APUNTES DEL CURSO
ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS II

Jorge Chávez

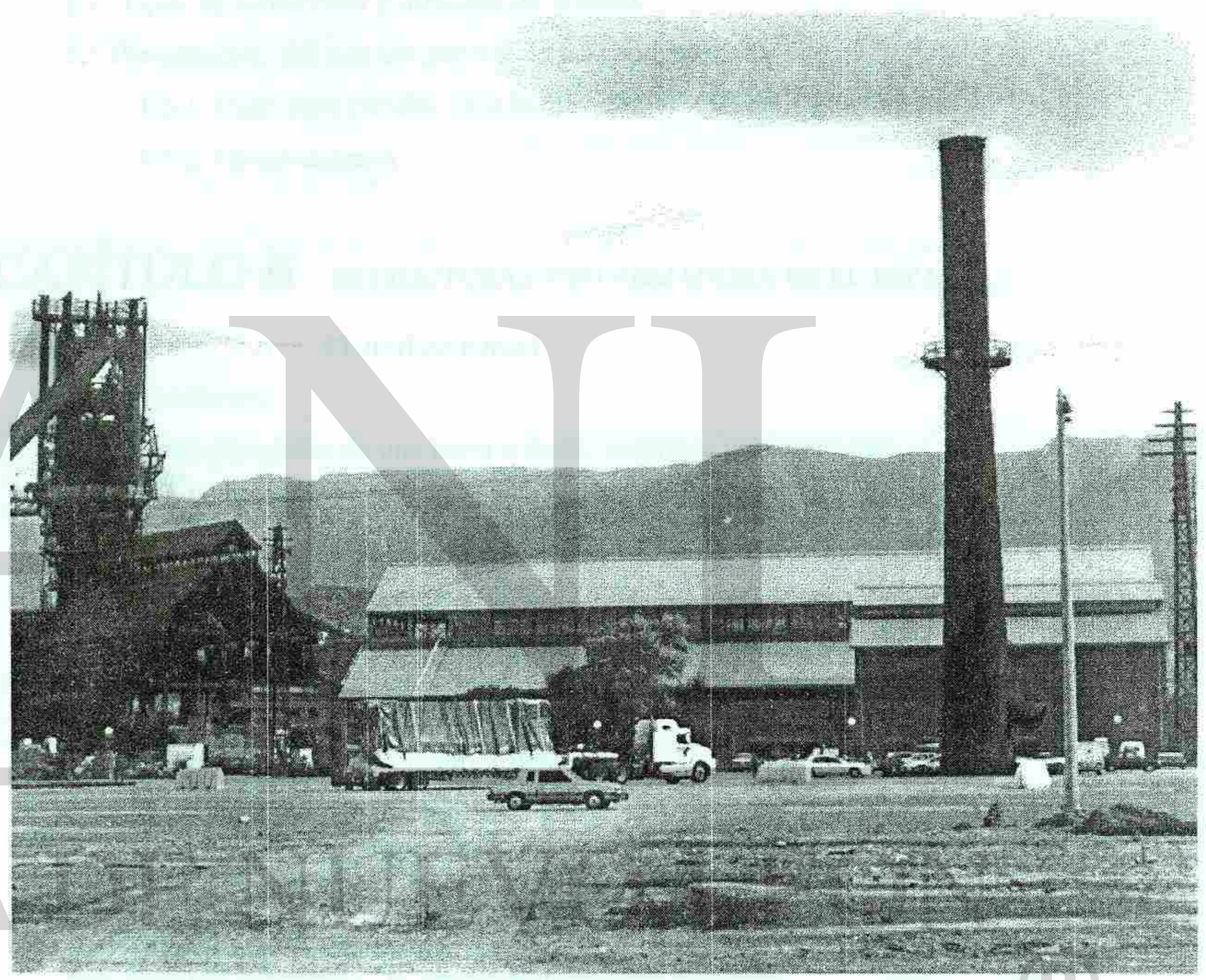
Facultad de Ingeniería Civil, U.A.N.L.
Agosto 2001

APUNTES DEL CURSO
ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS II

Jorge Chávez

APUNTES DEL CURSO
ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS II

Jorge Chávez



Facultad de Ingeniería Civil, U.A.N.L.
Agosto 2001

CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS ESTRUCTURAL

CAPÍTULO II ESTRUCTURAS TIPO ARMADURA EN EL ESPACIO BIDIMENSIONAL

BIBLIOGRAFÍA

Ghali, A. y Neville A., "Análisis estructural", ed. DIANA, edición 1983.
Levi, Enzo, ""Elementos de Mecánica del Medio Continuo", ed. LIMUSA, edición 1989.
Martin, H.C., "Introduction to matrix methods of structural analysis"
Meek, John L., "Matrix Structural Analysis"
Sterling Kinney, J., "Análisis de estructuras indeterminadas", ed. CECSA, edición 1986.
Wang, Chu-Kia, "Matrix methods of structural análisis", ed. Textbook Company, edición 1966.
Zienkiewicz, O. C., "El método de los elementos finitos", ed. Reverté, S.A., edición 1982.

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS ESTRUCTURAL

1.1. INTRODUCCIÓN

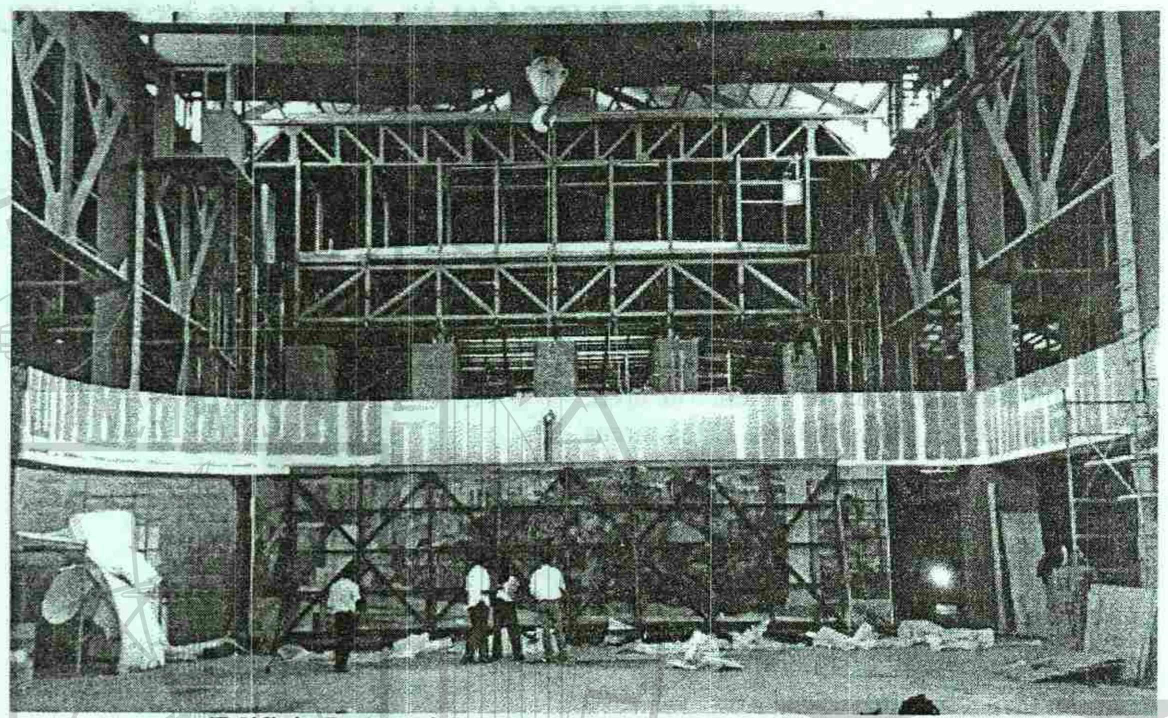
Para la realización exitosa de las grandes (y pequeñas) obras de la ingeniería civil, deben ejecutarse varias tareas. Estas tareas son como los eslabones de una gran cadena y van desde la concepción de la idea hasta la entrega del producto terminado al cliente y listo para ser utilizado.

Los "eslabones" intermedios más importantes de esta cadena son: estudios de factibilidad económica, la búsqueda de capital para realizarla, estudios del sitio tales como los topográficos y geotécnicos, elección del tipo de estructuración para nuestra obra, elaboración de los modelos físico-matemáticos para la predicción de fuerzas y deformaciones en las diferentes partes de la estructura, diseño de los elementos estructurales, elaboración de los planos constructivos, ejecución del proyecto en el sitio de la obra, control de la calidad durante la construcción.

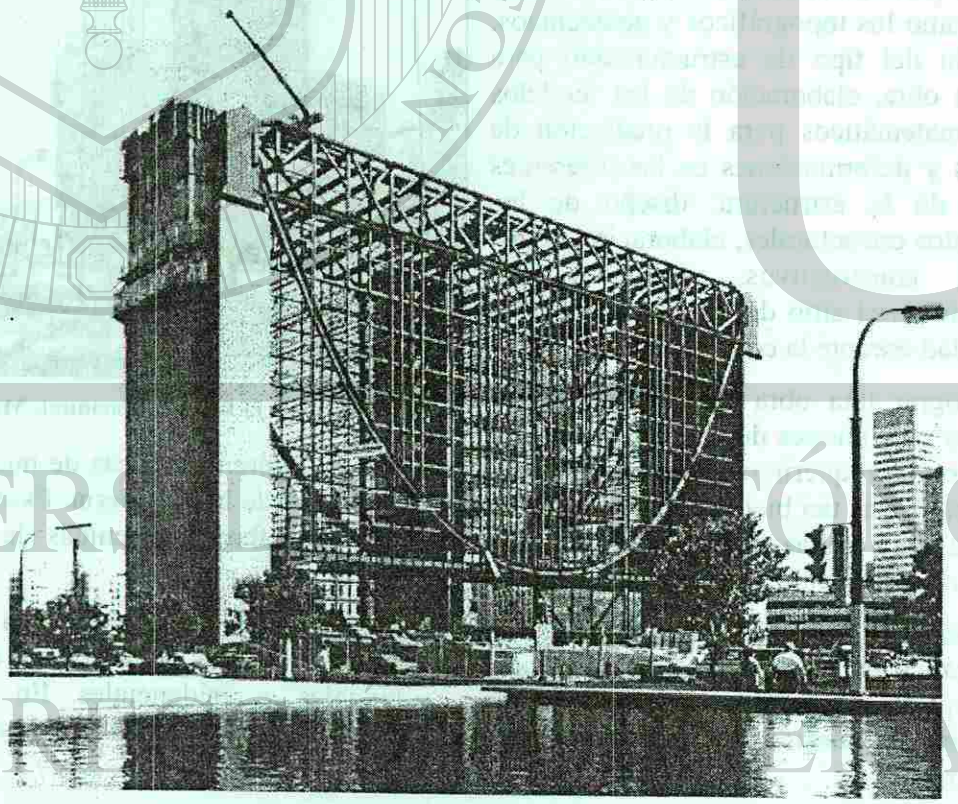
Edificio de la Lotería Nacional, México, D.F

Para lograr una obra terminada con las mejores condiciones de calidad, seguridad y economía, requerimos esforzarnos para lograr que las diferentes etapas de nuestro proyecto sean realizadas tan bien como lo permita el *estado del arte* de la ingeniería. Esto nos motiva a trabajar para lograr una comprensión suficiente de las diferentes técnicas de la ingeniería necesarias para realizar estas tareas.

En este curso trabajaremos y aprenderemos lo necesario para realizar la etapa de modelado matemático de estructuras formadas por "barras rectas". Este es un grupo de estructuras de gran aplicación en proyectos industriales, comerciales y residenciales. En las imágenes siguientes se muestran ejemplos de estructuras que podemos modelar utilizando el concepto de "barra recta".



Edificio Industrial adaptado como centro de las artes (Parque Fundidora en Monterrey, 2000)



Banco de la reserva Federal en Minneapolis, EUA

En la práctica profesional de la ingeniería nos encontraremos con otras estructuras que no se pueden modelar apropiadamente con barras rectas, i.e. silos, chimeneas, cascarones, etc.

Para el análisis de este tipo de estructuras necesitamos manejar herramientas analíticas que no están incluidas en el alcance de este curso. Estas herramientas de análisis se pueden adquirir en cursos de maestría en el área de estructuras o de manera autodidacta mediante la consulta de libros especializados en el tema. Una de estas herramientas es el llamado "Método del Elemento Finito", aplicable a estructuras formadas por placas o cascarones.

Cuando iniciamos el estudio de un nuevo tema de la ingeniería, surge de manera natural la pregunta acerca de la pertinencia de este a nuestra formación profesional. Es evidente para quien quiera verlo, que la ingeniería civil ha tenido y tiene un enorme impacto en la calidad de vida de las sociedades modernas. Los grandes edificios, autopistas, puentes, presas, estadios, etc. que llenan nuestras ciudades y el país, se tuvieron que "construir" primero en las mentes de los ingenieros que las diseñaron, utilizando para ello, las herramientas analíticas que la ingeniería civil ha ido desarrollando a través de su historia.

En los primeros tiempos estas herramientas eran mas bien burdas, aunque con el tiempo evolucionaron y se volvieron más precisas, gracias a las experiencias exitosas (y los fracasos) obtenidas durante su uso en la realización de las obras de ingeniería que la sociedad necesitaba.

En los tiempos actuales, estas herramientas se encuentran en un estado de desarrollo tal que pudieran llevar a pensar a los ingenieros jóvenes que con ellas podemos preveer completamente el "comportamiento" de las estructuras durante su vida útil.

Sin embargo no creemos sensato confiar ciegamente en estas herramientas de modelado de estructuras, pues la experiencia nos ha enseñado que la naturaleza no se puede predecir fielmente a través del uso de modelos matemáticos simplistas por necesidad. Nuestras teorías son simples aproximaciones de lo que ocurre en la compleja realidad.

Hay demasiadas variables que deben ser tomadas en cuenta a la hora de diseñar una estructura, lo que obliga al ingeniero a simplificar, utilizando hipótesis de trabajo que solo se cumplen en ciertas condiciones, o, ignorando consciente o inconscientemente algunas de las variables. Todo esto introduce incertidumbres a nuestros modelos matemáticos.

A lo largo de nuestra vida profesional como ingenieros, nos especializaremos en ciertos tipos de estructuras y, con todo derecho, ganaremos experiencia y confianza en nuestra habilidad para construirlas exitosamente. Sin embargo jamás deberíamos perder el respeto a la naturaleza y las enormes fuerzas que en ella se desencadenan de tiempo en tiempo. Por eso al intentar la construcción de obras que se salgan de nuestra experiencia debemos proceder con cautela ya que el costo por no hacerlo es demasiado. En las siguientes fotografías se muestran estos efectos sobre estructuras pobremente diseñadas.

Terremoto en Turquía (1999)

Terremoto en Turquía (1999)

A este edificio le falta el primer piso.

La pedacería que se observa en la base del edificio son los restos del piso faltante.

Terremoto en Turquía (1999)

¿Y que pasó con las personas que habitaban estas edificaciones?

Efectos del Terremoto en México (1985)

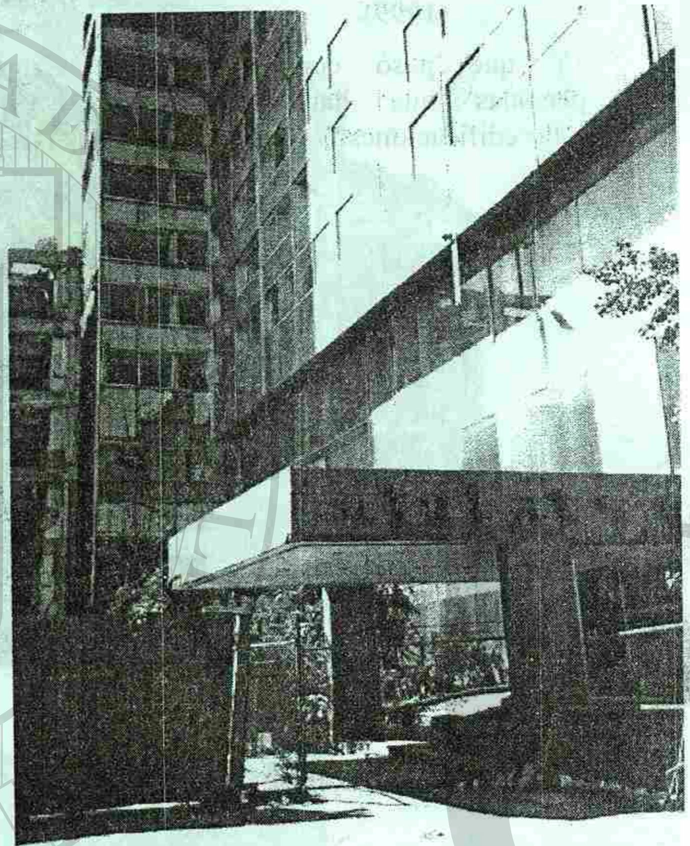
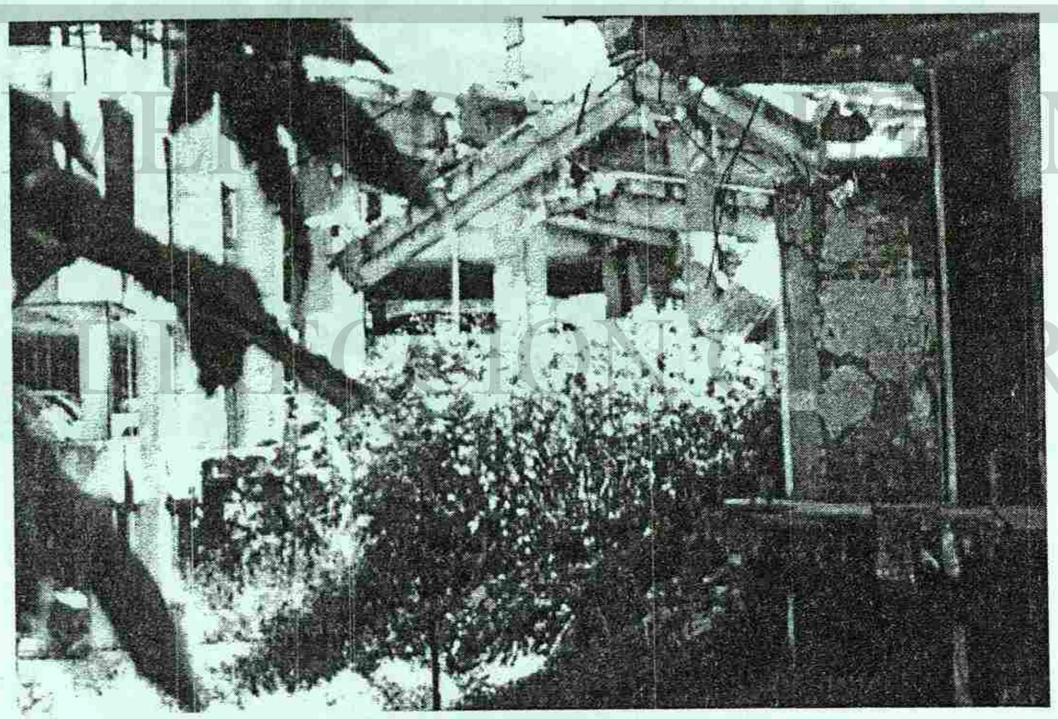


Figura de la derecha: Hotel ubicado frente a la Alameda Central de la Cd. De México. Actualmente el edificio (año 2001) se encuentra desocupado, y, como se pude observar en la fotografía, seriamente dañado.

¿Por qué no ha sido demolido o reparado después de 16 años de ocurrido el terremoto que lo dañó?

Figura inferior: Restos de un edificio que servía como cine. Actualmente se encuentra abandonado. En los dos casos mostrados, los propietarios han perdido una fuerte inversión realizada para la construcción del edificio.



En esta serie de fotografías se pretende mostrar al estudiante la seriedad y trascendencia del trabajo de un ingeniero civil, trabajo en el que existe permanentemente la probabilidad de falla, probabilidad que aumenta enormemente cuando las estructuras son diseñadas o construidas por ingenieros que no han entendido la responsabilidad que la sociedad les ha encomendado, y, realizan su trabajo con ignorancia o irresponsabilidad.

Por otro lado, el estudiante no se debe quedar con la impresión de que sus estructuras necesariamente fallarán, como las mostradas en las fotografías, y ,para entender que la ingeniería civil, ejercida con conocimiento y responsabilidad, permite dar bienestar a la sociedad para la que trabaja el ingeniero, bastará con observar la enorme cantidad de estructuras que están en pie a lo largo y ancho de nuestro país, cumpliendo la función para la que fueron construidas.

