En caso de que tengamos diferente radicando, se procede conforme lo indica el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4. Efectuar la operación $\sqrt{18} + \sqrt{128} - \sqrt{50}$

Como primer paso, se factorizan los radicandos en forma conveniente.

$$\sqrt{18} + \sqrt{128} - \sqrt{50} = \sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{64 \cdot 2} - \sqrt{25 \cdot 2}$$

En seguida se aplica la ley: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

$$\sqrt{18} + \sqrt{128} - \sqrt{50} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{64} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{25} \cdot \sqrt{2}$$

$$= 3\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$$

En el miembro derecho de la igualdad, se ha cumplido con las dos condiciones necesarias para sumar radicales. Por lo que se procede a realizar la operación:

$$\sqrt{18} + \sqrt{128} - \sqrt{50} = (3 + 8 - 5)\sqrt{2}$$

$$\boxed{\sqrt{18} + \sqrt{128} - \sqrt{50} = 6\sqrt{2}}$$

Ejemplo 5. Reducir los radicales semejantes.

$$\sqrt{45} - \sqrt{245} + \sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{108}$$

$$\sqrt{45} - \sqrt{245} + \sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{108} = \sqrt{9 \cdot 5} - \sqrt{49 \cdot 5} + \sqrt[3]{8 \cdot 4} + \sqrt[3]{27 \cdot 4}$$

$$= \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{49} \cdot \sqrt{5} + \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{4}$$

$$= 3\sqrt{5} - 7\sqrt{5} + 2\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{4}$$

$$= (3 - 7)\sqrt{5} + (2 + 3)\sqrt[3]{4}$$

$$\therefore \sqrt{45} - \sqrt{245} + \sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{108} = -4\sqrt{5} + 5\sqrt[3]{4}$$

Ejemplo 6. Reducir los radicales semejantes.

$$\sqrt{75a} + \sqrt{147a} - \sqrt[3]{40b^2} - \sqrt[3]{320b^2}$$

$$\sqrt{75a} + \sqrt{147a} - \sqrt[3]{40b^2} - \sqrt[3]{320b^2} = \sqrt{25 \cdot 3a} + \sqrt{49 \cdot 3a} - \sqrt[3]{8 \cdot 5b^2} - \sqrt[3]{64 \cdot 5b^2}$$

$$= \sqrt{25} \cdot \sqrt{3a} + \sqrt{49} \cdot \sqrt{3a} - \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{5b^2} - \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{5b^2}$$

$$= 5\sqrt{3a} + 7\sqrt{3a} - 2\sqrt[3]{5b^2} - 4\sqrt[3]{5b^2}$$

$$= (5 + 7)\sqrt{3a} - (2+4)\sqrt[3]{5b^2}$$

$$\therefore \sqrt{75a} + \sqrt{147a} - \sqrt[3]{40b^2} - \sqrt[3]{320b^2} = 12\sqrt{3a} - 6\sqrt[3]{5b^2}$$

Es importante analizar detenidamente las raíces de índice par, para números reales,
por ejemplo: $\sqrt{4} = +2$

$\sqrt{4} = -2$

ambos números el $(+2)$ y el (-2) son raíces de $\sqrt{4}$ porque:

$$\sqrt{4} = \sqrt{(+2)(+2)} = +2$$

$$\sqrt{4} = \sqrt{(-2)(-2)} = \sqrt{(-2)^2} = -2$$

$$\therefore \sqrt{4} = \pm 2$$

La expresión $\sqrt{4} = \pm 2$, es una forma compacta de representar

$$\sqrt{4} = +2 \text{ y } \sqrt{4} = -2.$$

Ahora bien, este fue el caso de un número positivo. ¿Qué ocurre si quisiéramos obtener la raíz cuadrada de un número negativo?

$$\sqrt{-4} = (+2)(-2) = ?$$

El (-2) no es raíz de $\sqrt{-4}$, ya que tiene que cumplir como toda raíz cuadrada que, al elevarlo al cuadrado, nos dé nuevamente el valor del radicando.

