g) $\dfrac{2a^2}{a} + \dfrac{3}{a^{-1}}$ i) $\dfrac{(ab)^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}$

h) $\left(2a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}c\right)^3$ j) $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^0$

II. RADICALES.

A. Leyes de los radicales.

Con frecuencia, una expresión algebraica expresada en forma radical, es conveniente o necesario cambiarla por otra expresión que resulte ser más simple o útil. Para lograr esto, utilizaremos las leyes de los radicales, que no son otra cosa más que una transformación de las leyes de los exponentes.

Veamos más detalladamente estas leyes, que podemos reducirlas a cuatro. En cuanto a los radicandos, recordemos que a y b son números reales y que $n \in N$; ningún radicando es negativo si n es par.

Leyes de los exponentes fraccionarios. $\longrightarrow$ Leyes de los radicales.

$\left(a^n\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n$ $\sqrt[n]{a^n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n$, $(a \geq 0)$

$a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$ $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

$\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}}$ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

$\dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$, $(b \neq 0)$ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, $b \neq 0)$

Estas leyes o propiedades de los radicales, las usaremos para la **simplificación** de radicales.

Consideramos que un radical del tipo $\sqrt[n]{a}$ está en forma simplificada, cuando:

1) El radicando no contiene factores a la n-ésima potencia.
2) El radicando no contiene fracciones.
3) El índice de la raíz es el mínimo entero posible.

De acuerdo a esto, la simplificación de radicales podemos reducirla a tres casos:

a) Factorización del radicando.
b) Racionalización del denominador.
c) Simplificación del índice.

Analicemos cada caso en particular:

a) Factorización del radicando.

Como el título dice, el proceso a seguir es factorizar el radicando.

Ejemplo 1. Factorizar el radicando.

$\sqrt{45} = \sqrt{9\cdot 5}$; aplicando una de las propiedades de los radicales, tenemos que:

$$\sqrt{9\cdot 5} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{5} = 3\sqrt{5}.$$

En el proceso de factorizar el radical, hay que tener muy en cuenta el índice enésimo de la raíz, para poder sacar equis factor a su raíz enésima, como coeficiente del radical. Por ejemplo, en el radical $\sqrt[5]{32a^7} = \sqrt[5]{32a^5(a^2)}$, donde $32a^5$ es un factor que tiene raíz quinta exacta, ésta es 2a, por lo que al radical conviene factorizarlo así:

$$\sqrt[5]{32a^7} = \sqrt[5]{32a^5\cdot a^2} = 2a\sqrt[5]{a^2}$$

Ejemplo 2. Expresar el radical $\sqrt{54x^3y}$ en su forma más simple.

$$\sqrt{54x^3y} = \sqrt{9x^2\cdot 6xy} = \sqrt{9x^2}\cdot\sqrt{6xy} = 3x\sqrt{6xy}$$

b) Racionalización del denominador.

Para eliminar las fracciones del radicando, se multiplican numerador y denominador por el mínimo número que tenga la propiedad de transformar el denominador en una potencia n-ésima perfecta.

Ejemplo 1. Cambiar $\sqrt{\frac{3}{4}}$ a una forma que no tenga fracción bajo el radical.

$$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}\cdot\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{4\cdot 3}}{4} = \frac{2}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Ejemplo 2. Idem $\sqrt{\frac{3a}{8b}}$

$$\sqrt{\frac{3a^3}{8b}} = \frac{\sqrt{3a^3}}{\sqrt{8b}}\cdot\frac{\sqrt{2b}}{\sqrt{2b}} = \frac{\sqrt{6a^3b}}{\sqrt{16b^2}} = \frac{\sqrt{6aba^2}}{\sqrt{16b^2}} = \frac{a}{4b}\sqrt{6ab}$$

Ejemplo 3. Racionalizar el denominador.

de $\frac{2+\sqrt{7}}{5-\sqrt{7}}$; Se multiplican el numerador y el denominador por el conjugado del denominador $5+\sqrt{7}$, dado que esto nos da una diferencia de dos cuadrados y así se-simplifica y racionaliza el denominador.

$$\frac{2+\sqrt{7}}{5-\sqrt{7}} = \frac{(2+\sqrt{7})(5+\sqrt{7})}{(5-\sqrt{7})(5+\sqrt{7})} = \frac{10 + 7\sqrt{7} + 7}{5^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2}$$

$$= \frac{17 + 7\sqrt{7}}{25 - 7}$$

$$= \frac{17 + 7\sqrt{7}}{18}$$

c). <u>Simplificación del índice de la raíz del radical.</u>

Una última condición para considerar que el radical está completamente simplificado, es que <u>el índice sea el mínimo entero posible</u>.