Así, el reto planteado al estudiante en este curso es: aprender y entender las herramientas analíticas que están a nuestra disposición, entendiendo sus limitaciones y utilizándolas con sensatez.

1.2 PROBLEMA GENERAL DEL ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS

Ya que esta asignatura de la carrera de Ingeniero Civil se denomina análisis de estructuras, parece razonable ponerse de acuerdo en lo que entenderemos de aquí en adelante como ***analizar una estructura***.

Analizar una estructura es cuantificar completamente l siguiente:

$\{\in\}$	Deformaciones unitarias del medio continuo que la forma.
$\{\sigma\}$	Esfuerzos asociados a las deformaciones sufridas por el medio continuo.
$\{\mathbf{d}\}$	Desplazamientos de los diferentes puntos del medio continuo que forma la estructura.

para realizar el análisis de una estructura, necesitamos conocer la siguiente información:

- $\{F\}$ Las fuerzas externas actuantes sobre la estructura y las fuerzas de cuerpo (peso propio, inercia, cambios de temperatura.)
- $[k]$ La *Rigidez* del medio continuo que forma la estructura.
- Las condiciones de frontera de la estructura. Así denominamos a las restricciones al desplazamiento impuestas por los soportes de la estructura.

Como ya se dijo en el artículo 1.0, el proceso de analizar una estructura es un paso previo al proceso de revisar que en todos los puntos materiales de la misma, se cumpla la ecuación básica del diseño estructural:

Acciones < Resistencias

En esta ecuación hay dos términos:

- El segundo se aprenderá a calcularlo en cursos posteriores de la carrera de Ingeniero Civil, tales como: Diseño de Estructuras de Concreto Reforzado, Diseño de Estructuras de Acero, Diseño de Puentes, etc.
- En cuanto al primer término, es tema de esta asignatura el aprender como cuantificarlas, complementando lo aprendido en cursos previos de: estática, mecánica de materiales (resistencia de materiales) y análisis de estructuras.

Dedicaremos el 100% de este curso al aprendizaje de una técnica matemática eficiente para el cálculo de las acciones (internas) de la estructura. Esta técnica la conoceremos como:

El Método General de Rigideces.

La utilizaremos para el análisis de estructuras que se puedan modelar exclusivamente con barras rectas.

Por supuesto, aparte de calcular las acciones internas en la estructura, tendremos que calcular las deformaciones internas y los desplazamientos de las estructuras, información que será útil cuando tengamos que revisar que los desplazamientos no excedan los máximos permisibles.

Las magnitudes aceptables de acciones internas y de desplazamientos, se obtienen de las recomendaciones de diseño plasmadas en los reglamentos de diseño.

Todo este proceso se puede interpretar de la siguiente forma: Al realizar modelos en nuestros escritorios de trabajo, modelos a partir de los cuales intentamos predecir las magnitudes máximas de esfuerzos y deformaciones, que podría tener la estructura que pretendemos construir, buscamos corregir nuestra idea original de estructura, modificándola como sea necesario, para lograr controlar dichas magnitudes máximas, y , todo esto, sin haber instalado un solo ladrillo de la estructura real.

Una vez realizado el proceso anterior, a satisfacción nuestra y de los reglamentos de construcción aplicables, finalmente, podemos proceder a construir el edificio, puente, bodega, o cualquier otra cosa que nos ocupe; con una razonable confianza en que funcionará correctamente y tendrá un nivel de seguridad estructural aceptable.

1.3 PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DEL ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS Y SU APLICACIÓN

Para poder realizar el análisis racional de las estructuras, debemos recurrir al uso de las herramientas matemáticas disponibles, basando nuestras deducciones en el conocimiento profundo de la "*naturaleza de las cosas*".

Este análisis racional debe basarse en los siguientes:

PRINCIPIOS LÓGICOS FUNDAMENTALES

1. Existe equilibrio estático en los sistemas estructurales estudiados.
2. Todos los sistemas estudiados están formados por un ***medio*** (material) ***continuo***.
3. Sus razonamientos deben ser objetivos.
4. Busca congruencia en sus deducciones.
5. Busca que los resultados calculados coincidan (tanto como sea posible) con mediciones en experimentos controlados.

Enseguida explicamos la naturaleza de cada uno de estos principios lógicos:

PRINCIPIOS FÍSICOS

1 ***Principio de equilibrio estático (de fuerzas).***

En realidad, este principio se refiere al equilibrio dinámico, sin embargo, en este curso, nos preocuparemos solo del equilibrio estático, es decir, cuando las fuerzas de inercia son nulas. Por supuesto esto es relativo a un sistema inercial de referencia, es decir, un sistema de referencia que se mueva a la misma velocidad que nuestra estructura. Para fines prácticos, podemos tomar como sistema de referencia el globo terrestre.

Este principio fue expresado por Newton en el año de 1687 en el primer libro de su tratado *Philosophiae Naturalis Principia Matemática*. En terminos matemáticos se puede expresar como:

$$\text{fuerzas externas} + \text{fuerzas internas} = \text{cero}$$

Este principio expresa, matemáticamente, la condición de las estructuras que nos interesa construir: NO SE MUEVEN respecto al sistema inercial de referencia (la tierra).

2 ***Principio de coincidencia con la realidad sensible.***

Por supuesto que la teoría matemática, sus axiomas y sus conclusiones, deben conducirnos a resultados que puedan ser comprobados experimentalmente, buscando que la diferencia entre las magnitudes calculadas *versus* las magnitudes medibles en un experimento controlado, tengan un margen de error tolerable por la práctica profesional de la ingeniería Civil, posiblemente menor del 10%. Este principio de coincidencia está obligado por el uso del método científico, el cual postula la objetividad de nuestras conclusiones.

PRINCIPIOS MATEMÁTICOS

1 ***Principio del Medio Continuo.***

[**]El ingeniero suele enfrentarse a muchos problemas mecánicos cuya solución no puede obtenerse por medio de la mecánica de los puntos materiales y de los cuerpos rígidos. Ejemplos de tales problemas son los que surgen al analizar flexiones o torsiones de trabes y columnas, consolidación o deslizamiento de masas de suelo, vibración de maquinaria, escurrimiento de líquidos y gases. Todos estos casos se relacionan con medios deformables caracterizados por el hecho de que sus átomos o moléculas están tan próximos unos a otros que el material puede considerarse, macroscópicamente, como una masa homogénea, cuyas deformaciones deben poder preverse sin necesidad de considerar el movimiento de cada una de las partículas que la componen.

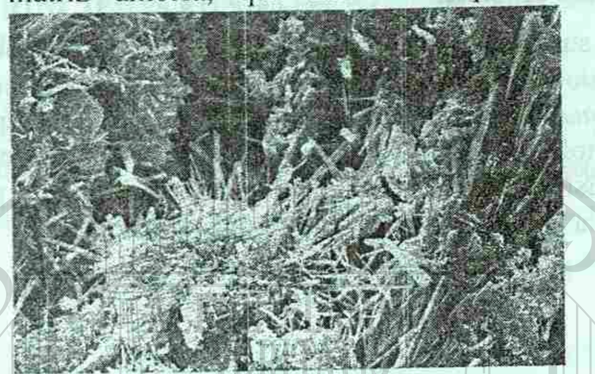
Este resultado, producto de la experiencia, sugiere que dichos materiales pueden idealizarse como *medios continuos,* carentes de huecos o separaciones entre sus partículas. Normalmente se acepta, además, que tales medios sean también *isótropos.* La isotropía supone que la microestructura del material consiste de elementos orientados al azar, y excluye, por consiguiente, la existencia de direcciones "preferenciales" para sus propiedades mecánicas. Así, en un material isótropo conductor, el calor se difunde con igual rapidez en todas las direcciones. También, la isotropía implica que el efecto de deformación producido en el material por determinado sistema de fuerzas no depende de la orientación del material mismo; en otras palabras, que si sujetamos a determinados esfuerzos, por ejemplo, un cubo de cierta sustancia sólida, la deformación resultante no dependerá de la dirección según la cual el cubo ha sido recortado de un pedazo más grande de material.

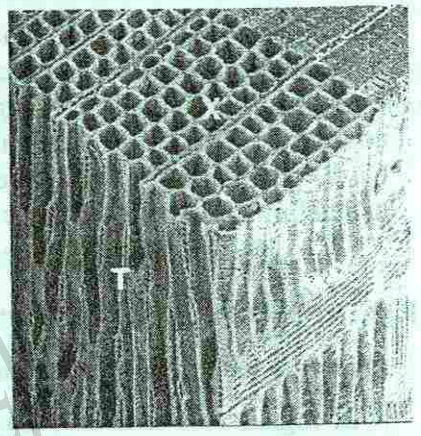
Estas idealizaciones se justifican debido a que actualmente ofrecen el camino más viable para un enfoque matemático de los problemas de deformaciones y escurrimientos de sólidos y fluidos; sin embargo, no dejan de constituir un modelo fenomenológico que sólo es aceptable bajo un punto de vista macroscópico.

Si observamos al microscopio los sólidos utilizados por el ingeniero, vemos que la mayoría posee una estructura cristalina y que esos cristales constituyen granos separados entre sí. Dentro de cada grano se observa el mismo arreglo cristalográfico, aunque el arreglo pueda variar de un *cristal* a otro. Los *cristales* a veces están sumergidos en una

[**] Encerrado entre estos símbolos, se encuentra la cita textual de la explicación que da el Dr. Enzo Levi en su libro de elementos de MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO.

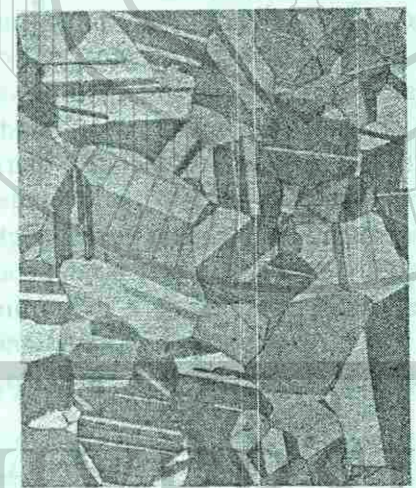
matriz amorfa, que llena el espacio intergranular (fotografías siguientes). Estas


Cristales en etapas tempranas del concreto


Estructura de la madera

características estructurales pueden, en determinados casos, provocar efectos que la hipótesis del medio continuo no está naturalmente capacitada para justificar.

Latón (X 100 aumentos)



Para aclarar las ideas, supongamos que sobre un material cristalino (por ejemplo, un metal) actúen ciertas fuerzas que tienden a deformarlo. Esto significa que los cristales tenderán a desplazarse, relativamente unos a otros, y cambiar de posición. Sin embargo, si las fuerzas no son de gran magnitud y se aplican durante un tiempo corto, es probable que al eliminarse tales fuerzas, los granos, que deben haberse movido poco con respecto a su posición original, vuelvan a recuperarla porque ésta constituye el acomodo más compacto y estable. Pero si las fuerzas son *intensas,* es probable que provoquen "dislocaciones" progresivas que desalojen los granos y los alejen demasiado de su *posición* original dando por resultado que, al cesar las fuerzas, el material se encuentre deformado permanentemente. En el primer caso, nos enfrentamos a un *comportamiento elástico,* y, en el segundo caso, a un *flujo.* Así que el hecho de que un mismo material se comporte o no elásticamente, depende de la magnitud de los esfuerzos a los cuales está sometido. Se llama *punto de fluencia* la condición en la cual un material deja de comportarse de una manera y empieza a comportarse de otra debido a un desarreglo importante en la frontera de los granos.

La mecánica del medio continuo idealiza el material por medio de un modelo matemático que, sin tener en cuenta de manera explícita su estructura microscópica y sin considerar, a escala mucho más pequeña, las acciones entre moléculas, permite, en la mayoría de los casos, predecir su comportamiento, con exactitud suficiente para la práctica. Conviene

subrayar, sin embargo, que, si los esfuerzos a que se somete el material aumentan excesivamente, acabarán produciéndose agrietamientos microscópicos, los cuales eventualmente podrán crecer hasta transformarse en verdaderas fracturas. Una grieta, por pequeña que sea, impide la trasmisión isotrópica de los esfuerzos; así que, desde el momento en que aparece, el medio pierde su continuidad, y, estrictamente hablando, los métodos de análisis que vamos a estudiar dejan de ser aplicables.

El *modelo matemático* que deseamos construir tiene que basarse esencialmente sobre *conceptos diferenciales.* Imaginemos que un material, sólido o fluido. se subdivide idealmente en elementos pequeños, por ejemplo, de forma cúbica, por medio de planos que lo crucen, y luego se prosigue la subdivisión agregando siempre más planos secantes, y reduciendo progresivamente el tamaño de los cubos resultantes. Cada elemento posee ciertas *propiedades extensivas* (es decir, propiedades *cuyos valores dependen de la cantidad de sustancia presente),* así como masa, peso, cantidad de calor, etc., y es natural pensar en una masa media, un peso medio, una cantidad de calor media, que se obtienen dividiendo masa, peso y cantidad de calor totales de cada cubo entre el volumen del mismo. Si el cubo tiene volumen ΔV, masa Δm, peso ΔP, hallaremos una *masa media* $\Delta m/\Delta V$ y un *peso medio* $\Delta P/\Delta V$. Ahora, consideremos un punto fijo dentro del material y una sucesión de cubos cada vez más pequeños que encierren al punto. Si la sustancia es homogénea, las características medias serán constantes al reducirse el cubo, e iguales a sus valores límites cuando tiendan a cero los volúmenes :

$$\lim_{\Delta V\to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}, \qquad \lim_{\Delta V\to 0} \frac{\Delta P}{\Delta V} = \frac{dp}{dV} \qquad (1.1)$$

Pero si el material no es homogéneo, como por ejemplo la atmósfera, cuya masa media se reduce con la altura, masa media y peso medio variarán de un elemento a otro. Ahora bien, nuestra idealización implica que dichas propiedades medias *varíen con continuidad* al reducirse el tamaño de los cubos, y permite admitir la existencia, *en cada punto* del material, de una *masa específica (o densidad)* ρ y de un *peso específico* γ locales, definidos por (1.1) como

$$\rho = \frac{dm}{dV}, \qquad \gamma = \frac{dP}{dV} \qquad (1.2)$$

En términos matemáticos, aceptaremos que masa y peso, así como otras *propiedades extensivas,* por ejemplo, la cantidad de calor contenida, sean *funciones continuas y derivables de los puntos del espacio ocupado por el medio.* Si se ha establecido un sistema de coordenadas, por ejemplo cartesianas *x, y, z,* se podrá decir "funciones continuas y derivables de *x, y, z";* pero evidentemente el concepto tiene un significado independiente del tipo de coordenadas escogido, de su posición y hasta de la existencia de un sistema de referencia.

Es interesante observar que las propiedades (1.2) ya no son extensivas: son *propiedades intensivas* (o de punto), es decir que *su valor no depende de la cantidad de sustancia presente.* Así son todas las demás propiedades que se conocen como *específicas,* y además la presión, la temperatura, la velocidad del sonido en el medio, y muchas otras.

Analicemos las variaciones con el tiempo de tales propiedades. Supongamos, por ejemplo, que se está calentando una pieza metálica, y se controla la temperatura T *en un punto fijo*. A un intervalo de tiempo Δt corresponderá una variación de temperatura ΔT. Consideremos el valor medio $\Delta T\ /\ \Delta t$ en un instante determinado (por ejemplo, exactamente una hora después de haber empezado a calentarse), para intervalos de tiempo cada vez más pequeños. Para que la pieza metálica pueda idealizarse como un medio continuo, es necesario que la razón $\Delta T\ /\ \Delta t$ varíe con continuidad al reducirse el intervalo temporal, de modo que exista y sea finito el límite

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{dT}{dt} = \dot{T}$$

que mide la *rapidez de variación local de la temperatura.* En general, supondremos que todas *las propiedades intensivas de un medio continuo son funciones continuas y derivables del tiempo, en cada punto del medio.*

Es importante recordar aquí la siguiente fórmula, que permite calcular la derivada total de una función cualquiera, escalar o vectorial $f(x,y,z,t)$ con respecto al tiempo t:

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}v_x + \frac{\partial f}{\partial y}v_y + \frac{\partial f}{\partial z}v_z$$

siendo v_x, v_y, v_z las componentes de la velocidad.

La hipótesis cuyo significado físico acabamos de explicar, de que las propiedades del medio continuo son funciones continuas y derivables del tiempo y del espacio, permite aprovechar, para el estudio de su comportamiento, todos los recursos del cálculo diferencial, y operar por medio de ellos sobre los campos escalares y vectoriales (de desplazamientos, velocidades, fuerzas, etc.), ligados al medio. Además, podremos aplicar *teoremas del valor medio* para calcular el valor que cierta función f adquiere en un punto B, conociendo el valor que ella y sus derivadas toman en otro punto A y la posición relativa de B con respecto a A. En particular, si A y B están muy próximos entre sí; es decir, si, siendo las coordenadas de A x_0, y_0, z_0, las de B son $x_0+\Delta x$, $y_0+\Delta y$, $z_0+\Delta z$ con Δx, Δy, Δz muy pequeños, consideraremos lícito escribir

$$f(B) = f(A) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_A \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_A \Delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_A \Delta z$$

calculándose las derivadas en el punto A. Esto resulta por utilizar la *fórmula de Taylor,* en que se desprecian, por su pequeñez, las potencias de Δx, Δy, Δz de grado superior al primero.**

** Fin de la cita textual del libro del Dr. Enzo Levi

LOS PRINCIPIOS LÓGICOS 3 Y 4 se refieren a la consistencia que debe haber en la realización de nuestras deducciones, es decir, debemos aplicar los principios de la lógica simbólica en nuestros razonamientos.

Aunque no es indispensable, por conveniencia, haremos las siguientes hipótesis adicionales que nos permitirán simplificar nuestro intento de analizar los fenómenos mecánicos que ocurren en las estructuras.

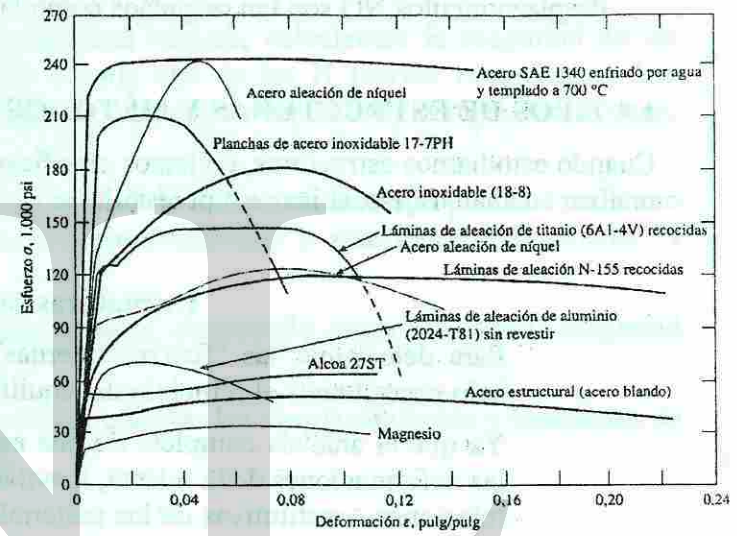
HIPÓTESIS ADICIONALES

1 ***Hipótesis de Hooke.***

Se propone que la relación entre las deformaciones unitarias de un material y los esfuerzos inducidos es lineal, es decir, el material tiene un *comportamiento elástico lineal.*

$$\{s\} = [k]\{\in\}$$

Modelo Reológico de Hooke.



Como es sabido, los materiales reales (ver figura al lado) no tienen dicho comportamiento, más bien, para deformaciones menores del límite de proporcionalidad, se aproxima su comportamiento al supuesto elástico lineal.

El argumento de más peso que se puede usar para justificar esta hipótesis, es que las matemáticas empleadas se "linealizan" y vuelven alcanzable la meta de modelar matemáticamente las estructuras.

Otro argumento de gran importancia, es que, si mantenemos a los materiales que forman una estructura con deformaciones menores a la correspondiente al límite de elasticidad lineal (aproximadamente 0.002 para el caso del acero estructural A-36) el comportamiento será bastante parecido al hipotético comportamiento elástico-lineal. Paradójicamente, la filosofía de diseño sísmico actual (a nivel mundial) establece que las estructuras deben deformarse más allá del límite elástico, para que así, tengan la capacidad de "disipar" las grandes cantidades de energía que se presentan durante un evento sísmico de magnitud extrema. Esta manera de diseñar entra en conflicto directo con la suposición de que los materiales trabajarán dentro de su límite elástico.