$$(-2)^2 = (-2)(-2) = +4$$

o bien si escogemos el $(+2)$, también tiene que cumplir con la condición de que al elevarlo al cuadrado nos dé el mismo radicando.

$$(+2)^2 = (+2)(+2) = +4$$

Como ves, <u>ninguno</u> de los dos valores es la raíz de $\sqrt{-4}$. Por lo que podemos generalizar que: <u>no existe ningún número real</u>, que <u>sea la raíz cuadrada de un número negativo</u>.
Razón por la cual tenemos la necesidad de utilizar un sistema de numeración que nos permita obtener la raíz cuadrada de números negativos.

Este tipo de números se denominan <u>imaginarios</u> y se manejan conforme lo indican los ejemplos:

Ejemplo 1. Obtener la raíz de $\sqrt{-4}$

$$\sqrt{-4} = \sqrt{(4)(-1)} = \pm\sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}$$

$$= \pm 2\sqrt{-1}$$

esta raíz del negativo uno, se representa por la letra minúscula $i = \sqrt{-1}$; lo que facilita su escritura:

$$\sqrt{-4} = \pm 2i$$

Ejemplo 2. Obtener la raíz de $\sqrt{-25}$

$$\sqrt{-25} = \sqrt{(25)(-1)}$$

$$= \pm\sqrt{25} \cdot \sqrt{-1}$$

$$= \pm 5\sqrt{-1}$$

$$\therefore \sqrt{-25} = \pm 5i$$

Ejemplo 3. Realizar la operación $\sqrt{-121}$

$$\begin{aligned}\sqrt{-121} &= \sqrt{(121)(-1)}\\ &= \pm\sqrt{121}\cdot\sqrt{-1}\\ &= \pm\ 11\sqrt{-1}\\ \sqrt{-121} &= \pm\ 11i\end{aligned}$$

Cuando se extrae la raíz cuadrada de un número negativo, se obtiene un <u>número imaginario</u>.

Cuando un número real y un imaginario se suman algebraicamente, dan lugar a un número <u>complejo</u>, que se expresa de manera general como:

$$\underbrace{a}_{\text{parte real}} + \underbrace{bi}_{\text{parte imaginaria}} \longrightarrow \text{número complejo}$$

Cuando la literal $b=0$, al número complejo se le llama real y cuando $a=0$, al número complejo se le llama imaginario puro.

a la literal <u>i</u> $=\sqrt{-1}$, se le llama <u>unidad imaginaria</u>.

Como puedes observar, este es el recurso para obtener la raíz par de un número negativo.

La siguiente ilustración te enseña la manera de determinar el valor de toda potencia entera de i.

$i^2 = i\cdot i$ como $i = \sqrt{-1}$

$i^2 = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}$

$i^2 = \sqrt{(-1)(-1)}$

$\boxed{i^2 = -1}$

$i^3 = i^2\cdot i$ como $i^2 = -1$

$i^3 = -1\cdot i$

$\boxed{i^3 = -i}$

$i^4 = i^2\cdot i^2$ como $i^2 = -1$

$i^4 = (-1)(-1)$

$\boxed{i^4 = 1}$

$i^5 = i^4\cdot i$ como $i^4 = 1$

$i^5 = 1\cdot i$

$\boxed{i^5 = i}$

En la tabla siguiente se encuentran los valores de i, hasta la vigésima potencia. Se te sugiere que los compruebes.

