $\pm\dfrac{8}{5}i$

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACION

1. (J)
2. (D)
3. (G)
4. (B)
5. (A)
6. (H)
7. (K)
8. (I)
9. (C)
10. (E)
11. (N)
12. (Q)
13. (W)
14. (Z)
15. (F)
16. (H)
17. (M)
18. (O)
19. (T)
20. (Z)

PREPARATORIA ABIERTA

La presente Unidad fue elaborada y diseñada por el Departamento de Educación Abierta de la Universidad Autónoma de Nuevo León para los alumnos que estudian bajo una metodología sistematizada de autoaprendizaje.

Impreso en los talleres del Departamento de Educación Abierta.

Se tiraron 1,000 ejemplares.

1977.