Finalmente, debe quedar claro que, si las complicaciones matemáticas no importaran, sería mucho más realista utilizar modelos Reológicos del tipo Kelviniano o, mejor aún, modelos reológicos de Burgers. Los cuales son modelos que permiten modelar, por ejemplo, fenómenos de flujo plástico en el concreto o la variación del módulo de elasticidad con la velocidad de aplicación de la carga.

2 *Hipótesis de Desplazamientos pequeños.*

Aceptaremos que nuestras estructuras sufren desplazamientos relativamente pequeños. En la mayoría de las estructuras que diseñaremos, está condición se cumple de manera limitada, es decir, en ocasiones los desplazamientos NO son pequeños y, estrictamente hablando, la teoría matemática presentada aquí, NO es aplicable.

A pesar de este hecho, la práctica profesional admite el uso de esta herramienta, aún en dichas condiciones de no aplicabilidad, buscando compensar, mediante otras consideraciones, estos errores introducidos en nuestras predicciones cuando los desplazamientos NO son tan pequeños como la hipótesis supone.

1.4 TIPOS DE ESTRUCTURAS Y MÉTODOS DE ANÁLISIS

Cuando estudiamos estructuras, podemos clasificarlas en dos grandes tipos, con la finalidad de realizar su análisis: isostáticas e hiperestáticas.

Estructuras isostáticas

Para determinar las "fuerzas internas" en las estructuras isostáticas solo necesitamos el principio del equilibrio estático.

Ya que el análisis completo de una estructura demanda el cálculo de las deformaciones de la misma, inevitablemente debemos recurrir a las relaciones constitutivas de los materiales que la forman y a relaciones geométricas en la estructura deformada, a partir de las cuales podemos calcular las deformaciones. Tales como flechas al centro de vigas y rotaciones de los extremos de las barras.

Estructuras hiperestáticas

En este tipo de estructuras no basta con aplicar el principio de equilibrio estático, también debemos aplicar las relaciones físicas entre esfuerzos y deformaciones del material que forma la estructura. Con esta información es posible calcular las fuerzas internas y las deformaciones en toda la estructura.

En cursos previos se han manejado varias formas de aplicar los principios al análisis de estructuras hiperestáticas, y a estas diversas maneras se les ha bautizado con nombres especiales. Tales como: método de deflexión-pendiente, carga unitaria, teorema de los tres momentos, deformación consistente, etc.

Los diversos métodos de análisis son solo diversas maneras de aplicar los mismos principios y siguen dos posibles estrategias:

Estrategia 1:

- Determinación del "grado de hiperestaticidad" (N)
- "eliminación" de las fuerzas redundantes en la estructura original, dejando una estructura isostática básica.
- Formación de una estructura isostática básica con todas las cargas aplicadas sobre ella.
- Formación de N estructuras isostáticas básicas sobre las que actúa una de las N fuerzas redundantes a la vez.
- Trabajando con las N+1 estructuras isostáticas básicas, calculamos la magnitud de los desplazamientos y rotaciones asociados a cada una de las N fuerzas redundantes. Las expresiones matemáticas obtenidas del cálculo contendrán las N fuerzas redundantes como variables desconocidas en magnitud.
- Aplicación de las condiciones de compatibilidad de deformaciones apropiadas a cada uno de los puntos donde se calcularon los N desplazamientos y rotaciones. Formándose N ecuaciones lineales.
- Solución simultánea de las N ecuaciones lineales, obteniendo como solución la magnitud de las N fuerzas redundantes.
- Conocidas las fuerzas redundantes se pueden calcular los desplazamientos y rotaciones de cualquier parte de la estructura original.

Estrategia 2:

- Discretizamos (Dividimos) toda la estructura en elementos finitos de geometría simple cuyas relaciones entre desplazamientos en sus extremos y las fuerzas inducidas sea conocida. En este curso los elementos finitos tendrán la forma de barras rectas.
- De la discretización realizada surge de manera natural el grado de "indeterminación cinemática" de la estructura. El número de desplazamientos desconocidos es lo que denominamos "grados de libertad" (GL).
- Calculamos la rigidez de cada elemento finito a la ocurrencia de los GL desplazamientos. Generándose tantas ecuaciones de fuerza como grados de libertad estén asociados a cada elemento finito.
- Calculamos la rigidez de la estructura mediante la suma de las rigideces de cada uno de los elementos finitos. En cada grado de libertad debe cumplirse el principio de equilibrio estático, resultando GL ecuaciones lineales que contendrán los GL grados de libertad de la estructura discretizada.
- Solución simultánea de las GL ecuaciones lineales, obteniendo como solución la magnitud de los GL desplazamientos desconocidos.

- Conocidos los desplazamientos desaparece la "indeterminación cinemática" y podemos calcular las fuerzas asociadas a los GL y los desplazamientos y rotaciones de cualquier parte de los elementos finitos.

Al procedimiento esquematizado en la estrategia 1 se le conoce en diversas referencias como: *El Método general de las flexibilidades* (o método de las fuerzas).

A la segunda estrategia se le da el nombre de: *El método general de las rigideces* (o método de los desplazamientos).

En el curso previo de análisis de estructuras, se presentó y se trabajó con el método de deformación consistente (nombre alterno a método general de flexibilidades). En este curso nos concentraremos en demostrar las ecuaciones matemáticas que le dan forma al método general de rigideces y las aplicaremos al análisis de diferentes tipos de estructuras.

1.5 PRESENTACIÓN DEL MÉTODO GENERAL DE LAS RIGIDECES**

A este método se le conoce con este nombre porque en la formación de los modelos matemáticos se maneja extensamente el concepto de rigidez.

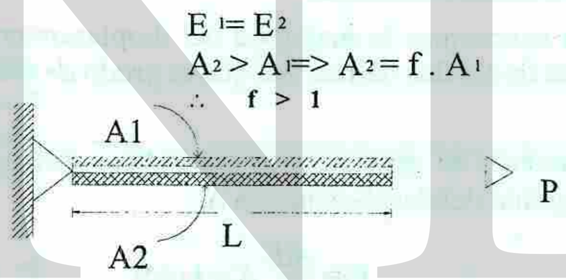
Como se mencionó en el artículo anterior, un paso fundamental en la aplicación del método consiste en dividir a la estructura en segmentos más pequeños que deben cumplir con la condición de tener geometría simple, cuyas relaciones entre desplazamientos en sus extremos y las fuerzas inducidas sea conocida.

De la teoría de la resistencia de materiales obtuvimos modelos matemáticos que nos permiten predecir los esfuerzos y deformaciones en barras rectas. Por ejemplo, se dedujo la conocida ecuación diferencial de equilibrio estático para vigas en flexión.

A continuación presentamos un caso para estudio en el que se utilizan los pasos generales esquematizados en la descripción de la estrategia 2 para el análisis de estructuras.

1.5.1 *CASO PARA ESTUDIO*: DOS BARRAS PARALELAS SOMETIDAS A TENSIÓN

Para ilustrar el método, se analiza el caso de una estructura que podemos discretizar en dos barras rectas prismáticas.



Restricciones del problema:

1. La fuerza **P** está aplicada de manera de producir solo tensiones en las dos barras
2. El desplazamiento Δ producido por la acción **P** es igual para las dos barras.

Objetivo del problema.- *Analizar* completamente el sistema.

Primer intento de análisis(intuitivo)

Siguiendo un primer impulso, podemos imaginar lo siguiente

** Aclaración pertinente: En opinión del autor, existe la tendencia a confiar en los modelos matemáticos que son relativamente complejos y que en su deducción requieren del uso de matemáticas superiores. Creemos que lo que le da validez a un modelo matemático es la cercanía de sus predicciones con lo que se puede observar y medir en el mundo físico y no la "elegancia" matemática empleada en su deducción.

Hipótesis: cada barra soporta la mitad de la carga **P.**

En consecuencia, las deformaciones de cada una de las barras son:

$$\Delta_1=\left(\frac{p}{2}\right)\cdot\frac{L}{A_1E} \qquad \Delta_2=\left(\frac{p}{2}\right)\cdot\frac{L}{A_2E}$$

Nota: Estas expresiones matemáticas fueron tomadas de la teoría elemental de la resistencia de materiales, para el caso de barras en tensión simple.

La restricción 2 señala que: $\Delta_1=\Delta_2$

$$\therefore \left(\frac{p}{2}\right)\cdot\frac{L}{A_1E}=\left(\frac{p}{2}\right)\cdot\frac{L}{A_2E}$$

$$\Rightarrow \quad 1=\frac{1}{f} \qquad f=1$$

Pero el factor f debe ser mayor de 1 por ser una característica del problema.

$\therefore$ La hipótesis realizada conduce a resultados inconsistentes y no puede ser verdadera.

Segundo intento para realizar el análisis

Parece evidente que si conocemos la magnitud del desplazamiento Δ, podremos conocer el estado de deformaciones de las dos barras. Así que el *grado de indeterminación cinemática* es 1 (uno).

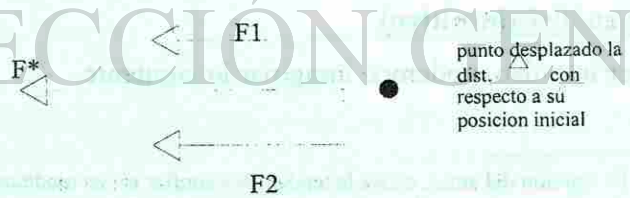
Al ocurrir el desplazamiento se generan fuerzas elásticas internas de tensión, directamente proporcionales a la magnitud del desplazamiento Δ.

$$F_1=\frac{A_1E}{L}\Delta=k_1\cdot\Delta$$

$$F_2=\frac{A_2E}{L}\Delta=k_2\cdot\Delta$$

Así, en el extremo donde está aplicada la fuerza **P** se generan las fuerzas elásticas F_1 y F_2 que tienden a restaurar la geometría original de la barra (Δ= 0).

La resistencia ofrecida por las dos barras trabajando en conjunto se calcula sumando la resistencia de cada una de las dos barras: $F^* = F_1 + F_2$



Si hacemos un diagrama de cuerpo libre del extremo derecho de la barra tenemos que, bajo estas condiciones, el punto se moverá hacia la izquierda, de acuerdo a la ley de Newton

$$aceleración=\frac{F^*}{masa}$$

Entonces, para lograr que el punto se mantenga en la posición desplazada Δ, deberá aparecer una fuerza F que equilibre a F*, es decir:

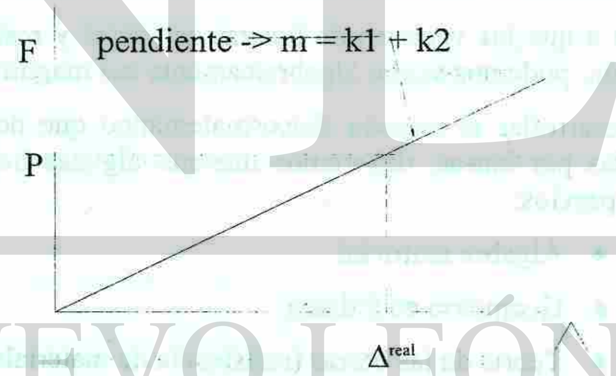
$$F - F^* = 0 \qquad \therefore \text{ la resultante es nula}$$

Sustituyendo a F*, F1 y F2, tenemos:

$$F = F^*$$
$$F = F1+F2$$
$$F = (k_1+k_2)\Delta$$

Con esta ultima expresión podemos calcular la carga F necesaria para mantener deformadas a ambas barras la distancia Δ.

Pero solo nos interesa el valor de Δ compatible con la fuerza P que está actuando en el sistema estructural bajo análisis.



Sustituyendo el valor de **P** en el modelo matemático encontrado ($F = (k_1+k_2)\Delta$) tendremos:

$$F=P$$

$$\therefore \quad P=(k_1+k_2)\Delta \qquad \text{expresión de la cual solo } \Delta \text{ es desconocido}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_{real}=\frac{P}{(k_1+k_2)}$$

una vez conocida la magnitud de desplazamiento, podemos terminar el análisis calculando las fuerzas y deformaciones que se inducen en cada una de las dos barras que forman la estructura.

La fuerza en cada barra es:

$$F_1 = k_1 \cdot \Delta_{real} \quad \text{y} \quad F_2 = k_2 \cdot \Delta_{real}$$

y la elongación es:

$$e_1 = e_2 = \Delta_{real}$$

finalmente, la deformación unitaria es:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\Delta_{real}}{L}$$

Con lo cual hemos realizado el análisis completo del sistema estructural.

1.5.2 OBSERVACIONES

- A k_1 y k_2 los podemos interpretar como la rigidez axial de cada barra, es decir:

  A mayor rigidez axial, se requiere mayor fuerza para producir un desplazamiento unitario

  Y a la suma la llamaremos rigidez total del sistema.
- Si $A_2 = 2A_1$, la fuerza que toma la barra 2 será el doble de la barra1.
- El elemento de mayor rigidez deberá soportar la mayor parte de la fuerza actuante.
- La fuerza elástica restauradora total que actúa sobre el extremo derecho de las barras se obtuvo ***sumando*** las ***contribuciones*** de cada una de las barras.
- Debido a que los vectores de fuerzas actuantes y resistentes están actuando en la misma dirección, podemos sumar algebraicamente sus magnitudes.
- Para desarrollar el método físico-matemático que nos permitirá analizar las estructuras formadas por barras, deberemos manejar algunas herramientas analíticas aprendidas en cursos previos:
  - Álgebra matricial
  - Geometría euclidiana
  - Teoría de las barras (resistencia de materiales)

A lo largo de estos apuntes, haremos la presentación de la teoría y el método propuesto para el análisis de las estructuras. La secuencia elegida por el autor en la presentación y demostración del método es la siguiente:

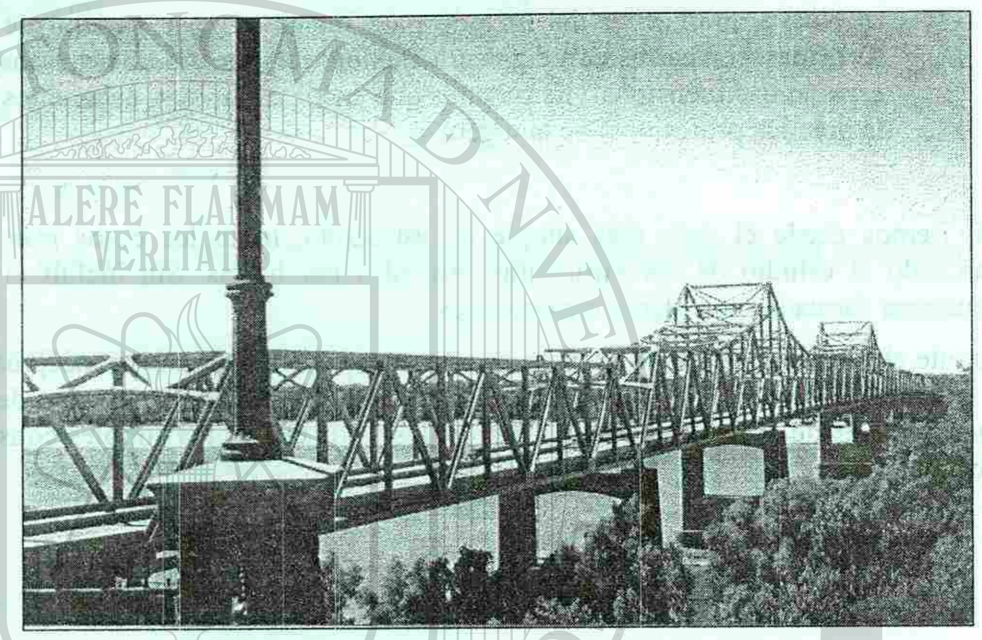
- Análisis de estructuras tipo armadura clásica, definida en el espacio bidimensional.
- Análisis de estructuras tipo armadura clásica, definida en el espacio tridimensional.

- Ampliación del método planteado para incluir el caso más general de estructuras formadas por barras con rigidez a flexión y cortante trabajando en el hipotético espacio bidimensional.
- Nueva ampliación del método para incluir el caso general de estructuras formadas por barras con rigidez a flexión, torsión y cortante trabajando en el espacio tridimensional. Estructuras que encontraremos y deberemos resolver en la práctica profesional de la ingeniería.

Así, iremos desde el caso más simple de estructura, hasta los casos más complejos; abarcando el estudio de las estructuras formadas por barras. Sin incluir el estudio de estructuras formadas con placas o cascarones.

Durante el desarrollo de estos apuntes, se irán introduciendo algunos conceptos de álgebra de matrices, necesarios para la claridad del método propuesto, además de conceptos fundamentales de la mecánica de los materiales y los elementos simples construidos con estos materiales.

ESTRUCTURAS TIPO ARMADURA EN EL ESPACIO BIDIMENSIONAL



2.1. INTRODUCCIÓN

Iniciaremos la presentación del *Método General de Rigideces* mediante el análisis de estructuras tipo armadura. Como se comprobará a lo largo de este curso, este es el tipo de estructura de más fácil análisis.

Definición de armadura convencional

Es una estructura formada por barras rectas interconectadas en "nudos" que funcionan como una articulación, es decir, no pueden transmitirse momentos flexionantes, torsionantes ni fuerzas cortantes a través de las uniones; además, las barras están interconectadas en arreglos triangulares. Las barras solo trabajan en tensión o compresión.

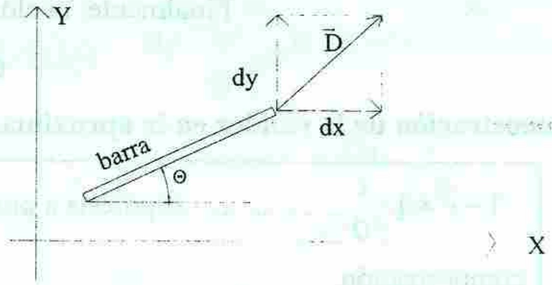
De acuerdo a lo propuesto en la descripción de la estrategia 2 para el análisis de estructuras hiperestáticas, la armadura se "divide" en barras rectas para su análisis. Posteriormente se obtiene para cada "barra" la resistencia (rigidez) que ofrece a ser deformada por los movimientos de sus dos extremos.

Después de calculada la rigidez de cada barra, se procede al cálculo de la rigidez de la armadura a partir de la suma de la aportación individual de cada barra.

El resto del proceso se ejemplifica a través del caso para estudio presentado adelante.

2.2. MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA BARRA AISLADA, INCLINADA UN ÁNGULO TETA

Como primer paso, demostraremos como calcular la resistencia (rigidez) que ofrece una barra cuando sus dos extremos se desplazan respecto a su posición original, antes de la acción que provoca su movimiento.



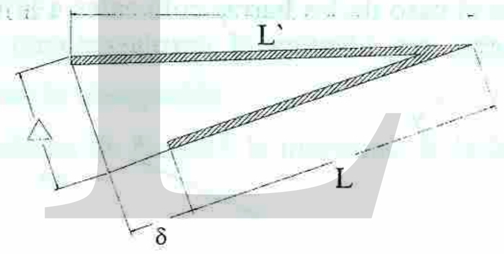
A diferencia del caso para estudio del capítulo 1, en cualquiera de los dos extremos de cada barra podrá existir un vector de desplazamiento orientado con cualquier ángulo o, equivalentemente, 2 vectores de desplazamiento ortogonales entre si.

Observación importante: Por una cuestión de conveniencia matemática, a partir de aquí siempre que manejemos magnitudes vectoriales (fuerzas, desplazamientos) las manejaremos con sus dos componentes obtenidas de la proyección sobre dos ejes ortogonales (eje x, eje y).

2.2.1. APLICACIÓN DE LA HIPÓTESIS DE LOS DESPLAZAMIENTOS PEQUEÑOS

En este artículo demostramos una consecuencia de adoptar la hipótesis de los desplazamientos pequeños en el cálculo del alargamiento o acortamiento de una barra recta.

Es posible que una barra cualquiera sufra movimientos en uno de sus extremos respecto al otro, como los representados en la figura.