Ejemplo 1. Expresar el radical $\sqrt[8]{9}$ en su forma más simple.

$$\sqrt[8]{9} = \sqrt[4\cdot2]{9} = \sqrt[4]{\sqrt{9}} = \sqrt[4]{3}$$

Ejemplo 2. Expresar el radical $\sqrt[6]{81x^4}$ en su forma más simple.

$$\sqrt[6]{81x^4} = \sqrt[3\cdot2]{81x^4} = \sqrt[3]{\sqrt{81x^4}} = \sqrt[3]{9x^2}$$

Como puedes observar, la simplificación del índice de la raíz -- puede llevarse a cabo, cuando hay posibilidad de factorizar dicho índice en factores mayores que uno.

<u>Otra forma de simplificar el índice de la raíz del radical, es -- convertir dicho radical a una expresión con exponente fraccionario, simplificarlo y luego transformarlo de nuevo a radical.</u>

Ejemplo 3. Expresar el radical $\sqrt[12]{x^2y^4z^8}$ en su forma más simple.

$$\sqrt[12]{x^2y^4z^8} = x^{\frac{2}{12}}y^{\frac{4}{12}}z^{\frac{8}{12}}$$

$$= x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{2}{6}}z^{\frac{4}{6}}$$

$$= \sqrt[6]{x\,y^2z^4}$$

Como complemento de este tema, veremos un último punto que será de mucha importancia en álgebra y trigonometría, y que está relacionado desde luego con los radicales. Nos referimos al hecho de <u>"introducir un factor que está fuera del radical, dentro del radical"</u>

<u>La forma de realizar este proceso es elevar a la potencia n-ésima del radical, el coeficiente o término exterior del radical, e introducirlo dentro de él como factor.</u>

Ejemplo 1. Introducir el coeficiente, elevado a la potencia apropiada, al radical.

$$2a\sqrt{3b} = \sqrt{3b\cdot 4a^2} = \sqrt{12a^2b}$$

Ejemplo 2. Idem.

$$2x\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}} = \sqrt[3]{8x^3\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$= \sqrt[3]{8x^3-8}$$

EJERCICIO

1. Expresa cada radical en su forma más simple.

a) $\sqrt{50}$

b) $\sqrt[3]{16}$

c) $\sqrt{\frac{5}{21}}$

d) $\sqrt{\frac{12xy^2}{100}}$

e) $\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$

f) $\sqrt{\frac{8ab^2}{25}}$

g) $\sqrt[4]{9}$

h) $\sqrt[3]{2^6}$

i) $\sqrt{\frac{75}{27}}$

j) $\sqrt[6]{8x^6y^9}$

k) $\sqrt[4]{\frac{64a^6}{25}}$

l) $\sqrt[3]{\frac{2}{9x}}$

m) $\sqrt[4]{49x^2}$

n) $\sqrt[6]{27a^3b^9}$

o) $\sqrt[4]{a^2-2ay+y^2}$

p) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$

2. Introduce al radical, el factor que está fuera de él.

a) $4\sqrt{3}$

b) $3x\sqrt{2y}$

c) $\frac{3}{4}\sqrt{2ab^2}$

d) $3x\sqrt{\frac{4-x}{9x^2}}$

e) $2\sqrt[3]{4}$

f) $\frac{1}{2b}\sqrt{18a^3b}$

g) $2\sqrt[4]{y}$

h) $5a\sqrt{\frac{1}{25}-\frac{1}{a^2}}$

B. Multiplicación de radicales.

Apoyados en la ley $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

Realicemos la multiplicación de radicales.

Es importante hacerte notar que son iguales los índices de las raíces que se multiplican y además iguales al índice de la raíz resultante.

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$ mismo índice de la raíz.

Dicho de otra manera, la condición para multiplicar radicales y expresar el resultado como un solo radical, es que tengan un mismo índice de la raíz.