$$\begin{array}{llll}
i & = \sqrt{-1} & & \\
i^2 & = (\sqrt{-1})^2 & = -1 & \\
i^3 & = i^2\cdot i & = (-1)\ i & = -i\\
i^4 & = i^2\cdot i^2 & = (-1)(-1) & = 1\\
i^5 & = i^4\cdot i & = (1)(i) & = i\\
i^6 & = i^4\cdot i^2 & = (1)(-1) & = -1\\
i^7 & = i^6\cdot i & = (-1)(i) & = -i\\
i^8 & = i^4\cdot i^4 & = (1)(1) & = 1\\
i^9 & = i^8\cdot i & = (1)(i) & = i\\
i^{10} & = i^8\cdot i^2 & = (1)(-1) & = -1\\
i^{11} & = i^{10}\cdot i & = (-1)(i) & = -i\\
i^{12} & = i^{10}\cdot i^2 & = (-1)(-1) & = 1\\
i^{13} & = i^{12}\cdot i & = (1)(i) & = i\\
i^{14} & = i^{12}\cdot i^2 & = (1)(-1) & = -1\\
i^{15} & = i^{14}\cdot i & = (-1)(i) & = -i\\
i^{16} & = i^8\cdot i^8 & = (1)(1) & = 1\\
i^{17} & = i^{16}\cdot i & = (1)(i) & = i\\
i^{18} & = i^{16}\cdot i^2 & = (1)(-1) & = -1\\
i^{19} & = i^{18}\cdot i & = (-1)(i) & = -i\\
i^{20} & = i^{16}\cdot i^4 & = (1)(1) & = 1
\end{array}$$

Cuando el exponente de la unidad imaginaria es múltiplo de 4, se obtiene como resultado <u>la unidad</u>. Esto es:

$1^{4n} = 1$, para toda $n \in E$.

Observa que las flechas en la tabla nos indican que los valores se repiten y además que sólo existen 4 variantes, éstas son: $i, -i, -i, 1$.

En una unidad posterior te daremos más información acerca de éste nuevo conjunto de números imaginarios.

EJERCICIO.

1. Efectúa las operaciones indicadas.

a) $\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 8\sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{7} - 4\sqrt[3]{7} + 11\sqrt[3]{7}$

c) $\sqrt[4]{3} - 11\sqrt[4]{3} + 25\sqrt[4]{3}$

d) $\sqrt{147} - \sqrt{48} - \sqrt{108}$

e) $\sqrt{121a} - \sqrt{169a} - \sqrt{a}$

f) $\sqrt[3]{54a} + \sqrt[3]{2a} + \sqrt[3]{250a}$

g) $\sqrt{64st} - \sqrt{121st} + \sqrt[3]{340} - \sqrt[3]{605}$

h) $\sqrt[4]{7} - \sqrt[4]{112} + \sqrt{162} + \sqrt{242}$

i) $\sqrt[3]{3000} + \sqrt[3]{1331} - \sqrt[4]{324} + \sqrt[4]{64}$

j) $\sqrt{19} - \sqrt[3]{17} + \sqrt{76} - \sqrt[3]{136}$

2. Encuentra las siguientes raíces imaginarias.

a) $\sqrt{-64}$

b) $2\sqrt{-8}$

c) $3\sqrt{-25}$

d) $4\sqrt{-\frac{4}{25}}$

e) $\sqrt{-\frac{16}{81}}$

f) $\sqrt{-\frac{49}{4}}$

RESUMEN

En una potencia como b^m, $\underline{b}$ se llama la base y $\underline{m}$ el exponente.

Leyes de los exponentes enteros positivos.

Si $\underline{a}$ y $\underline{b}$ son números reales, (donde $\underline{a}$ y $\underline{b}$ se usarán como bases)- y $\underline{m}$,$\underline{n}$ son números enteros positivos, entonces

LEYES	RESTRICCIONES MATEMATICAS
1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	
2) $(a\cdot b)^m = a^m \cdot b^m$	
3) $(a^m)^n = a^{mn}$	
4) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	, si $m>n$ y $a\neq 0$
5) $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$	, si $n>m$ y $a\neq 0$
6) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	, si $b\neq 0$

Exponente cero

Algunas extensiones de las leyes de exponentes son:

$a^0 = 1$, si $a\neq 0$

$\frac{0}{0}$ es una fracción indeterminada.

$\frac{a}{a} = 1$, si $a\neq 0$

$\frac{0}{a} = 0$, si $a\neq 0$

Se llama restricción matemática para una variable, en una expresión, al valor o conjunto de valores, para los cuales la expresión no está definida.