Donde : δ= desplazamiento longitudinal

Δ= desplazamiento transversal

entonces $$L' = \left[(L+\delta)^2 + \Delta^2\right]^{\frac{1}{2}} = L\left[1 + 2\cdot\frac{\delta}{L} + \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 + \left(\frac{\Delta}{L}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

e=L'-L (alargamiento de la barra)

como hemos asumido la hipótesis de que los desplazamientos son pequeños, las fracciones $\left(\frac{\delta}{L}\right)^2$ y $\left(\frac{\Delta}{L}\right)^2$ se consideran $\cong 0$, en consecuencia, podemos afirmar que cuando $\delta \cong 0$, aunque $\neq 0$, resulta :

$$L' = L\left(1+2\frac{\delta}{L}\right)^{1/2} \cong L+\delta$$

Finalmente, la elongación de la barra es:

$$e = \delta$$

Demostración de la validez en la aproximación anterior:

$\sqrt{1+c} \approx 1+\dfrac{c}{2}$ ....hipótesis a probar cuando $c \approx 0$ pero mayor de 0

comprobación:

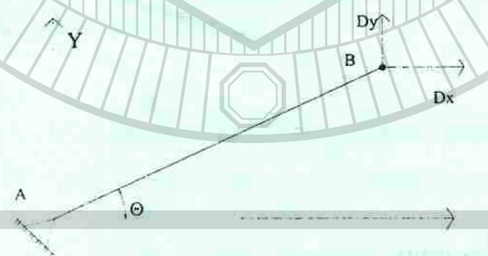
$$1+c=\left(1+\frac{c}{2}\right)^2 = 1+c+\left(\frac{c}{2}\right)^2 \quad \text{pero} \quad \left(\frac{c}{2}\right)^2 \approx 0$$

elevando al cuadrado

entonces: 1+c=1+c lo que prueba nuestra hipótesis.

2.2.2. OBTENCIÓN DE MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS GLOBALES A LOCALES

En el caso de las barras colineales a la fuerza actuante (ver artículo 1.3), la elongación de las barras era idéntica al desplazamiento de sus extremos. En las armaduras, el obtener la elongacion de la barra en función del desplazamiento requerirá un poco mas de trabajo.



La figura muestra la relación geométrica entre dx y dy *versus* la elongación de la barra.

Primero consideraremos que en el extremo B ocurren dx y dy asociados al alargamiento e de la barra. Si aplicamos el teorema demostrado en el artículo anterior, podemos calcular la contribución de cada uno de los dos vectores d_x y d_y al valor total de e:

$$e = \cos\theta .dx + \operatorname{sen}\theta .dy$$

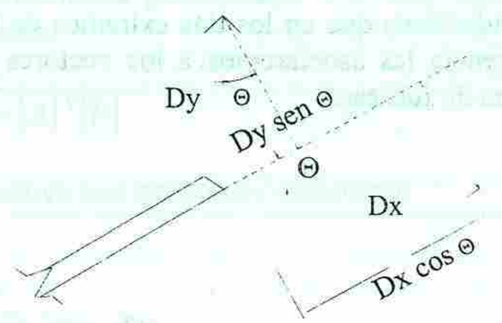
O en representación matricial $\{e\} = [\cos\theta \quad \operatorname{sen}\theta] \bullet \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix}$

Y en forma abreviada: $\{e\} = [A] \cdot \{D\}$

En esta última expresión, la *matriz renglón* A es la matriz de transformación de coordenadas globales a coordenadas locales. Es decir, expresa matemáticamente la relación geométrica entre los desplazamientos d_x y d_y versus la elongación.

Demostración geométrica.

Aplicando la hipótesis de los desplazamientos pequeños resulta claro que las proyecciones de dx y dy sobre el eje longitudinal de la barra, corresponden al efecto del desplazamiento del extremo B sobre la elongación total de la barra.



En el caso general en que pueden existir desplazamientos de los dos extremos de la barra, la matriz [A] que relaciona a {e} con {D} será:

$$\{e\} = [-\cos\theta \quad -\operatorname{sen}\theta \quad \cos\theta \quad \operatorname{sen}\theta] \cdot \begin{Bmatrix} dx_A \\ dy_A \\ dx_B \\ dy_B \end{Bmatrix}$$

Nota importante:

e con signo negativo es acortamiento

e con signo positivo es alargamiento

en forma abreviada. $[e]_{barra} = [A]\,[D]_{barra}$

Cálculo de la fuerza axial inducida en la barra por la elongación

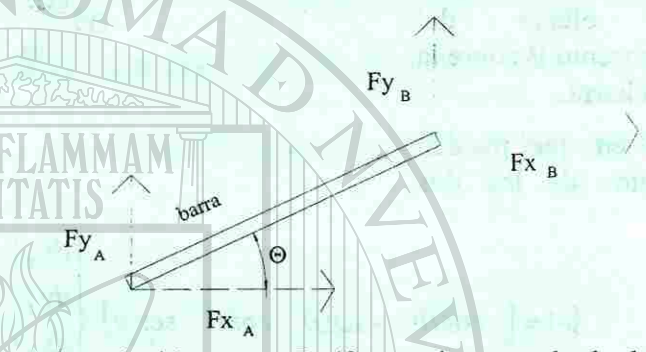
De acuerdo a la hipótesis de elasticidad lineal (hipótesis de Hooke), la magnitud de la fuerza que se genera en la barra será

$$P_{barra} = k_{barra} * e_{barra}$$

Donde : k_{barra}=AE/L (de la barra) esta relación se demuestra en la teoría de la resistencia de materiales.

2.2.3. OBTENCIÓN DE MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN DE FUERZAS INTERNAS A FUERZAS EXTERNAS

Si consideramos que en los dos extremos de la barra pueden actuar fuerzas externas que por conveniencia las asociaremos a los vectores desplazamiento dx y dy, tenemos el siguiente diagrama de fuerzas:



necesitamos encontrar la relación entre P (fuerza interna de la barra) *versus* las fuerzas externas en los extremos de la barra.

Si tomamos el nudo B ,tenemos:

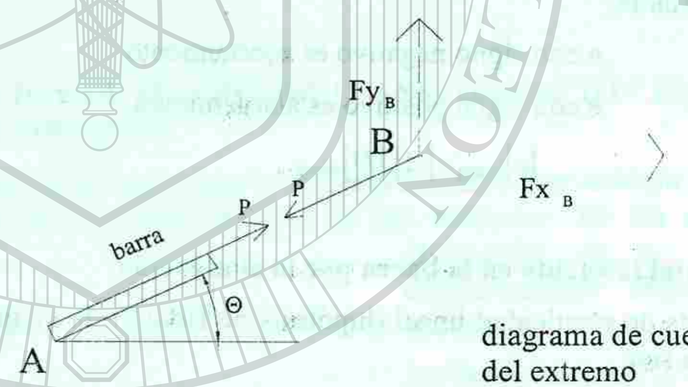


diagrama de cuerpo libre del extremo

$$\begin{bmatrix} Fx \\ Fy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} P_{barra}$$

o alternativamente

$$Fx=\cos\theta * P_{barra}$$
$$Fy=\operatorname{sen}\theta * P_{barra}$$

y en el caso general (fuerzas en extremos A y B)

$$\begin{bmatrix} Fx_A \\ Fy_A \\ Fx_B \\ Fy_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta \\ -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} P_{barra}$$

Nota: P_{barra} es la fuerza axial resultante sobre la barra

Observar que la matriz columna que relaciona a P_{barra} con las fuerzas externas en los extremos es la traspuesta de la matriz renglón [A] encontrada previamente. Por esta razón podemos escribir la ecuación anterior de la siguiente forma

$$[F]=[A]^T[P]$$

Esta es la expresión matemática que queríamos demostrar.

Principio de Contragradiencia

Otra manera de demostrar que $[F]$ esta relacionada con $[P]$ a través de $[A]^T$ es:

Supongamos que $[y]=[A][x]$ y $[z]=[B][U]$

También supongamos que para cualquier valor de $[x]$ y $[U]$ se cumple:

$[x]^T[z]=[y]^T[U]$

Si sustituimos a $[Y]$ y $[Z]$ por sus expresiones originales tenemos:

$$[x]^T[B][U]=[x]^T[A]^T[U]$$

se concluye el siguiente teorema:

$[B]=[A]^T$ para que la igualdad anterior se pueda cumplir

Aplicando este teorema al caso de la armadura, tenemos que:

Por continuidad $[e]=[A][D]$

Por equilibrio $[F]=[B][P]$

como el trabajo realizado por las fuerzas externas sobre la barra debe ser igual al trabajo interno, tenemos:

$$(1/2)\ [F]^T[D]=(1/2)\ [P]^T[e]$$

(trabajo de fuerzas externas) = (trabajo de fuerzas internas)

sustituyendo en las expresiones a $[F]^T$ y $[e]$

$$(1/2)\ [P]^T[B]^T[D]=(1/2)\ [P]^T[A][D]$$

aplicando el teorema demostrado anteriormente, resulta:

$$[B]^T=[A]$$

trasponiendo ambos lado de la igualdad:

$$[B]=[A]^T$$

que es lo que se quería demostrar ,es decir:

$$\{F\}=[A]^T*\{p\}$$

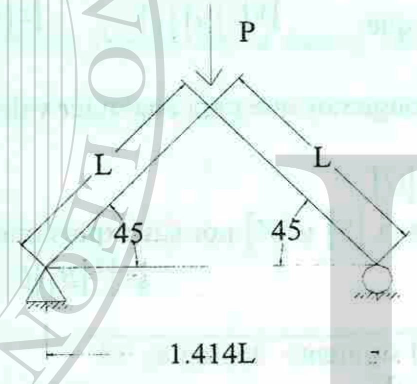
2.3. *CASO PARA ESTUDIO.* ARMADURA TRIANGULAR

Las relaciones matemáticas establecidas previamente para el caso de una barra aislada, con inclinación cualquiera, nos permitirá resolver una armadura siguiendo una secuencia lógica equivalente a la utilizada en el caso de las 2 barras paralelas sometidas a tensión.

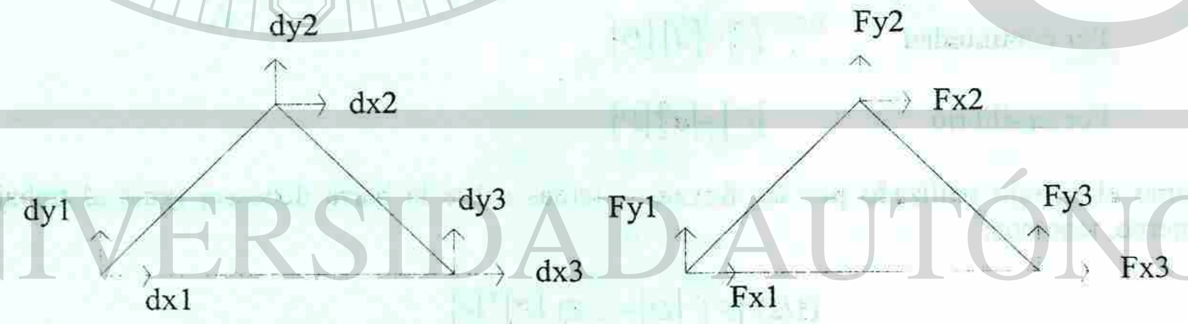
Si ignoramos las restricciones impuestas por los apoyos, existen 6 posibles vectores de desplazamiento que definirán la posición de la armadura después de desplazarse ante la acción de las fuerzas actuantes.(ver sig. fig.)

Estructura ejemplo a analizar

L = 200 cm
A = 1 cm2
E = 2,100,000 kg/cm2



Y de acuerdo a la definición convencional de una armadura, solo podrán existir 6 fuerzas externas actuando sobre los nudos.



Puesto que, conocida la magnitud de los desplazamientos de los nudos se conoce de manera inmediata el estado de esfuerzos y deformaciones de todas las barras, denominaremos a estos como **"puntos de control"**

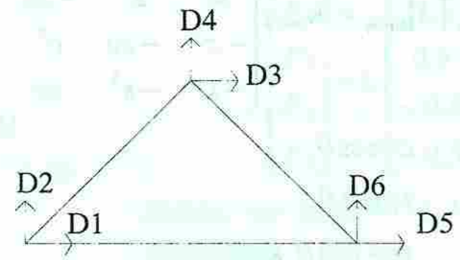
Así, en una armadura cualquiera, debemos seleccionar el numero suficiente de "puntos de control" que nos permita determinar de manera inmediata el estado de esfuerzos y deformaciones de todas las barras.

Al numero total de vectores-desplazamiento necesarios en todos los "puntos de control", menos los vectores-desplazamiento nulificados por las restricciones impuestas por los

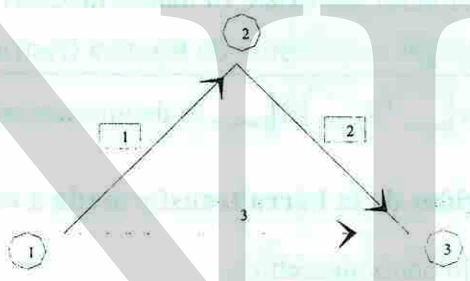
apoyos, se le suele denominar como grado de *indeterminación cinemática* o *grados de libertad*.

Ahora, calculemos la resistencia (rigidez) que ofrece el conjunto de barras interactuando entre si ante la aparición de los vectores de desplazamiento en los "puntos de control".

Para facilitar la interpretación del modelo matemático de esta rigidez del conjunto (rigidez total), numeramos los vectores-desplazamiento de la siguiente forma:



y a los nudos y barras así:



Cada barra contribuye a la resistencia (rigidez) total que ofrece el conjunto de barras al desplazamiento y se calcula como se muestra a continuación:

2.3.1. SOLUCIÓN 1: ENSAMBLE DIRECTO DE MATRICES DE RIGIDEZ DE LAS 3 BARRAS

Etapa 1.- Cálculo de la ecuación matricial de cada una de las tres barras

Primero deberemos encontrar la función matemática que nos relacione a los desplazamientos de los dos extremos de cada barra con las fuerzas externas en los dos extremos que deben aparecer por necesidades de equilibrio.

Recordando que $p_{barra}=k_{barra}\cdot e_{barra}$ y que $e_{barra}=[A]_{barra}\,[D]_{barra}$ sustituyendo a e_{barra} en p_{barra} tenemos:

$$p_{barra}=k_{barra}\,[A]_{barra}\,[D]_{barra}$$

por equilibrio, las fuerzas internas deben anularse con las externas

$[F]_{barra}-[A]^T p_{barra}=0$ sustituyendo p_{barra} resulta:

$$[F]_{\text{barra}}-[A]_{barra}^{\,T}\cdot k_{barra}\cdot[A]_{barra}\,[D]_{\text{barra}}=0$$

Si analizamos el producto matricial $[A]_{barra}^{\,T}k_{barra}[A]_{barra}$, encontramos que la matriz resultante es de 4 renglones por 4 columnas

Desarrollando el producto tenemos:

$$[A]_{barra}^{\,T}k_{barra}[A]_{barra}=\text{k}_{\text{barra}}\begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix}_{4x4}=[K_{barra}]_{4x4}$$

donde : $c=\cos\theta$

$s=\text{sen}\,\theta$

$sc=\cos\theta\ \text{sen}\,\theta$

> Notas:
> 1.- La matriz es singular (no existe su matriz inversa)
> 2.- Se requiere agregar condiciones de frontera (restricciones)

finalmente, el producto $[A]_{barra}^{\,T}k_{barra}[A]_{barra}$, lo denominaremos:

Matriz de rigidez de la barra transformada a coordenadas globales

y al número k_{barra}= EA/L lo denominaremos:

rigidez de la barra en coordenadas locales.

Entonces:

$$[F]_{\text{barra}}=[K_{barra}]_{4x4}[D]_{\text{barra}}$$

esta ecuación solo nos sirve para calcular $[F]_{barra}$ cuando ya conocemos a $[D]_{barra}$

Podemos decir que si conocemos los desplazamientos en los extremos de una barra con rigidez axial únicamente, tendremos resuelto el problema general de análisis para esa barra.

Nota : conocido $[D]_{barra}$ podemos calcular inmediatamente a $\mathbf{e}_{\mathbf{barra}}$ y $\mathbf{p}_{\mathbf{barra}}$

Observaciones:-

- El sistema de coordenadas X-Y sobre los que se definen dx y dy los denominaremos:

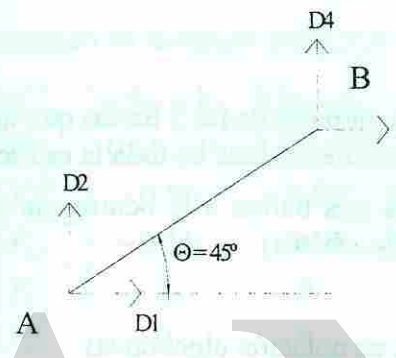
  sistema de coordenadas globales de referencia.

- La elongación **e** se mide a lo largo de la barra y a este eje de referencia paralelo a la barra lo denominaremos:

  sistema de coordenadas locales de referencia.

- Así, en el modelo matemático $p=k_{barra}.e$ diremos que el escalar k_{barra} =AE/L está referido al sistema de coordenadas locales de la barra.
- En el modelo $[F]_{\text{barra}}=[K_{barra}]_{4x4}[D]_{\text{barra}}$ diremos que la matriz $[K_{barra}]_{4x4}$ está referida al sistema de coordenadas globales.

BARRA # 1

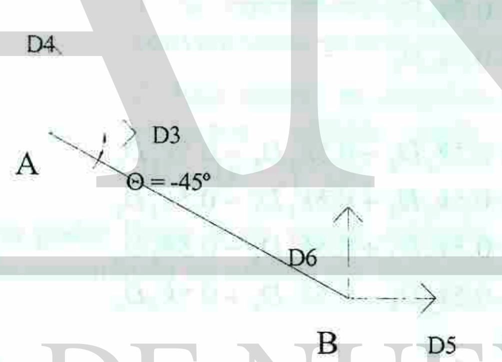


$$\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\F_3\\F_4\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}0.5&0.5&-0.5&-0.5\\0.5&0.5&-0.5&-0.5\\-0.5&-0.5&0.5&0.5\\-0.5&-0.5&0.5&0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_1\\D_2\\D_3\\D_4\end{bmatrix}$$

donde, de acuerdo a lo convenido en las figuras anteriores:

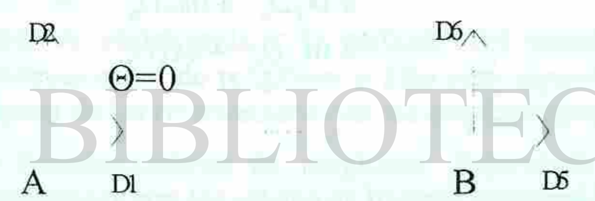
$$\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\F_3\\F_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Fx_A\\Fy_A\\Fx_B\\Fy_B\end{bmatrix}\quad\text{y}\quad\begin{bmatrix}D_1\\D_2\\D_3\\D_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Dx_A\\Dy_A\\Dx_B\\Dy_B\end{bmatrix}$$

BARRA #2



$$\begin{bmatrix}F_3\\F_4\\F_5\\F_6\end{bmatrix}=k_2\begin{bmatrix}0.5&-0.5&-0.5&0.5\\-0.5&0.5&0.5&-0.5\\-0.5&0.5&0.5&-0.5\\0.5&-0.5&-0.5&0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_3\\D_4\\D_5\\D_6\end{bmatrix}$$

BARRA #3



$$\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\F_5\\F_6\end{bmatrix}=k_3\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&0&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_1\\D_2\\D_5\\D_6\end{bmatrix}$$

donde el valor de la rigidez axial de las tres barras es:

$$k_1 = k_2 = \frac{E.A}{L_{diagonal}} = 2.1x10^6 \frac{kg}{cm^2} . \frac{1cm^2}{200cm} = 10500 \frac{kg}{cm} = \frac{EA}{L}$$

$$k_3 = \frac{E.A}{L_{horizontal}} = 2.1x10^6 \frac{kg}{cm^2} . \frac{1cm^2}{(200cm.1.414)} = 7425.74 \frac{kg}{cm} = 0.7071 \frac{EA}{L}$$

Ahora intentaremos encontrar una expresión matemática que nos permita calcular la resistencia (rigidez) que ofrece el conjunto de barras a ser deformadas.

Etapa 2.- "Suma" de la rigidez de las tres barras

Una vez obtenidos los sistemas matriciales en coordenadas globales de las 3 barras que forman la estructura, podemos obtener la resistencia (oposición) a ser deformada de toda la estructura.

Para lograrlo, sumamos la resistencia de cada una de las tres barras a la ocurrencia de los desplazamientos (aplicamos el principio de superposición de efectos).