Ejemplo 1. Efectuar la operación indicada $\sqrt{2a}\cdot\sqrt{7b}$ y simplificar.

$$\sqrt{2a}\cdot\sqrt{7b}=\sqrt{2a\cdot 7b}$$

$$\therefore\ \sqrt{2a}\cdot\sqrt{7b}=\sqrt{14ab}$$

Ejemplo 2. Idem $\sqrt[3]{3ac}\cdot\sqrt[3]{5a^2}$

$$\sqrt[3]{3ac}\cdot\sqrt[3]{5a^2}=\sqrt[3]{(3ac)(5a^2)}$$

$$=\sqrt[3]{15a^3c}$$

$$\therefore\ \sqrt[3]{3ac}\cdot\sqrt[3]{5a^2}=a\sqrt[3]{15c}$$

Ejemplo 3. Idem $7w\sqrt[4]{3w}\cdot\sqrt[4]{4m}$

$$7w\sqrt[4]{3w}\cdot\sqrt[4]{4m}=7w\sqrt[4]{(3w)(4m)}$$

$$\therefore\ 7w\sqrt[4]{3w}\cdot\sqrt[4]{4m}=7w\sqrt[4]{12wm}$$

Ejemplo 4. Idem. $3s\sqrt{2t}\cdot 5t\sqrt{2s}$

$$3s\sqrt{2t}\cdot 5t\sqrt{2s}=3s\cdot 5t\sqrt{(2t)(2s)}$$

$$=15st\sqrt{4st}$$

$$=15st(2)\sqrt{st}$$

$$\therefore\ 3s\sqrt{2t}\cdot 5t\sqrt{2s}=30st\sqrt{st}$$

En caso de que haya diferentes índices de la raíz, debes proceder como lo muestran los ejemplos siguientes:

Ejemplo 1. Multiplicar los radicales $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[2]{b}$ diferente índice de la raíz.

Como primer paso, representaremos cada radical, por una expresión exponencial equivalente:

$$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[2]{b}=(a)^{\frac{1}{3}}(b)^{\frac{1}{2}}$$

y tratamos cada exponente fraccionario, de tal manera que consigamos que sus denominadores sean iguales:

$$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[2]{b}=a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{2}}$$

$$=(a)^{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}}(b)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3}}$$

$$=a^{\frac{2}{6}}\,b^{\frac{3}{6}}$$

al formar el exponente fraccionario, el índice de la raíz viene a ser el denominador y el exponente del radicando es el numerador.

Ahora, pasando de estas nuevas expresiones exponenciales a radicales, tenemos:

$$=\sqrt[6]{a^2}\cdot\sqrt[6]{b^3}$$

como puedes observar, en el miembro derecho de la igualdad, se ha cumplido con la condición de tener un mismo índice de la raíz; por lo que se procede a realizar la operación indicada.

$$=\sqrt[6]{a^2}\cdot\sqrt[6]{b^3}$$

$$\therefore\ \sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt[6]{a^2b^3}$$

Ejemplo 2. Realizar la operación $\sqrt[4]{2b^2}\cdot\sqrt[5]{3b}$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt[4]{2b^2}\cdot\sqrt[5]{3b} &= (2b^2)^{\frac{1}{4}}(3b)^{\frac{1}{5}}\\ &= (2b^2)^{\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{5}}(3b)^{\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{4}}\\ &= (2b^2)^{\frac{5}{20}}(3b)^{\frac{4}{20}}\end{aligned}\right\}\ \text{Forma exponencial.}$$

$$\left.\begin{aligned}&= \sqrt[20]{(2b^2)^5}\cdot\sqrt[20]{(3b)^4}\\ &= \sqrt[20]{32b^{10}}\cdot\sqrt[20]{81b^4}\\ &= \sqrt[20]{(32b^{10})\ (81b^4)}\end{aligned}\right\}\ \text{Forma radical.}$$

$$\therefore\quad \sqrt[4]{2b^2}\cdot\sqrt[5]{3b} = \sqrt[20]{2592b^{14}}$$

Ejemplo 3. Realizar la operación $\sqrt{7w^3}\cdot\sqrt[3]{3t^2}$

$$\begin{aligned}\sqrt{7w^3}\cdot\sqrt[3]{3t^2} &= (7w^3)^{\frac{1}{2}}(3t^2)^{\frac{1}{3}}\\ &= (7w^3)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3}}(3t^2)^{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}}\\ &= (7w^3)^{\frac{3}{6}}(3t^2)^{\frac{2}{6}}\\ &= \sqrt[6]{(7w^3)^3}\cdot\sqrt[6]{(3t^2)^2}\\ &= \sqrt[6]{343w^9}\cdot\sqrt[6]{9t^4}\\ &= \sqrt[6]{(343w^9)(9t^4)}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \sqrt{7w^3}\cdot\sqrt[3]{3t^2} = \sqrt[6]{3087w^9t^4}$$

Los siguientes ejemplos, te ilustran la forma de proceder cuando haya que multiplicar polinomios que contengan radicales.