Paso 1: escribir las tres matrices de rigidez de barra aislada en notación algebraica:

barra 1

$$\begin{aligned}
F_1 &= +0.5k_1D_1 + 0.5k_1D_2 - 0.5k_1D_3 - 0.5k_1D_4 \\
F_2 &= +0.5k_1D_1 + 0.5k_1D_2 - 0.5k_1D_3 - 0.5k_1D_4 \\
F_3 &= -0.5k_1D_1 - 0.5k_1D_2 + 0.5k_1D_3 + 0.5k_1D_4 \\
F_4 &= -0.5k_1D_1 - 0.5k_1D_2 + 0.5k_1D_3 + 0.5k_1D_4
\end{aligned}$$

barra 2

$$\begin{aligned}
F_3 &= +0.5k_2D_3 - 0.5k_2D_4 - 0.5k_2D_5 + 0.5k_2D_6 \\
F_4 &= -0.5k_2D_3 + 0.5k_2D_4 + 0.5k_2D_5 - 0.5k_2D_6 \\
F_5 &= -0.5k_2D_3 + 0.5k_2D_4 + 0.5k_2D_5 - 0.5k_2D_6 \\
F_6 &= +0.5k_2D_3 - 0.5k_2D_4 - 0.5k_2D_5 + 0.5k_2D_6
\end{aligned}$$

barra 3

$$\begin{aligned}
F_1 &= +1k_3D_1 + 0k_3D_2 \quad -1k_3D_5 + 0k_3D_6 \\
F_2 &= +0k_3D_1 + 0k_3D_2 \quad +0k_3D_5 + 0k_3D_6 \\
F_5 &= -1k_3D_1 + 0_1D_2 \quad +1k_3D_5 + 0k_3D_6 \\
F_6 &= +0k_3D_1 + 0k_3D_2 \quad +0k_3D_5 + 0k_3D_6
\end{aligned}$$

Paso 2: Sumar términos algebraicos comunes:

$$\begin{aligned}
F_1 &= (0.5k_1 + k_3)D_1 + (0.5k_1 + 0)D_2 - 0.5k_1D_3 - 0.5k_1D_4 - k_3D_5 + 0D_6 \\
F_2 &= (0.5k_1 + 0)D_1 + (0.5k_1 + 0)D_2 - 0.5k_1D_3 - 0.5k_1D_4 + 0D_5 + 0D_6 \\
F_3 &= -0.5k_1D_1 - 0.5k_1D_2 + (0.5k_1 + 0.5k_2)D_3 + (0.5k_1 - 0.5k_2)D_4 - 0.5k_2D_5 + 0.5k_2D_6 \\
F_4 &= -0.5k_1D_1 - 0.5k_1D_2 + (0.5k_1 - 0.5k_2)D_3 + (0.5k_1 + 0.5k_2)D_4 + 0.5k_2D_5 - 0.5k_2D_6 \\
F_5 &= -k_3D_1 + 0D_2 - 0.5k_2D_3 + 0.5k_2D_4 + (0.5k_2 + k_3)D_5 + (-0.5k_2 + 0)D_6 \\
F_6 &= 0D_1 + 0D_2 + 0.5k_2D_3 - 0.5k_2D_4 + (-0.5k_2 + 0)D_5 + (0.5k_2 + 0)D_6
\end{aligned}$$

Expresado en notación matricial:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5k_1 + k_3 & 0.5k_1 + 0 & -0.5k_1 & -0.5k_1 & -k_3 & 0 \\ 0.5k_1 + 0 & 0.5k_1 + 0 & -0.5k_1 & -0.5k_1 & 0 & 0 \\ -0.5k_1 & -0.5k_1 & 0.5k_1 + 0.5k_2 & 0.5k_1 - 0.5k_2 & -0.5k_2 & 0.5k_2 \\ -0.5k_1 & -0.5k_1 & 0.5k_1 - 0.5k_2 & 0.5k_1 + 0.5k_2 & 0.5k_2 & -0.5k_2 \\ -k_3 & 0 & -0.5k_2 & 0.5k_2 & 0.5k_2 + k_3 & -0.5k_2 + 0 \\ 0 & 0 & 0.5k_2 & -0.5k_2 & -0.5k_2 + 0 & 0.5k_2 + 0 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix}$$

Este sistema matricial, resultante del "ensamble" (suma) de las matrices de cada una de las tres barras, se le conoce como ***matriz de rigidez ensamblada***.

Notas:

1. Si representamos las tres ecuaciones matriciales en notación algebraica convencional, es más evidente el proceso seguido para sumarlas.

2. Esta matriz es singular, es decir, no existe su inversa y por lo tanto no la podemos utilizar para resolver el problema general del análisis $\{D\} = [K_{total}]^{-1}.\{F\}$

Para poder llegar a un vector solución, deberemos tomar en cuenta las restricciones a los desplazamientos impuestos por las condiciones de apoyo.

i.e. $D_1 = D_2 = D_6 = 0$

Etapa 3.- "Partición" del sistema matricial para separar los grados de libertad de los restringidos

Antes de poder realizar la partición del sistema matricial, deberemos primero realizar un reordenamiento de renglones y filas para separar los términos relacionados con los grados de libertad de los relacionados con los desplazamientos restringidos por los apoyos.

1.- Reordenamiento de renglones. Dejaremos en los primeros renglones las ecuaciones relacionadas con los grados de libertad (vectores desplazamiento no restringidos):

$$
\begin{Bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_6 \end{Bmatrix} =
\begin{bmatrix}
-0.5k_1 & -0.5k_1 & 0.5k_1+0.5k_2 & 0.5k_1-0.5k_2 & -0.5k_2 & 0.5k_2 \\
-0.5k_1 & -0.5k_1 & 0.5k_1-0.5k_2 & 0.5k_1+0.5k_2 & 0.5k_2 & -0.5k_2 \\
-k_3 & 0 & -0.5k_2 & 0.5k_2 & 0.5k_2+k_3 & -0.5k_2 \\
0.5k_1+k_3 & 0.5k_1 & -0.5k_1 & -0.5k_1 & -k_3 & 0 \\
0.5k_1 & 0.5k_1 & -0.5k_1 & -0.5k_1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.5k_2 & -0.5k_2 & -0.5k_2 & 0.5k_2
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix}
$$

2.- Reordenamiento de columnas. Dejaremos en las primeras columnas los coeficientes asociados con los grados de libertad:

$$
\begin{Bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ \hline F_1 \\ F_2 \\ F_6 \end{Bmatrix} =
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
0.5k_1+0.5k_2 & 0.5k_1-0.5k_2 & -0.5k_2 & -0.5k_1 & -0.5k_1 & 0.5k_2 \\
0.5k_1-0.5k_2 & 0.5k_1+0.5k_2 & 0.5k_2 & -0.5k_1 & -0.5k_1 & -0.5k_2 \\
-0.5k_2 & 0.5k_2 & 0.5k_2+k_3 & -k_3 & 0 & -0.5k_2 \\
\hline
-0.5k_1 & -0.5k_1 & -k_3 & 0.5k_1+k_3 & 0.5k_1 & 0 \\
-0.5k_1 & -0.5k_1 & 0 & 0.5k_1 & 0.5k_1 & 0 \\
0.5k_2 & -0.5k_2 & -0.5k_2 & 0 & 0 & 0.5k_2
\end{array}\right]
\begin{Bmatrix} D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ \hline D_1 \\ D_2 \\ D_6 \end{Bmatrix}
$$

El sistema matricial reordenado, se puede dividir en 4 submatrices, tal como lo indican las 2 líneas discontinuas en las matrices anteriores. El sistema matricial "particionado" y representado en notación matricial compacta sería:

$$
\begin{Bmatrix} F_u \\ F_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11_U} & K_{12_R} \\ K_{21_U} & K_{22_R} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_u \\ D_r \end{Bmatrix}
$$

donde : $\{F_U\} = \begin{Bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix}$ $\quad \{F_R\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_6 \end{Bmatrix}$ $\quad \{D_U\} = \begin{Bmatrix} D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{Bmatrix}$ $\quad \{D_R\} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_6 \end{Bmatrix}$

desarrollando el producto de las submatrices:

$$F_U = K_{11_U} \cdot D_U + K_{12_R} \cdot D_R$$
$$F_R = K_{21_U} \cdot D_U + K_{22_R} \cdot D_R$$

Etapa 4.- Solución del sistema de ecuaciones lineales simultáneas recién formado

Dejando del lado derecho a los términos asociados con D_U en la primer ecuación:

$$\left(F_U - K_{12_R} \cdot D_R\right) = K_{11_U} \cdot D_U$$
$$F_R = K_{21_U} \cdot D_U + K_{22_R} \cdot D_R$$

Con estas expresiones podemos tomar en cuenta el valor conocido de desplazamiento en los apoyos de la estructura. Para este caso en estudio, sabemos que $D_R=0$

$$\Rightarrow \qquad F_U = K_{11_U} \cdot D_U$$
$$F_R = K_{21_U} \cdot D_U$$

Así, hemos introducido al sistema matricial original las restricciones impuestas por los apoyos, la ecuación matricial: $F_u = K_{11U} \cdot D_u$, se puede resolver para:

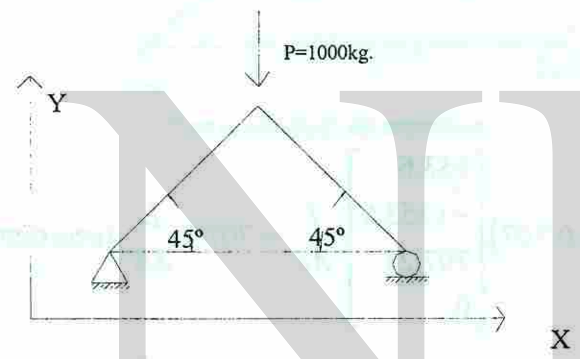
$$D_U = K_{11_U}{}^{-1} \cdot F_U$$

Donde:

K_{11U}= propiedad geométrica y mecánica de la estructura

F_u = fuerzas externas actuantes en los grados de libertad.

Si consideramos la carga mostrada en la figura 20, podemos definir al vector de cargas actuantes en los grados de libertad como:



Sustituyendo los magnitudes conocidas en las ecuaciones obtenidas, tenemos:

$$
[Fu] = \begin{bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1000 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
K_{11_U} = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 1.2 \end{bmatrix}
$$

resolviendo el sistema matricial resulta:

$$
\{D_U\} = \begin{bmatrix} 353.6 \\ -1353.6 \\ 707.2 \end{bmatrix} \cdot \frac{L}{A \cdot E}
$$

así, podemos calcular para cada una de las tres barras el estado de deformaciones y fuerzas:

BARRA #1

$$e=[A_1]\begin{bmatrix}D_1\\D_2\\D_3\\D_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.707 & -0.707 & 0.707 & 0.707\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\353.6\\-1353.6\end{bmatrix}\frac{L}{AE} = -707.1\frac{L}{AE}$$

$e = -707.1\dfrac{L}{AE}$ (acortamiento de la barra)

$p = k_1{*}e = (AE/L)(-707.1\dfrac{L}{AE})$

p = -707.1 kg. (compresión)

BARRA #2

$$e=\begin{bmatrix}-0.707 & 0.707 & 0.707 & -0.707\end{bmatrix}\begin{bmatrix}353.6\\-1353.6\\707.21\\0\end{bmatrix}\frac{L}{AE}=-707.1\frac{L}{AE}\quad\text{(acortamiento)}$$

$p = k_2{*}e = (AE/L)(-707.1\dfrac{L}{AE})$

p = -707.1 kg. (compresión)

BARRA #3

$$e=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\707.21\\0\end{bmatrix}\frac{L}{AE}=707.1\frac{L}{AE}\quad\text{(acortamiento)}$$

$p = k3{*}e = (AE/1.414L)(-707.1\dfrac{L}{AE})$

p = 500 kg. (tensión)

Representación gráfica de los resultados obtenidos

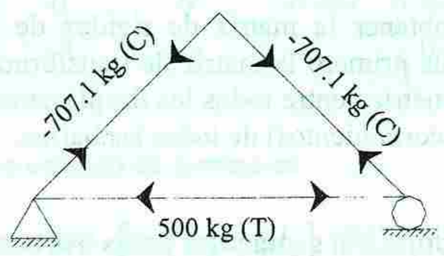
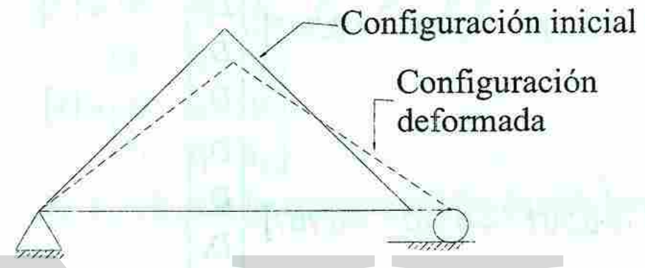


Diagrama de fuerzas en barras



"Curva elástica" de armadura

2.3.2. SOLUCIÓN 2: ENSAMBLE INDIRECTO A TRAVÉS DE LA MATRIZ [A] DE TODAS LAS BARRAS.

Existe una manera alterna de obtener la matriz de rigidez de toda la estructura, en este procedimiento alterno se ensambla primero la matriz de transformación de todas las barras, es decir, obtenemos la relación geométrica entre todos los desplazamientos posibles en los puntos de control y las elongaciones (o acortamientos) de todas las barras.

Procedimiento a seguir:

Formar las matrices de transformación geométrica de las tres barras

$$e_1 = \begin{bmatrix} -0.707 & -0.707 & +0.707 & +0.707 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix}$$

$$e_1 = \begin{bmatrix} -0.707 & +0.707 & +0.707 & -0.707 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix}$$

$$e_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & +1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix}$$

equivalentemente, se pueden expresar en notación algebráica simple

$$e_1 = -0.707 D_1 - 0.707 D_2 + 0.707 D_3 + 0.707 D_4$$

$$e_{2+} = \quad -0.707 D_3 + 0.707 D_4 + 0.707 D_5 - 0.707 D_6$$

$$e_3 = \quad -1 D_1 \quad 0 D_2 \quad +1 D_5 \quad 0 D_6$$

Sistema de ecuaciones lineales simultaneas que se puede reescribir en notación matricial de la siguiente forma :

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.707 & -0.707 & 0.707 & 0.707 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.707 & 0.707 & 0.707 & -0.707 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix}$$

Este proceso se conoce como "ensamble" de matrices.

En este sistema matricial, la matriz de 3x6 es la "matriz de transformación del sistema estructural ensamblado", siendo denominada esta matriz como: **Matriz [A] ensamblada.**

$$[A_E] = \begin{bmatrix} -0.707 & -0.707 & 0.707 & 0.707 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.707 & 0.707 & 0.707 & -0.707 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La ecuación de equilibrio estático de fuerzas es:

$$\{F\} - [A_E]^T \cdot [k] \cdot [A_E] \cdot \{D\} = 0$$

donde :

$$\{F\} = \{F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4 \quad F_5 \quad F_6\}^T$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$$

k_1, k_2 y k_3 son las rigideces axiales de cada barra

Realizando operaciones:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5k_1 + k_3 & 0.5k_1 + 0 & -0.5k_1 & -0.5k_1 & -k_3 & 0 \\ 0.5k_1 + 0 & 0.5k_1 + 0 & -0.5k_1 & -0.5k_1 & 0 & 0 \\ -0.5k_1 & -0.5k_1 & 0.5k_1 + 0.5k_2 & 0.5k_1 - 0.5k_2 & -0.5k_2 & 0.5k_2 \\ -0.5k_1 & -0.5k_1 & 0.5k_1 - 0.5k_2 & 0.5k_1 + 0.5k_2 & 0.5k_2 & -0.5k_2 \\ -k_3 & 0 & -0.5k_2 & 0.5k_2 & 0.5k_2 + k_3 & -0.5k_2 + 0 \\ 0 & 0 & 0.5k_2 & -0.5k_2 & -0.5k_2 + 0 & 0.5k_2 + 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix}$$

De la misma manera que ocurrió con el "ensamble" del sistema de ecuaciones en la solución 1, deberemos reordenar las ecuaciones y las incógnitas en el sistema para dejar las ecuaciones y las variables asociadas con los grados de libertad en la esquina superior izquierda de la matriz de rigidez global de toda la estructura.

El resto de las etapas de cálculo es idéntica a la realizada con la solución 1.

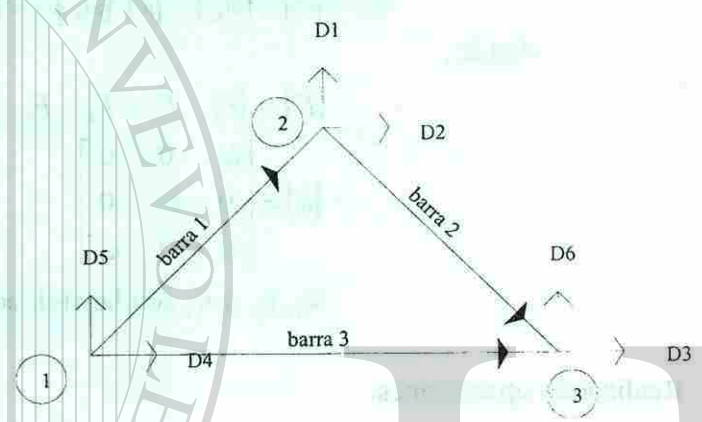
2.4. SIMPLIFICACIONES EN EL PROCESO DE ENSAMBLE DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL.

Conveniencia: Para evitar el trabajo de reacomodar el sistema de ecuaciones debemos numerar los grados de libertad de la estructura en primer lugar y después los vectores de desplazamiento restringidos.

En la armadura triangular de ejemplo que hemos estado estudiando, etiquetaríamos de la siguiente forma:

1.- Se numeran en forma secuencial ascendente los grados de libertad de la estructura y enseguida los desplazamientos restringidos.

2.- Si los desplazamientos no libres tienen una magnitud de cero, al ensamblar las matrices de rigidez de cada una de las tres barras en el tipo de solución 1 o la matriz geométrica [A] en el tipo 2 de solución, solo será necesario considerar los coeficientes asociados a los grados de libertad.



Aplicando estas ideas y el tipo 2 de solución, al formar la matriz [A] de cada barra, la magnitud de los desplazamientos conocidos e iguales a cero se manejan como se muestra enseguida:

$$e_1 = \begin{bmatrix} X & X & 0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ X \\ D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

$$e_2 = \begin{bmatrix} -0.7071 & 0.7071 & 0.7071 & X \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ X \end{bmatrix}$$

$$e_3 = \begin{bmatrix} X & X & 1 & X \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ X \\ D_3 \\ X \end{bmatrix}$$

Formando la matriz $[A]$ ensamblada de la armadura:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 & 0 \\ -0.7071 & 0.7071 & 0.7071 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}$$

Calculo de la matriz $[K_{11U}]$ a partir de la expresión $[A_E]^T.[k].[A_E]$, donde:

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

así:

$$[A_E]^T \cdot [k] \cdot [A_E] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 1.207 \end{bmatrix}$$

Ecuación de equilibrio de fuerzas que se resuelve:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = [A_E]^T \cdot [k] \cdot [A_E] \cdot \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 1.207 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix}$$

cuya solución es:

$$[D] = \left([A_E]^T [k][A_E]\right)^{-1} \cdot [F] = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 353.5 \\ -1354 \\ 707 \end{bmatrix} \frac{L}{AE}$$

y las elongaciones de cada una de las barras se puede calcular en una sola multiplicación matricial:

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = [A_E] \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \frac{L}{AE} \begin{bmatrix} -707.1 \\ -707.1 \\ 707 \end{bmatrix}$$

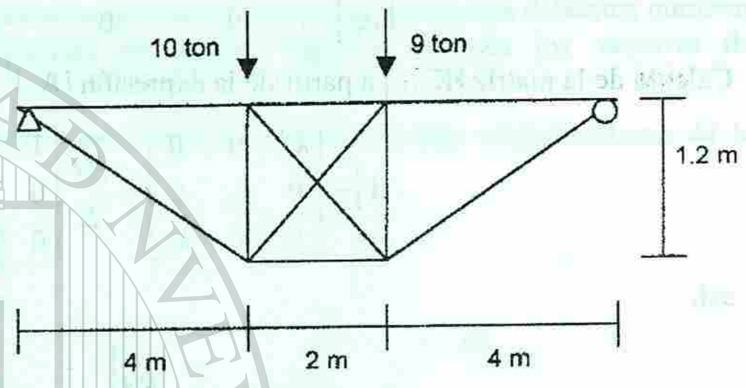
y las fuerzas internas en cada una de las tres barras:

$$\{p\} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = [k] \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -707.1 \\ -707.1 \\ 500 \end{bmatrix}$$

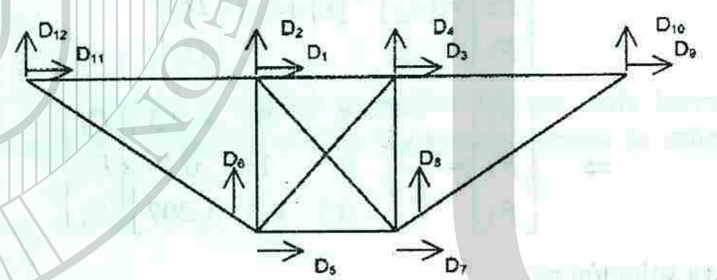
2.5. EJEMPLO ADICIONAL: Armadura simplemente apoyada

Estructura ejemplo a analizar.

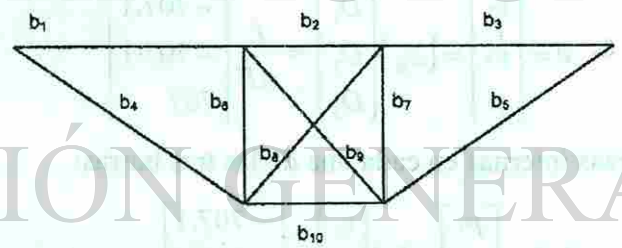
A_{HOR} = 10 CM^2
A_{VERT} = 5 CM^2
A_{DIAG} = 6 CM^2



Grados de libertad.



Identificación de barras.



2.5.1 Solucion 1: Ensamble directo de matrices de rigidez de todas las barras.
Obtencion de K

$$K := \frac{E \cdot A}{L} \qquad K1 := K3 \qquad K2 := K10 \qquad K4 := K5 \qquad K6 := K7 \qquad K8 := K9$$

$$K_1 := \frac{2100 \cdot 10}{400} \qquad K_4 := \frac{2100 \cdot 6}{417.6} \qquad K_8 := \frac{2100 \cdot 6}{233}$$

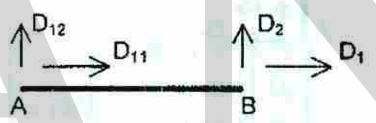
K_1=K_3= 52.5 **K_4=K_5= 30.2** **K_8=K_9= 54.1**

$$K_2 := \frac{2100 \cdot 10}{200} \qquad K_6 := \frac{2100 \cdot 5}{120}$$

K_2=K_{10}= 105 **K_6=K_7= 87.5**

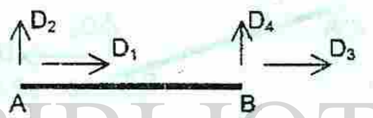
Calculo de la ecuación matricial de cada barra.

Barra no. 1



$$\begin{pmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} := 52.5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_{11} \\ D_{12} \\ D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}$$

Barra no. 2

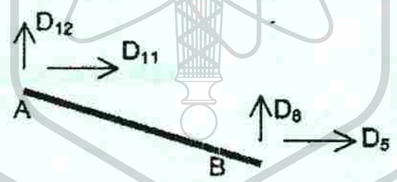


$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} := 105 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix}$$

Barra no. 3

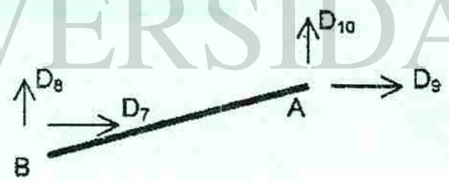
$$\begin{pmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_9 \\ F_{10} \end{pmatrix} := 52.5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_3 \\ D_4 \\ D_9 \\ D_{10} \end{pmatrix}$$

Barra no. 4



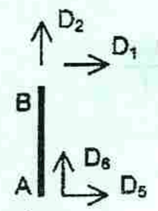
$$\begin{pmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix} := 30.2 \cdot \begin{pmatrix} 0.917 & -0.275 & -0.917 & 0.275 \\ -0.275 & 0.082 & 0.275 & -0.082 \\ -0.917 & 0.275 & 0.917 & -0.275 \\ 0.275 & -0.082 & -0.275 & 0.082 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_{11} \\ D_{12} \\ D_5 \\ D_6 \end{pmatrix}$$

Barra no. 5



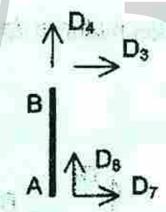
$$\begin{pmatrix} F_9 \\ F_{10} \\ F_7 \\ F_8 \end{pmatrix} := 30.2 \cdot \begin{pmatrix} 0.917 & 0.275 & -0.917 & -0.275 \\ 0.275 & 0.082 & -0.275 & -0.082 \\ -0.917 & -0.275 & 0.917 & 0.275 \\ -0.275 & -0.082 & 0.275 & 0.082 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_9 \\ D_{10} \\ D_7 \\ D_8 \end{pmatrix}$$

Barra no. 6



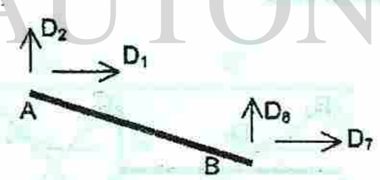
$$\begin{pmatrix} F_5 \\ F_6 \\ F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} := 87.5 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_5 \\ D_6 \\ D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}$$

Barra no. 7



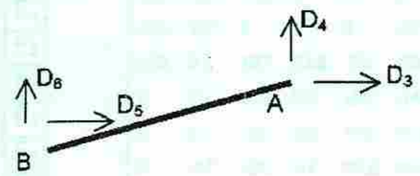
$$\begin{pmatrix} F_7 \\ F_8 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} := 87.5 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_7 \\ D_8 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix}$$

Barra no. 8



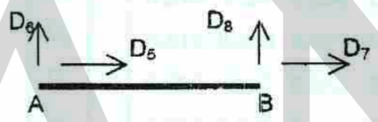
$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_7 \\ F_8 \end{pmatrix} := 54.1 \cdot \begin{pmatrix} 0.735 & -0.441 & -0.735 & 0.441 \\ -0.441 & 0.265 & 0.441 & -0.265 \\ -0.735 & 0.441 & 0.735 & -0.441 \\ 0.441 & -0.265 & -0.441 & 0.265 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_7 \\ D_8 \end{pmatrix}$$

Barra no. 9



$$\begin{pmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix} := 54.1 \cdot \begin{pmatrix} 0.735 & 0.441 & -0.735 & -0.441 \\ 0.441 & 0.265 & -0.441 & -0.265 \\ -0.735 & -0.441 & 0.735 & 0.441 \\ -0.441 & -0.265 & 0.441 & 0.265 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{pmatrix}$$

Barra no. 10



$$\begin{pmatrix} F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_{18} \end{pmatrix} := 105 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \end{pmatrix}$$

Barra 1
$F_{11}= 52.5\ D_{11} - 52.5\ D_1$
$F_{12}= 0$
$F_{1}= -52.5\ D_{11} + 52.5\ D_1$
$F_{2}= 0$

Barra 2
$F_3= 105\ D_1 - 105\ D_3$
$F_2= 0$
$F_3= -105\ D_1 + 105\ D_3$
$F_4= 0$

Barra 3
$F_3= 52.5\ D_3 - 52.5\ D_9$
$F_4= 0$
$F_9 = -52.5\ D_3 + 52.5\ D_9$
F10= 0

Barra 4
$F_{11}= 27.69D_{11} - 8.3D_{12} - 27.69D_5 + 8.3D_6$
$F_{12}= -8.3D_{11} + 2.47D_{12} + 8.3D_5 - 2.47D_6$
$F_5= -27.69D_{11} + 8.3D_{12} + 27.69D_5 - 8.3D_6$
$F_6= 8.3D_{11} - 2.47D_{12} - 8.3D_5 + 2.47D_6$

Barra 5

$F_9 = 27.69D_9 - 8.3D_{10} - 27.69D_7 + 8.3D_8$
$F_{10} = -8.3D_9 + 2.47D_{10} + 8.3D_7 - 2.47D_8$
$F_7 = -27.69D_9 + 8.3D_{10} + 27.69D_7 - 8.3D_8$
$F_8 = 8.3D_9 - 2.47D_{10} - 8.3D_7 + 2.47D_8$

Barra 6

$F_5 = 0$
$F_6 = 87.5D_6 - 87.5D_2$
$F_1 = 0$
$F_2 = -87.5D_6 + 87.5D_2$

Barra 7

$F_7 = 0$
$F_8 = 87.5D_8 - 87.5D_4$
$F_3 = 0$
$F_4 = -87.5D_8 + 87.5D_4$

Barra 8

$F_1 = 39.76D_1 - 23.86D_2 - 39.76D_7 + 23.86D_8$
$F_2 = -23.86D_1 + 14.33D_2 + 23.86D_7 - 14.33D_8$
$F_7 = -39.76D_1 + 23.86D_2 + 39.76D_7 - 23.86D_8$
$F_8 = 23.86D_1 - 14.33D_2 - 23.86D_7 + 14.33D_8$

Barra 9

$F_3 = 39.76D_3 - 23.86D_4 - 39.76D_5 + 23.86D_6$
$F_4 = -23.86D_3 + 14.33D_4 + 23.86D_5 - 14.33D_6$
$F_5 = -39.76D_3 + 23.86D_4 + 39.76D_5 - 23.86D_6$
$F_6 = 23.86D_3 - 14.33D_4 - 23.86D_5 + 14.33D_6$

Barra 10

$F_5 = 105\,D_5 - 105\,D_7$
$F_6 = 0$
$F_7 = -105\,D_5 + 105\,D_7$
$F_8 = 0$

$F_1 = 197.26D_1 - 23.86D_2 - 105D_3 - 39.76D_7 + 23.86D_8 - 52.5D_{11}$
$F_2 = -23.86D_1 + 101.86D_2 - 87.5D_6 + 23.86D_7 - 14.33D_8$
$F_3 = -105D_1 + 197.26D_3 + 197.26D_4 - 39.76D_5 - 23.86D_6 - 52.5D_9$
$F_4 = 23.86D_3 + 101.86D_4 - 23.86D_5 - 14.33D_6 - 87.5D_8$
$F_5 = -39.76D_3 - 23.86D_4 + 172.45D_5 + 15.56D_6 - 105D_7 - 27.69D_{11} + 8.3D_{12}$
$F_6 = -87.5D_2 - 23.86D_3 - 14.33D_4 + 15.56D_5 - 104.3D_6 + 8.3D_{11}\ \ 2.47D_{12}$
$F_7 = -39.76D_1 + 23.86D_2 - 105D_5 + 172.45D_7 - 15.56D_8 - 27.69D_9 - 8.3D_{10}$
$F_8 = 23.86D_1 - 14.33D_2 - 87.5D_4 - 15.56D_7 + 104.3D_8 - 8.3D_9 - 2.47D_{10}$
$F_9 = -52.5D_3 - 27.69D_7 - 8.3D_8 + 80.19D_9 + 8.3D_{10}$
$F_{10} = -8.3D_7 - 2.47D_8 + 8.3D_9 + 2.47D_{10}$
$F_{11} = -52.5D_1 - 27.69D_5 + 8.3D_6 + 80.19D_{11} - 8.3D_{12}$
$F_{12} = 8.3D_5 - 2.47D_6 - 8.3D_{11} + 2.47D_{12}$

$$
\begin{array}{c}
\boxed{F_1}\\ \boxed{F_2}\\ \boxed{F_3}\\ \boxed{F_4}\\ \boxed{F_5}\\ \boxed{F_6}\\ \boxed{F_7}\\ \boxed{F_8}\\ \boxed{F_9}\\ \boxed{F_1}\\ \boxed{F_1}\\ \boxed{F_1}
\end{array}
\quad
\left|\begin{array}{ccccccccc|ccc}
197. & -23. & -105 & 0 & 0 & 0 & -39. & 23.8 & 0 & 0 & -52. & 0\\
-23. & 101. & 0 & 0 & 0 & -87. & 23.8 & -14. & 0 & 0 & 0 & 0\\
105 & 0 & 197. & 23.8 & -39. & -23. & 0 & 0 & -52. & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 23.8 & 101. & -23. & -14. & 0 & -87. & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -39. & -23. & 172. & 15.5 & -105 & 0 & 0 & 0 & -27. & 8.3\\
0 & -87. & -23. & -14. & 15.5 & 104. & 0 & 0 & 0 & 0 & 8.3 & -2.4\\
-39. & 23.8 & 0 & 0 & -105 & 0 & 172. & -15. & -27. & -8.3 & 0 & 0\\
23.8 & -14. & 0 & -87. & 0 & 0 & -15. & 104. & -8.3 & -2.4 & 0 & 0\\
0 & 0 & -52. & 0 & 0 & 0 & -27. & -8.3 & 80.1 & 8.3 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8.3 & -2.4 & 8.3 & 2.47 & 0 & 0\\
-52. & 0 & 0 & 0 & -27. & 8.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 80.1 & -8.3\\
8.3 & 0 & 0 & 0 & 8.3 & -2.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8.3 & 2.47
\end{array}\right|
\quad
\left|\begin{array}{c}
D_1\\ D_2\\ D_3\\ D_4\\ D_5\\ D_6\\ D_7\\ D_8\\ D_9\\ D_{10}\\ D_{11}\\ D_{12}
\end{array}\right|
$$

$$
\begin{pmatrix} D_1\\ D_2\\ D_3\\ D_4\\ D_5\\ D_6\\ D_7\\ D_8\\ D_9 \end{pmatrix}
:=
\begin{pmatrix}
0.019 & 0.039 & 0.019 & 0.026 & 0.011 & 0.039 & 0.011 & 0.026 & 0.019\\
0.039 & 0.39 & 0.054 & 0.35 & 0.041 & 0.381 & 0.024 & 0.348 & 0.08\\
0.019 & 0.054 & 0.027 & 0.041 & 0.016 & 0.055 & 0.015 & 0.042 & 0.028\\
0.026 & 0.35 & 0.041 & 0.39 & 0.055 & 0.348 & 0.038 & 0.381 & 0.08\\
0.011 & 0.041 & 0.016 & 0.055 & 0.027 & 0.042 & 0.022 & 0.055 & 0.024\\
0.039 & 0.381 & 0.055 & 0.348 & 0.042 & 0.383 & 0.026 & 0.346 & 0.08\\
0.011 & 0.024 & 0.015 & 0.038 & 0.022 & 0.026 & 0.026 & 0.039 & 0.023\\
0.026 & 0.348 & 0.042 & 0.381 & 0.055 & 0.346 & 0.039 & 0.383 & 0.08\\
0.019 & 0.08 & 0.028 & 0.08 & 0.024 & 0.08 & 0.023 & 0.08 & 0.047
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix} 0\\ -10\\ 0\\ -9\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}
$$

D1= -0.618	D4= -7.006	D7= -0.588
D2= -7.046	D5= -0.91	D8= -6.912
D3= -0.908	D6= -6.945	D9= -1.513

Barra 1

$$e_1 := (-1\ \ 0\ \ 1\ \ 0)\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-0.618\\-7.046\end{pmatrix}$$

e_1= -0.618 cm

P_1= (52.5)(-0.618) = -32.4 Ton

Barra 2

$$e_2 := (-1\ \ 0\ \ 1\ \ 0)\cdot\begin{pmatrix}-0.618\\-7.046\\-0.908\\-7.006\end{pmatrix}$$

e_2 -0.29m

P_2 (-0.29)(105) = -30.45 Ton

Barra 3

$$e_3 := (-1\ \ 0\ \ 1\ \ 0)\cdot\begin{pmatrix}-0.908\\-7.006\\-1.513\\0\end{pmatrix}$$

e_3 = -0.605

P_3 (-0.605)(52.5) = -31.76 Ton

Barra 4

$$e_4 := (-0.958\ \ 0.287\ \ 0.958\ \ -0.287)\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-0.91\\-6.945\end{pmatrix}$$

e_4 = 1.12

P_4 = (1.12)(30.2) = 33.8 Ton

Barra 5

$$e_5 := (0.958\ \ 0.287\ \ -0.958\ \ -0.287)\cdot\begin{pmatrix}-1.513\\0\\-0.588\\-6.912\end{pmatrix}$$

e_5 = 1.097

P_5 = (1.097)(30.2) = 33.13 Ton

Barra 6

$$e_6 := (0\ \ -1\ \ 0\ \ 1)\cdot\begin{pmatrix}-0.91\\-6.945\\-0.618\\-7.046\end{pmatrix}$$

e_6 = -0.101

P_6 = (-0.101)(87.5) = -8.83 Ton

Barra 7

$$e_7 := (0\ \ -1\ \ 0\ \ 1)\cdot\begin{pmatrix}-0.588\\-6.912\\-0.908\\-7.046\end{pmatrix}$$

e_7 = -0.134

P_7= (-0.134)(87.5) = -11.725

Barra 8

$$e_8 := (-0.857\ \ 0.515\ \ 0.857\ \ -0.515)\cdot\begin{pmatrix}-0.618\\-7.046\\-0.588\\-6.912\end{pmatrix}$$

e_8 = -0.043

P_8 = (-0.043)(54.1) = -2.34Ton

Barra 9

$$e_9 := (0.857\ \ 0.515\ \ -0.857\ \ -0.515)\cdot\begin{pmatrix}-0.908\\-7.006\\-0.588\\-6.945\end{pmatrix}$$

e_9 = -0.0297

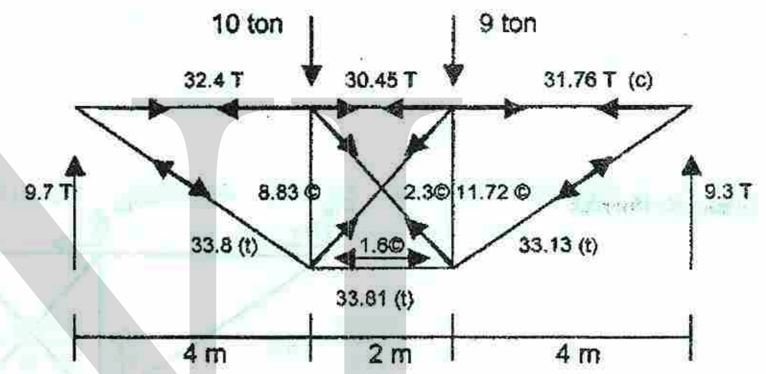
P_9 = (-0.0297)(54.1) = -1.6 Ton

Barra 10

$$e_{10} := (-1\ \ 0\ \ 1\ \ 0)\cdot\begin{pmatrix}-0.91\\-6.945\\-0.588\\-6.912\end{pmatrix}$$

e_{10} = 0.322 cm

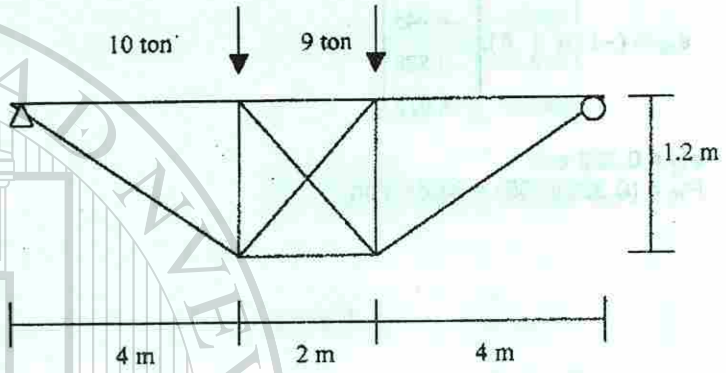
P_{10} = (0.322)(105) = 33.81 Ton



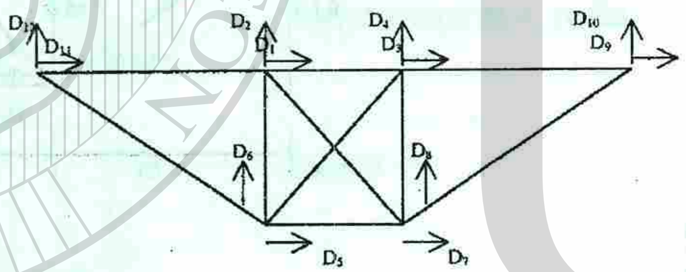
2.5.2 Solucion 2: Ensamble indirecto a traves de la matriz A de todas las barras.

Estructura ejemplo a analizar.