Ejemplo 1. Realizar la operación $\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)$

$$\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right) = \sqrt{3}\cdot\sqrt{2} - \sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\ \text{(propiedad distributiva)}$$

$$\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right) = \sqrt{6} - \sqrt{15}$$

Ejemplo 2. Realizar la operación $(\sqrt{a}-1)(\sqrt{b}+2)$

$$\begin{aligned}(\sqrt{a}-1)(\sqrt{b}+2) &= \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+2\sqrt{a}-1\sqrt{b}-2\\ (\sqrt{a}-1)(\sqrt{b}+2) &= \sqrt{ab}+2\sqrt{a}-\sqrt{b}-2\end{aligned}$$

Ejemplo 3. Realizar la operación $\sqrt{7}(\sqrt[3]{3}-\sqrt{5})$

$$\begin{aligned}\sqrt{7}(\sqrt[3]{3}-\sqrt{5}) &= \sqrt{7}\cdot\sqrt[3]{3}-\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}\\ &= 7^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{3}} - \sqrt{(7)\,(5)}\\ &= 7^{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3}}3^{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}}-\sqrt{35}\\ &= 7^{\frac{3}{6}}\cdot 3^{\frac{2}{6}}-\sqrt{35}\\ &= \sqrt[6]{7^3}\cdot\sqrt[6]{3^2}-\sqrt{35}\\ &= \sqrt[6]{343}\cdot\sqrt[6]{9}-\sqrt{35}\\ &= \sqrt[6]{(343)\,(9)}-\sqrt{35}\end{aligned}$$

→ Los radicales $\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}$ se expresan directamente en forma de un solo radical $\sqrt{35}$, porque tienen el mismo índice de la raíz.

$$\sqrt{7}(\sqrt[3]{3}-\sqrt{5}) = \sqrt[6]{3087}-\sqrt{35}$$

Ejemplo 4. Realizar la operación $(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

Desarrollamos como binomios conjugados

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3}) &= \sqrt{2}^2-\sqrt{3}^2\\ &= 2-3\\ (\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3}) &= -1\end{aligned}$$

EJERCICIO

1. Efectúa la operación indicada y expresa el resultado en su forma más simple.

a) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}$

b) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{10}$

c) $5\sqrt{6}\cdot\sqrt{8}$

d) $6\sqrt{2x}\cdot\sqrt{3y}$

e) $\sqrt{5zt}\cdot\sqrt{3z}$

f) $\frac{2}{5}\sqrt{15}\cdot\sqrt{15}$

g) $\frac{2}{9}\sqrt{13}\cdot\frac{7}{3}\sqrt{13}$

h) $\sqrt[3]{3m} \cdot \sqrt[3]{7q}$

i) $4\sqrt[4]{4xy^3} \cdot \sqrt[4]{64x^3y}$

j) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{2xw} \cdot \frac{1}{2}\sqrt[3]{4x^2}$

k) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{5}$

l) $3\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[4]{9}$

m) $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{5}$

n) $\sqrt[5]{5} \cdot \sqrt[3]{7}$

o) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{3}$

p) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}$

q) $\sqrt[3]{x^2y} \cdot \sqrt[4]{w}$

r) $\sqrt[3]{st^2} \cdot \sqrt{t^2w}$

s) $4m\sqrt[3]{u} \cdot \sqrt[4]{t}$

t) $\frac{2m}{5}\sqrt[4]{6m} \cdot \sqrt{2m}$

2. Realiza las siguientes multiplicaciones de polinomios con radicales.

a) $\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{5})$

b) $\sqrt{7}(\sqrt{7} - \sqrt[3]{4})$

c) $\sqrt[4]{2}(3 - \sqrt[3]{4})$

d) $\sqrt[3]{4}(\sqrt{7} - \sqrt[4]{6})$

e) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$

f) $(\sqrt{3a} - \sqrt{3b})^2$

g) $(a - \sqrt{3b})(a + \sqrt{3b})$

h) $(3\sqrt{7a} - \sqrt[3]{b})^2$

i) $(\sqrt[4]{u} - \sqrt[3]{t})^2$

j) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^3$

C. División de radicales.

Recurriendo a la ley $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$,

se realiza la división de radicales.