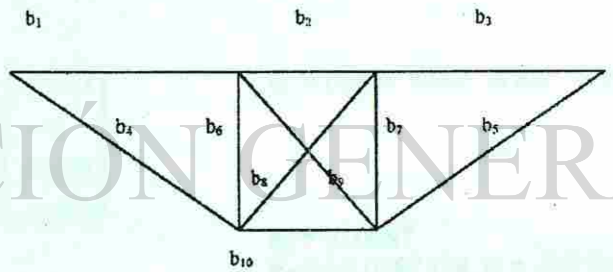
$A_{HOR} = 10\ CM^2$
$A_{VERT} = 5\ CM^2$
$A_{DIAG} = 6\ CM^2$



Grados de libertad.



Identificación de barras.



$$
\begin{Vmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \\ e_9 \\ e_{10} \end{Vmatrix}
=
\underbrace{\left[\begin{array}{cccccccccccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & .95 & -.28 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.95 & .287 & 0 & -.95 & .287 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.95 & -.28 & .95 & .28 & 0 & 0 & .28 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-.85 & .51 & 0 & 0 & 0 & 0 & .85 & -.51 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & .85 & .51 & -.85 & -.51 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]}_{A\ (10 \times 9)}
\begin{Vmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \end{Vmatrix}
$$

$$K := \frac{E \cdot A}{L}$$

K1 := K3 K2 := K10 K4 := K5 K6 := K7 K8 := K9

$$K_1 := \frac{2100 \cdot 10}{400} \qquad K_4 := \frac{2100 \cdot 6}{417.6} \qquad K_8 := \frac{2100 \cdot 6}{233}$$

$K_1 = K_3 = 52.5$ **$K_4 = K_5 = 30.2$** **$K_8 = K_9 = 54.1$**

$$K_2 := \frac{2100 \cdot 10}{200} \qquad K_6 := \frac{2100 \cdot 5}{120}$$

$K_2 = K_{10} = 105$ **$K_6 = K_7 = 87.5$**

$$K := \begin{pmatrix} 52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 105 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30.17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30.17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 87.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 87.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54.07 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54.07 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 105 \end{pmatrix}$$

$$A^T := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.857 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & .515 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .857 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & .515 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -.958 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.857 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -.287 & 0 & -1 & 0 & 0 & -.515 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -.958 & 0 & 0 & .857 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -.287 & 0 & -1 & -.515 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & .958 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[F] = \overbrace{A^T\ K\ A}^{B}\ D$$

$$B := \begin{pmatrix} 197.212 & -23.864 & -105 & 0 & 0 & 0 & -39.712 & 23.864 & 0 \\ -23.864 & 101.841 & 0 & 0 & 0 & -87.5 & 23.864 & -14.341 & 0 \\ -105 & 0 & 197.212 & 23.864 & -39.712 & -23.864 & 0 & 0 & -52.5 \\ 0 & 0 & 23.864 & 101.841 & -23.864 & -14.341 & 0 & -87.5 & 0 \\ 0 & 0 & -39.712 & -23.864 & 172.401 & 15.569 & -105 & 0 & 0 \\ 0 & -87.5 & -23.864 & -14.341 & 15.569 & 104.326 & 0 & 0 & 0 \\ -39.712 & 23.864 & 0 & 0 & -105 & 0 & 172.401 & -15.569 & -27.689 \\ 23.864 & -14.341 & 0 & -87.5 & 0 & 0 & -15.569 & 104.326 & -8.295 \\ 0 & 0 & -52.5 & 0 & 0 & 0 & -27.689 & -8.295 & 80.189 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} := \begin{pmatrix} 0.019 & 0.038 & 0.014 & 0.025 & 0.011 & 0.038 & 0.011 & 0.025 & 0.019 \\ 0.038 & 0.385 & 0.053 & 0.346 & 0.041 & 0.377 & 0.024 & 0.344 & 0.079 \\ 0.019 & 0.053 & 0.027 & 0.041 & 0.016 & 0.054 & 0.015 & 0.041 & 0.027 \\ 0.025 & 0.346 & 0.041 & 0.385 & 0.055 & 0.344 & 0.038 & 0.377 & 0.079 \\ 0.011 & 0.041 & 0.016 & 0.055 & 0.027 & 0.041 & 0.022 & 0.054 & 0.024 \\ 0.038 & 0.377 & 0.054 & 0.344 & 0.041 & 0.379 & 0.025 & 0.342 & 0.079 \\ 0.011 & 0.024 & 0.015 & 0.038 & 0.022 & 0.025 & 0.026 & 0.038 & 0.023 \\ 0.025 & 0.344 & 0.041 & 0.377 & 0.054 & 0.342 & 0.038 & 0.379 & 0.079 \\ 0.019 & 0.074 & 0.027 & 0.079 & 0.024 & 0.079 & 0.023 & 0.079 & 0.046 \end{pmatrix}$$

$$F := \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \\ -9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$D = B^{-1} F$

D1= -0.61
D2= -6.964
D3= -0.896
D4= -6.924
D5= -0.899
D6= -6.864
D7= -0.581
D8= -6.831
D9= -1.494

Barra 1

$$e_1 := (-1\ \ 0\ \ 1\ \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.61 \\ -6.964 \end{pmatrix}$$

e_1= -0.61cm

P_1= (52.5)(-0.61) = -32Ton

Barra 2

$$e_2 := (-1\ \ 0\ \ 1\ \ 0)\cdot\begin{pmatrix}-0.61\\-6.964\\-0.896\\-6.964\end{pmatrix}$$

e_2 -0.286

P_2 (-0.286)(105) = -30 Ton

Barra 3

$$e_3 := (-1\ \ 0\ \ 1\ \ 0)\cdot\begin{pmatrix}-0.896\\-6.964\\-1.494\\0\end{pmatrix}$$

e_3 = -0.598

P_3 (-0.598)(52.5) = -31.4 Ton

Barra 4

$$e_4 := (-0.958\ \ 0.287\ \ 0.958\ \ -0.287)\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-0.899\\-6.864\end{pmatrix}$$

e_4 = 1.109

P_4 = (1.109)(30.17) = 33.5 Ton

Barra 5

$$e_5 := (0.958\ \ 0.287\ \ -0.958\ \ -0.287)\cdot\begin{pmatrix}-1.494\\0\\-0.581\\-6.831\end{pmatrix}$$

e_5 = 1.085

P_5 = (1.085)(30.17) = 32.7 Ton

Barra 6

$$e_6 := (0\ \ -1\ \ 0\ \ 1)\cdot\begin{pmatrix}-0.849\\-6.864\\-0.61\\-6.964\end{pmatrix}$$

e_6 = -0.1

P_6 = (-0.1)(87.5) = -8.75 Ton

Barra 7

$$e_7 := (0\ \ -1\ \ 0\ \ 1)\cdot\begin{pmatrix}-0.581\\-6.831\\-0.896\\-6.924\end{pmatrix}$$

e_7 = -0.093

P_7= (-0.093)(87.5) = -8.14

Barra 8

$$e_8 := (-0.857\ \ 0.515\ \ 0.857\ \ -0.515)\cdot\begin{pmatrix}-0.61\\-6.964\\-0.581\\-6.831\end{pmatrix}$$

e_8 = -0.043

P_8 = (-0.043)(54.07) = -2.32Ton

Barra 9

$$e_9 := (0.857\ \ 0.515\ \ -0.857\ \ -0.515)\cdot\begin{pmatrix}-0.899\\-6.864\\-0.896\\-6.924\end{pmatrix}$$

e_9 = -0.028

P_9 = (-0.028)(54.07) = -1.5 Ton

Barra 10

$$e_{10} := (-1\ \ 0\ \ 1\ \ 0)\cdot\begin{pmatrix}-0.899\\-6.864\\-0.581\\-6.831\end{pmatrix}$$

e_{10} = 0.318 cm

P_{10} = (0.318)(105) = 33.39 Ton

2.6. Interpretación de la matriz $\{A\}^T$ como la matriz "estática"

Si analizamos la ecuación matricial que relaciona a las fuerzas internas en todas las barras con todas las fuerzas externas aplicadas en los puntos de control:

$$\{F\} = [A_E]^T \cdot \{p\}$$

Donde:

$[A_E]^T$ => tiene: renglones = # total de vectores desplazamiento en la armadura.

Columnas = # de barras en la armadura.

esta ecuación matricial equivale a aplicar las ecuaciones de la estática en cada uno de los nudos de la armadura, de esta aplicación surgirá un par de ecuaciones por cada nudo. Este procedimiento se conoce en los libros de estática como el método de los nudos para el análisis de fuerzas en armaduras isostáticas.

De acuerdo a lo que aprendimos en nuestros cursos de estática, deberíamos identificar, antes de intentar el análisis de fuerzas, si la armadura es isostática, en caso de no serlo decimos que tenemos una armadura hiperestática y no podemos aplicar el método.

El sistema matricial se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} F_U \\ F_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_U^T \\ A_R^T \end{bmatrix} \cdot \{p\}$$

equivalentemente:

$$F_U = A_U^T \cdot p \qquad \text{(ecuación a)}$$

$$F_R = A_R^T \cdot p \qquad \text{(ecuación b)}$$

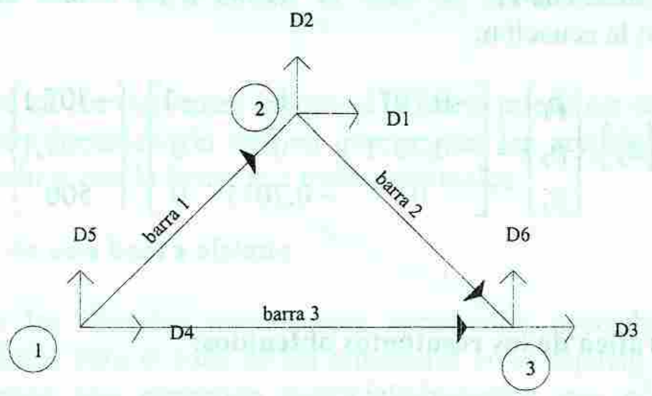
Si en la ecuación (a) se cumple que el número de fuerzas externas asociadas a los grados de libertad es igual al número de barras en la armadura, entonces la matriz $[A_U]^T$ es una matriz cuadrada y puede calcularse su inversa. En este caso, podemos calcular las fuerzas axiales en todas las barras a partir de esta ecuación. De la ecuación (b) se pueden determinar las reacciones en los apoyos.

El cumplimiento de las condiciones anteriores se tiene cuando la armadura cae dentro de la categoría conocida como armaduras isostáticas; es decir, basta con las ecuaciones de equilibrio de la estática para calcular las fuerzas internas en las barras. Aunque habría que reconocer que faltaría calcular las deformaciones internas de las barras y los desplazamientos de sus "nudos" para considerar que se ha realizado el análisis completo de la armadura, tal como se definió al inicio de este curso.

Determinar las elongaciones y desplazamientos de los nudos mediante los métodos "clásicos" ya conocidos, no es una tarea trivial, desde el punto de vista de trabajo numérico.

Aplicaremos estas ideas a la armadura triangular que ha sido estudiada en artículos previos.

Como primer paso del análisis, etiquetaremos los grados de libertad como se indica enseguida:



A continuación se forma la matriz $[A]^1$ para cada una de las tres barras:

$$\begin{Bmatrix} F_4 \\ F_5 \\ F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7071 \\ -0.7071 \\ 0.7071 \\ 0.7071 \end{bmatrix} \cdot p_1 \qquad \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7071 \\ 0.7071 \\ 0.7071 \\ -0.7071 \end{bmatrix} \cdot p_2 \qquad \begin{Bmatrix} F_4 \\ F_5 \\ F_3 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot p_3$$

Y podemos formar la matriz "A traspuesta" de la armadura completa ensamblando directamente los vectores columna $[A]^T$ de cada una de las tres barras:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \hline F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} 0.7071 & -0.7071 & 0 \\ 0.7071 & 0.7071 & 0 \\ 0 & 0.7071 & 1 \\ \hline -0.7071 & 0 & -1 \\ -0.7071 & 0 & 0 \\ 0 & -0.7071 & 0 \end{array}\right] \cdot \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}$$

ahora podemos realizar la partición de esta ecuación matricial, tal como lo indica la línea discontinua, donde F_U y A_U son:

$$\{F_U\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1000 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \left[A_U^T\right] = \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 & 0 \\ 0.7071 & 0.7071 & 0 \\ 0 & 0.7071 & 1 \end{bmatrix}$$

$[A_U]^T$ es una matriz cuadrada y, por lo tanto, puede existir su inversa. A partir de esta ecuación podemos calcular las fuerzas axiales en todas las barras con la ecuación:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} = \left[A_U^T\right]^{-1} \cdot \{F_U\} = \begin{Bmatrix} -707.1 \\ -707.1 \\ 500 \end{Bmatrix}$$

y las reacciones con la ecuación:

$$\begin{Bmatrix} F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \left[A_R^T\right] \cdot \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7071 & 0 & -1 \\ -0.7071 & 0 & 0 \\ 0 & -0.7071 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -707.1 \\ -707.1 \\ 500 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 500 \\ 500 \end{Bmatrix}$$

Representación gráfica de los resultados obtenidos:

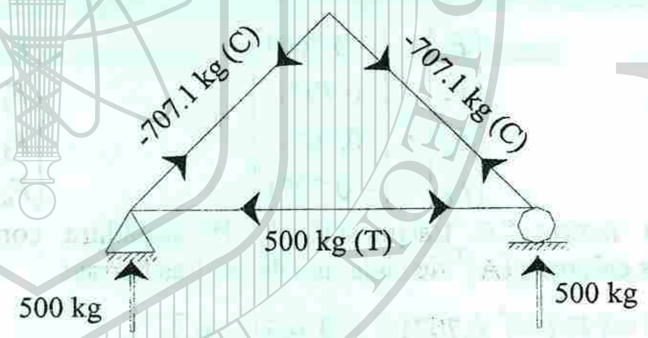


Diagrama de fuerzas en barras
y reacciones en los apoyos

ESTRUCTURAS TIPO ARMADURA EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

3.1. Ampliación de la teoría para cubrir el caso de las armaduras en el espacio tridimensional.

Tal como se demostrará en los siguientes artículos, la teoría puede ser ampliada de manera lógica y sistemática para la condición real en que existen las armaduras, es decir, estas existen en nuestro espacio y, por lo tanto, son tridimensionales.

3.2. Matriz de rigidez de una barra aislada

Para poder desarrollar los modelos matemáticos apropiados, procederemos de manera análoga a como lo hicimos para el caso de las armaduras en el espacio bidimensional. En primer lugar, buscaremos una expresión matricial/algebraica que nos relacione a los desplazamientos de los dos extremos de la barra *versus* la elongación de la misma, enseguida, demostraremos como se relacionan las fuerzas internas *versus* las fuerzas en los extremos de la barra.

3.2.1. Obtención de matriz de transformación de coordenadas globales a locales

En el caso de las armaduras en el espacio bidimensional, esta matriz que establece la relación geométrica entre los desplazamientos del extremo B de la barra *versus* el desplazamiento interno de la barra, fue establecida como:

$$e_{barra} = \left[\cos\theta \quad sen\theta\right] \cdot \begin{bmatrix} dx_B \\ dy_B \end{bmatrix}$$

Observar que se puede llegar a esta misma expresión a través de las ideas siguientes:

1.- Si consideramos que la barra analizada tiene dirección y sentido (va del extremo A al B) podemos representarla con un vector

$$\vec{B} = \Delta x \cdot i + \Delta y \cdot j + \Delta z \cdot k$$

que dividido entre su modulo $\|\vec{B}\| = L$, nos resulta el vector unitario $\vec{b}$

$$\vec{b} = \frac{\Delta x}{L} \cdot i + \frac{\Delta y}{L} \cdot j + \frac{\Delta z}{L} \cdot k$$

2.- El producto de los vectores $\vec{b} \cdot \vec{D}$, donde: $\vec{D} = dx \cdot i + dy \cdot j + dz \cdot k$, es la elongación de la barra como función de los desplazamientos del extremo B de la misma:

$$\text{e}=\vec{b} \cdot \vec{D} = \left(\frac{\Delta x}{L} \cdot i + \frac{\Delta y}{L} \cdot j + \frac{\Delta z}{L} \cdot k\right) \cdot (dx \cdot i + dy \cdot j + dz \cdot k)$$

$$\text{e}=\left(\frac{\Delta x}{L}\right) \cdot dx + \left(\frac{\Delta y}{L}\right) \cdot dy + \left(\frac{\Delta z}{L}\right) \cdot dz$$

Así, para el espacio bidimensional:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} = \left[A_U^T\right]^{-1} \cdot \{F_U\} = \begin{Bmatrix} -707.1 \\ -707.1 \\ 500 \end{Bmatrix}$$

y las reacciones con la ecuación:

$$\begin{Bmatrix} F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \left[A_R^T\right] \cdot \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7071 & 0 & -1 \\ -0.7071 & 0 & 0 \\ 0 & -0.7071 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -707.1 \\ -707.1 \\ 500 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 500 \\ 500 \end{Bmatrix}$$

Representación gráfica de los resultados obtenidos:

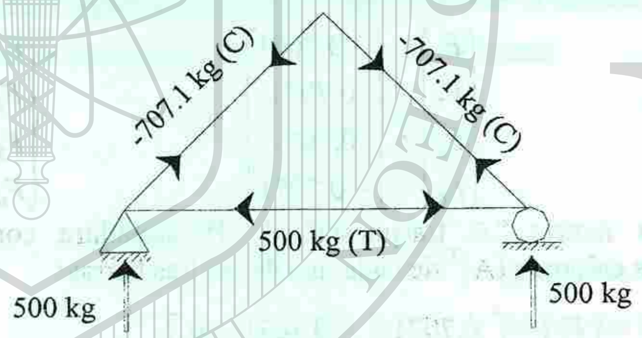


Diagrama de fuerzas en barras
y reacciones en los apoyos

ESTRUCTURAS TIPO ARMADURA EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

3.1. Ampliación de la teoría para cubrir el caso de las armaduras en el espacio tridimensional.

Tal como se demostrará en los siguientes artículos, la teoría puede ser ampliada de manera lógica y sistemática para la condición real en que existen las armaduras, es decir, estas existen en nuestro espacio y, por lo tanto, son tridimensionales.

3.2. Matriz de rigidez de una barra aislada

Para poder desarrollar los modelos matemáticos apropiados, procederemos de manera análoga a como lo hicimos para el caso de las armaduras en el espacio bidimensional. En primer lugar, buscaremos una expresión matricial/algebraica que nos relacione a los desplazamientos de los dos extremos de la barra *versus* la elongación de la misma, enseguida, demostraremos como se relacionan las fuerzas internas *versus* las fuerzas en los extremos de la barra.