Al igual que en la operación de multiplicar, se requiere en la -- división que los índices de las raíces respectivas del numerador y denominador sean iguales al índice de la raíz, en el radical - resultante

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$ mismo índice de la raíz.

Ejemplo 1. Efectuar la operación $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}}$

$$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{9}{3}}$$

$$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Ejemplo 2. Efectuar la operación $\frac{\sqrt[3]{27a^2b}}{\sqrt[3]{9b}}$

$$\frac{\sqrt[3]{27a^2b}}{\sqrt[3]{9b}} = \sqrt[3]{\frac{27a^2b}{9b}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{27a^2b}}{\sqrt[3]{9b}} = \sqrt[3]{3a^2}$$

Ejemplo 3. Realizar la operación $\frac{2s\sqrt[4]{8t^2}}{\sqrt[4]{2t}}$

$$\frac{2s\sqrt[4]{8t^2}}{\sqrt[4]{2t}} = 2s\sqrt[4]{\frac{8t^2}{2t}}$$

$$\frac{2s\sqrt[4]{8t^2}}{\sqrt[4]{2t}} = 2s\sqrt[4]{4t}$$

La división de radicales, incluye en caso de ser necesaria, la racionalización.

Ejemplo 4. Efectuar la operación $\frac{\sqrt[3]{3w^2t}}{\sqrt[3]{6wt^2}}$

$$\frac{\sqrt[3]{3w^2t}}{\sqrt[3]{6wt^2}} = \sqrt[3]{\frac{3w^2t}{6wt^2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{w}{2t}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{w}}{\sqrt[3]{2t}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{w}}{\sqrt[3]{2t}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4t^2}}{\sqrt[3]{4t^2}} \Bigg\}$$ Este paso se justifica a partir de la propiedad multiplicativa del uno.

$$= \frac{\sqrt[3]{(w)(4t^2)}}{\sqrt[3]{(2t)(4t^2)}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{4t^2w}}{\sqrt[3]{8t^3}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{3w^2t}}{\sqrt[3]{6wt^2}} = \frac{\sqrt[3]{4t^2w}}{2t}$$

En algunos casos, la división consiste solamente en la racionalización del denominador.

Ejemplo 5. Efectuar la división $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})} \cdot \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-\sqrt{5})}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}-1\cdot\sqrt{2}+1\cdot\sqrt{5}}{2-5}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{15}-\sqrt{2}+\sqrt{5}}{-3}$$

Para dividir radicales con diferente índice, se procede de la siguiente manera.

Ejemplo 6. Efectuar la división. $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$

Como primer paso, representamos cada radical, como una expresión exponencial equivalente:

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \frac{4^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{2}}}$$

y se multiplica cada exponente fraccionario, por una fracción equivalente a la unidad, que permita que los exponentes tengan un mismo denominador.

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \frac{4^{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}}}{2^{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3}}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \frac{4^{\frac{2}{6}}}{2^{\frac{3}{6}}}$$

Ahora, pasando de estas nuevas expresiones exponenciales a radicales:

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{2^3}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[6]{16}}{\sqrt[6]{8}}$$

Como puedes observar, en el miembro derecho de la igualdad, se ha cumplido con la condición de tener un mismo índice de la raíz; por lo que podemos proceder a realizar la división.

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{\frac{16}{8}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$$

Ejemplo 7. Efectuar la división $\dfrac{\sqrt{2a^3}}{\sqrt[3]{4a}}$

$$\frac{\sqrt{2a^3}}{\sqrt[3]{4a}} = \frac{(2a^3)^{\frac{1}{2}}}{(4a)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{(2a^3)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3}}}{(4a)^{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}}}$$

$$= \frac{(2a^3)^{\frac{3}{6}}}{(4a)^{\frac{2}{6}}}$$

$$= \frac{\sqrt[6]{(2a^3)^3}}{\sqrt[6]{(4a)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt[6]{8a^9}}{\sqrt[6]{16a^2}}$$

$$= \sqrt[6]{\frac{8a^9}{16a^2}}$$

$$= \sqrt[6]{\frac{a^7}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt[6]{a^7}}{\sqrt[6]{2}}$$

$$= \frac{a\sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{2}} \cdot \frac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt[6]{32}}$$ } Paso que se justifica -- a partir de la propiedad multiplicativa del uno.

$$= \frac{a\sqrt[6]{32a}}{\sqrt[6]{64}}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2a^3}}{\sqrt[3]{4a}} = \frac{a\sqrt[6]{32a}}{2}$$

EJERCICIO

1. Efectúa las siguientes divisiones y expresa el resultado en su forma más simple.

a) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{4}}$

b) $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$

c) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$

d) $\sqrt[3]{16x^2y} \div \sqrt[3]{4xy}$

e) $\sqrt[5]{w^2t^2z} \div \sqrt[5]{wt^2z}$

f) $\sqrt{ab} \div \sqrt{b^2}$

g) $7\sqrt[3]{h^2m^2} \div \sqrt[3]{3hm}$

h) $11\sqrt[4]{m^3t^2} \div \sqrt{m^2t^3}$

i) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

j) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$

k) $\frac{\sqrt{6}}{1 - \sqrt{2}}$

l) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{a} - \sqrt{c}}$

m) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3} - 2}$

n) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{5}$

o) $2\sqrt{7} \cdot 3\sqrt[4]{4}$

p) $6\sqrt[3]{2a} \cdot \sqrt[5]{3a}$

q) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2} - 1}$

r) $\frac{\sqrt[4]{6}}{1 - \sqrt{7}}$

s) $\frac{\sqrt[3]{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - \sqrt[4]{4}}$

t) $\frac{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{11}}$

D. Adición y sustracción de radicales.

Para efectuar la adición y sustracción de radicales, nos valdremos de la propiedad distributiva de la multiplicación; para la aplicación de esta propiedad en este tema, la podemos enunciar como:

$\sqrt[n]{a}\,(b + c - d) = b\sqrt[n]{a} + c\sqrt[n]{a} - d\sqrt[n]{a}$ Propiedad Distributiva.

por la propiedad simétrica tenemos:

$$b\sqrt[n]{a} + c\sqrt[n]{a} - d\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}\,(b+c-d)$$

Observando detenidamente la última expresión, se concluye que: para sumar radicales, éstos tienen que cumplir con dos condiciones: primero tener el mismo índice de la raíz y segundo tener un mismo radicando.

$b\sqrt[n]{a} + c\sqrt[n]{a} - d\sqrt[n]{a}$

mismo índice de la raíz.

mismo radicando.

> Radicales semejantes: son los que tienen un mismo índice de la raíz y un mismo radicando. Radicales no semejantes son aquéllos que no cumplen las dos condiciones.

Radicales no semejantes: $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$; $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt{7}$

Los siguientes ejemplos nos muestran la forma de sumar radicales semejantes.

Ejemplo 1. Efectuar la operación. $5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$

$$= \sqrt{3}\,(5 - 3 + 7 - 2)$$

$$= \sqrt{3}\,(7)$$

$$\therefore 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

Ejemplo 2. Efectuar la operación. $5\sqrt[3]{7} - 2\sqrt[3]{7} + 11\sqrt[3]{7}$

$$5\sqrt[3]{7} - 2\sqrt[3]{7} + 11\sqrt[3]{7} = (5 - 2 + 11)\sqrt[3]{7}$$

$$5\sqrt[3]{7} - 2\sqrt[3]{7} + 11\sqrt[3]{7} = 14\sqrt[3]{7}$$

Ejemplo 3. Reducir los radicales semejantes. $\sqrt{6} - 2\sqrt{6} + 3\sqrt[4]{6} - \sqrt[4]{6}$

$$\sqrt{6} - 2\sqrt{6} + 3\sqrt[4]{6} - \sqrt[4]{6} = (1-2)\sqrt{6} + (3 - 1)\sqrt[4]{6}$$

$$\sqrt{6} - 2\sqrt{6} + 3\sqrt[4]{6} - \sqrt[4]{6} = -\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6}$$