3.2.1. Obtención de matriz de transformación de coordenadas globales a locales

En el caso de las armaduras en el espacio bidimensional, esta matriz que establece la relación geométrica entre los desplazamientos del extremo B de la barra *versus* el desplazamiento interno de la barra, fue establecida como:

$$e_{barra} = \begin{bmatrix} \cos\theta & sen\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx_B \\ dy_B \end{bmatrix}$$

Observar que se puede llegar a esta misma expresión a través de las ideas siguientes:

1.- Si consideramos que la barra analizada tiene dirección y sentido (va del extremo A al B) podemos representarla con un vector

$$\vec{B} = \Delta x \cdot i + \Delta y \cdot j + \Delta z \cdot k$$

que dividido entre su modulo $\|\vec{B}\| = L$, nos resulta el vector unitario $\vec{b}$

$$\vec{b} = \frac{\Delta x}{L} \cdot i + \frac{\Delta y}{L} \cdot j + \frac{\Delta z}{L} \cdot k$$

2.- El producto de los vectores $\vec{b} \cdot \vec{D}$, donde: $\vec{D} = dx \cdot i + dy \cdot j + dz \cdot k$, es la elongación de la barra como función de los desplazamientos del extremo B de la misma:

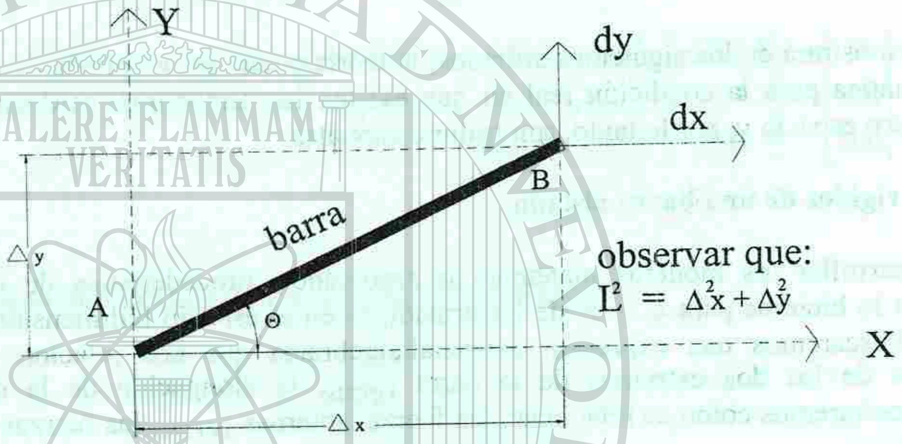
$$e = \vec{b} \cdot \vec{D} = \left(\frac{\Delta x}{L} \cdot i + \frac{\Delta y}{L} \cdot j + \frac{\Delta z}{L} \cdot k\right) \cdot (dx \cdot i + dy \cdot j + dz \cdot k)$$

$$e = \left(\frac{\Delta x}{L}\right) \cdot dx + \left(\frac{\Delta y}{L}\right) \cdot dy + \left(\frac{\Delta z}{L}\right) \cdot dz$$

Así, para el espacio bidimensional:

$$e=\left(\frac{\Delta x}{L}\right)\cdot dx+\left(\frac{\Delta y}{L}\right)\cdot dy$$

Si observamos en la figura siguiente:



$\cos\theta=\dfrac{\Delta x}{L}$ y $\operatorname{sen}\theta=\dfrac{\Delta y}{L}$

sustituyendo en la ecuación recién obtenida:

$$e_{barra}=\cos\theta\cdot dx+\operatorname{sen}\theta\cdot dy$$

o matricialmente:

$$[e_{barra}]=\begin{bmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}dx\\ dy\end{bmatrix}$$ ¡ relación geométrica que ya conocíamos ¡

Esta demostración de lo ya conocido y aceptado, a través de un camino diferente, nos da la confianza para afirmar que para el caso tridimensional la elongación total de la barra se puede calcular por medio de la expresión siguiente:

$$e_{barra}=\left[-\left(\frac{\Delta x}{L}\right)\ \ -\left(\frac{\Delta y}{L}\right)\ \ -\left(\frac{\Delta z}{L}\right)\ \ \left(\frac{\Delta x}{L}\right)\ \ \left(\frac{\Delta y}{L}\right)\ \ \left(\frac{\Delta z}{L}\right)\right]\cdot\begin{bmatrix}Dx_A\\ Dy_A\\ Dz_A\\ Dx_B\\ Dy_B\\ Dz_B\end{bmatrix}$$

el lector deberá reconocer que la utilización del producto punto de dos vectores nos lleva a la respuesta correcta debido a que su resultado coincide con el efecto que tiene un vector desplazamiento sobre la barra cuando se acepta el teorema demostrado para desplazamientos pequeños.

Si sustituimos: $C_x=\dfrac{\Delta x}{L}$, $C_y=\dfrac{\Delta y}{L}$, $C_z=\dfrac{\Delta z}{L}$ (cosenos directores de la barra)

Podemos reescribir la ecuación propuesta de la siguiente forma:

$$e_{barra}=\begin{bmatrix}-Cx & -Cy & -Cz & Cx & Cy & Cz\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}Dx_A\\ Dy_A\\ Dz_A\\ Dx_B\\ Dy_B\\ Dz_B\end{bmatrix}=[A_{barra}]\cdot[D_{barra}]$$

3.2.2. Obtención de matriz de transformación de fuerzas internas a fuerzas externas

Ahora estableceremos la relación geométrica entre la fuerza interna de la barra y las fuerzas que deben existir en los extremos de la misma barra. Para la obtención de la relación buscada, aplicaremos el principio de contragradiencia demostrado en el artículo 2.2.3.

Como es sabido, se debe cumplir la siguiente igualdad:

TRABAJO FUERZAS EXTERNAS	=	TRABAJO FUERZAS INTERNAS

Si consideramos que:

$$e=[A]\,[D]$$
$$y\ \ [F]=[B]\cdot p$$

sustituyendo en la igualdad de trabajos externo e interno:

$$\frac{1}{2}\{F\}^T\cdot\{D\}=\frac{1}{2}p\cdot e$$

$$\frac{1}{2}p\cdot[B]^T\cdot\{D\}=\frac{1}{2}p\cdot[A]\cdot\{D\}$$

aplicando el principio de contragradiencia

$$[B]^T=[A] \qquad \Rightarrow [B]=[A]^T$$

así, podemos afirmar que la relación entre fuerzas internas y externas es :

$$\{F\}=[A]^T\cdot p$$

finalmente, extendiendo el resto de las ideas manejadas para el caso bidimensional al tridimensional:

$$[F]=[A]^T\cdot k\cdot[A]\cdot[D]$$

A partir de esta ecuación matricial de barra, podemos ensamblar la matriz de rigidez de toda la estructura superponiendo los efectos de todas las barras. Para realizar este ensamble se puede proceder como en el caso de las armaduras bidimensionales, a través del procedimiento tipo 1 o del procedimiento tipo 2.

Posiblemente el procedimiento tipo 2 sea el más apropiado, según se ha descubierto en los ejercicios numéricos realizados por el lector hasta este momento.

Una vez ensamblada la matriz de rigidez de toda la estructura, el resto del procedimiento de análisis es idéntico al seguido para las armaduras bidimensionales.

3.3. *Caso para estudio*: Armadura piramidal

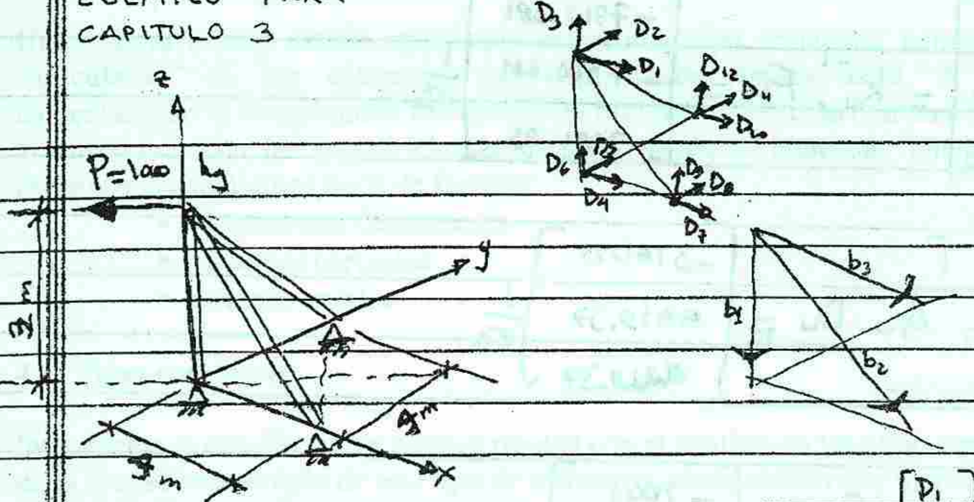
3.3.1. Solución 1: ensamble directo de matrices $K_b = A^T.k.A$

PENDIENTE

3.3.2. Solución 2: ensamble indirecto a través de la matriz A de todas las barras

EJEMPLO PARA
CAPITULO 3

III-5



$$\begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \end{array} \begin{array}{c} \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{A_u} \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{A_R} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc|cccccc} 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.8 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & -0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & -0.6 \end{array}\right] \end{array} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ \vdots \\ D_{11} \\ D_{12} \end{bmatrix}$$

	Δx	Δy	Δz	$\frac{\Delta x}{L}$	$\frac{\Delta y}{L}$	$\frac{\Delta z}{L}$
b_1	0	0	-3	0	0	-1
b_2	4	0	-3	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$
b_3	0	4	-3	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -0.8 & 0 & 0.6 \\ 0 & -0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} \qquad [k_b] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{5} \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

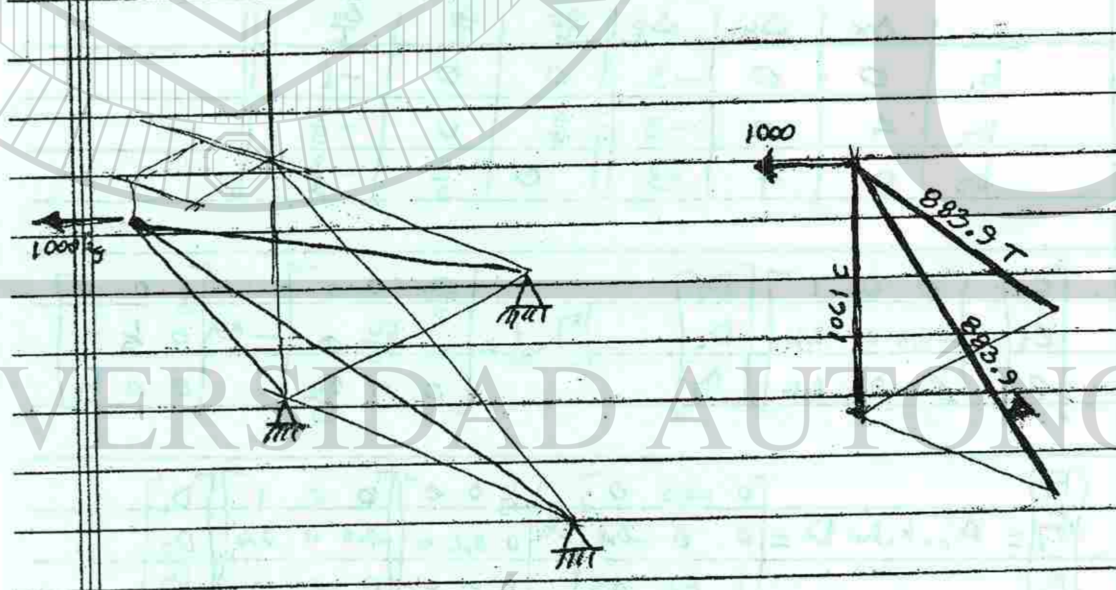
$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = A_u^T . k . A_u D = \begin{bmatrix} 0 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & -0.8 \\ 1 & 0.6 & 0.6 \end{bmatrix} EA \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -0.8 & 0 & 0.6 \\ 0 & -0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.128 & 0 & -0.096 \\ 0 & 0.128 & -0.096 \\ -0.096 & -0.096 & 0.477 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} EA \Rightarrow \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -707.1 \\ -707.1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = K_u^{-1} \cdot F_u = \begin{bmatrix} -7910.681 \\ -7910.681 \\ -3181.95 \end{bmatrix} \frac{1}{EA}$$

$$e = A_u \cdot D_u = \begin{bmatrix} -3181.95 \\ 4419.37 \\ 4419.37 \end{bmatrix} \frac{1}{EA}$$

$$p = k \cdot e = \begin{bmatrix} -1061 \\ 883.9 \\ 883.9 \end{bmatrix}$$



"DEFORMADA" FUERZAS EN LAS BARRAS

ESTRUCTURAS TIPO MARCO RÍGIDO EN EL ESPACIO BIDIMENSIONAL

Hasta ahora hemos estado analizando estructuras tipo armadura, compuestas por barras "articuladas" en sus extremos, que solo tienen rigidez axial. A partir de ahora aumentaremos la complejidad del análisis al estudiar estructuras compuestas por barras que, al interactuar con las barras adyacentes a las cuales se conectan, pueden resistir en sus extremos los siguientes tipos de fuerzas:

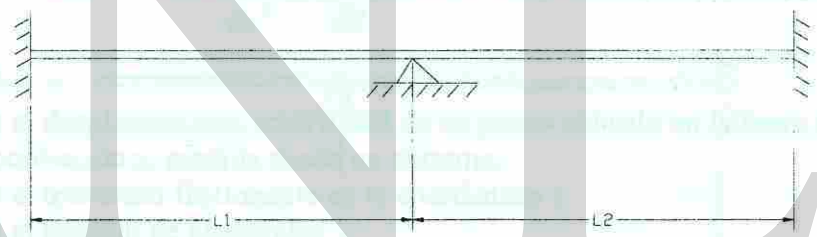
- Momentos flexionantes
- Fuerzas cortantes
- Cargas axiales

4.1. Vigas continuas

Iniciaremos el estudio de los marcos rígidos con el análisis de las vigas continuas, por ser estas el caso más simple de este tipo de estructura, continuando con marcos ortogonales y terminando con el caso menos simple de los marcos no ortogonales.

4.1.1. *Caso para estudio*: viga continua de dos claros

Aplicaremos el método general para el caso mostrado en la figura siguiente:



Para realizar el análisis estructural, extenderemos las ideas utilizadas en el análisis de armaduras.

4.1.1.1. Relaciones constitutivas.

En el caso de las armaduras podíamos determinar de manera muy simple y directa la relación entre la elongación axial y la fuerza axial asociada. Esta relación es

$$p = k \cdot e$$

Donde:

k es la rigidez axial representada por un escalar (un número real)

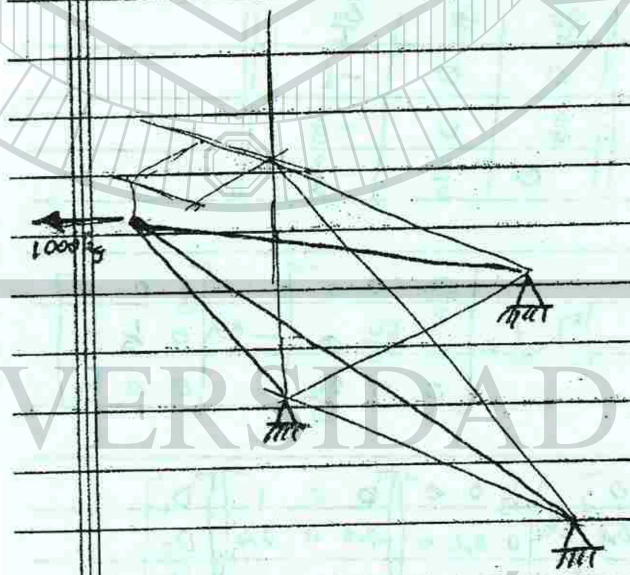
$$k = \frac{A \cdot E}{L}$$

Para las barras articuladas analizadas en el espacio bidimensional solo influía en su estado interno de deformaciones y esfuerzos, la componente axial del vector de desplazamiento generalizado. Ahora, debido a la existencia de rigidez a flexión y cortante, influirán los

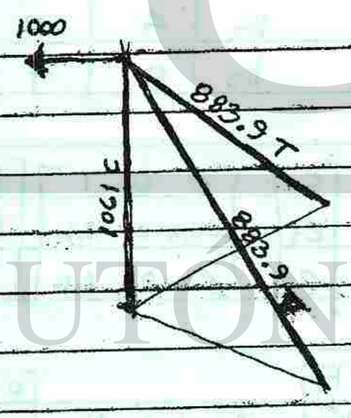
$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = K_u^{-1} \cdot F_u = \begin{bmatrix} -7910.681 \\ -7910.681 \\ -3181.95 \end{bmatrix} \frac{1}{EA}$$

$$e = A_u \cdot D_u = \begin{bmatrix} -3181.95 \\ 4419.37 \\ 4419.37 \end{bmatrix} \frac{1}{EA}$$

$$p = k \cdot e = \begin{bmatrix} -1061 \\ 883.9 \\ 883.9 \end{bmatrix}$$



"DEFORMADA"



FUERZAS EN LAS BARRAS

ESTRUCTURAS TIPO MARCO RÍGIDO EN EL ESPACIO BIDIMENSIONAL

Hasta ahora hemos estado analizando estructuras tipo armadura, compuestas por barras "articuladas" en sus extremos, que solo tienen rigidez axial. A partir de ahora aumentaremos la complejidad del análisis al estudiar estructuras compuestas por barras que, al interactuar con las barras adyacentes a las cuales se conectan, pueden resistir en sus extremos los siguientes tipos de fuerzas:

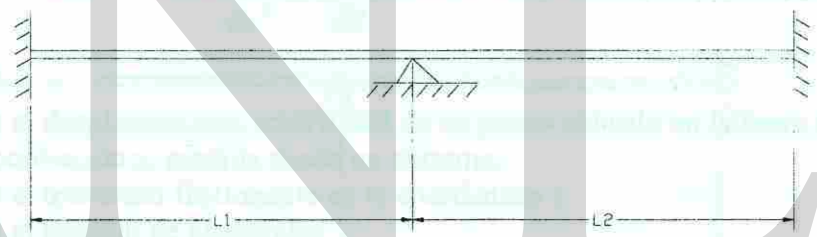
- Momentos flexionantes
- Fuerzas cortantes
- Cargas axiales

4.1. Vigas continuas

Iniciaremos el estudio de los marcos rígidos con el análisis de las vigas continuas, por ser estas el caso más simple de este tipo de estructura, continuando con marcos ortogonales y terminando con el caso menos simple de los marcos no ortogonales.

4.1.1. *Caso para estudio*: viga continua de dos claros

Aplicaremos el método general para el caso mostrado en la figura siguiente:



Para realizar el análisis estructural, extenderemos las ideas utilizadas en el análisis de armaduras.

4.1.1.1. Relaciones constitutivas.

En el caso de las armaduras podíamos determinar de manera muy simple y directa la relación entre la elongación axial y la fuerza axial asociada. Esta relación es

$$p = k \cdot e$$

Donde:
k es la rigidez axial representada por un escalar (un número real)

$$k = \frac{A \cdot E}{L}$$

Para las barras articuladas analizadas en el espacio bidimensional solo influía en su estado interno de deformaciones y esfuerzos, la componente axial del vector de desplazamiento generalizado. Ahora, debido a la existencia de rigidez a flexión y cortante, influirán los

ESTRUCTURAS TIPO MARCO RÍGIDO EN EL ESPACIO BIDIMENSIONAL

Hasta ahora hemos estado analizando estructuras tipo armadura, compuestas por barras "articuladas" en sus extremos, que solo tienen rigidez axial. A partir de ahora aumentaremos la complejidad del análisis al estudiar estructuras compuestas por barras que, al interactuar con las barras adyacentes a las cuales se conectan, pueden resistir en sus extremos los siguientes tipos de fuerzas:

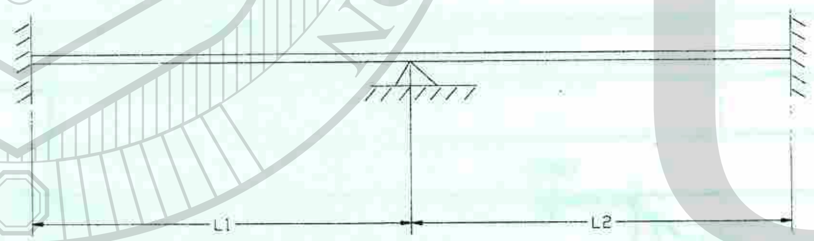
- Momentos flexionantes
- Fuerzas cortantes
- Cargas axiales

4.1. Vigas continuas

Iniciaremos el estudio de los marcos rígidos con el análisis de las vigas continuas, por ser estas el caso más simple de este tipo de estructura, continuando con marcos ortogonales y terminando con el caso menos simple de los marcos no ortogonales.

4.1.1. *Caso para estudio*: viga continua de dos claros

Aplicaremos el método general para el caso mostrado en la figura siguiente:



Para realizar el análisis estructural, extenderemos las ideas utilizadas en el análisis de armaduras.

4.1.1.1. Relaciones constitutivas.

En el caso de las armaduras podíamos determinar de manera muy simple y directa la relación entre la elongación axial y la fuerza axial asociada. Esta relación es

$$p = k \cdot e$$

Donde:
k es la rigidez axial representada por un escalar (un número real)

$$k = \frac{A \cdot E}{L}$$

Para las barras articuladas analizadas en el espacio bidimensional solo influía en su estado interno de deformaciones y esfuerzos, la componente axial del vector de desplazamiento generalizado. Ahora, debido a la existencia de rigidez a flexión y cortante, influirán los

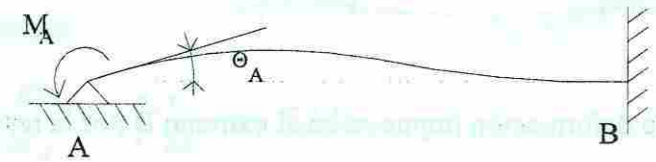
1) efecto del vector de giro Θ^*_A .

De acuerdo a lo expresado anteriormente, se supondrá que:

$$dx^*_A = dy^*_A = dx^*_B = dy^*_B = \Theta^*_B = 0.0$$

Podemos interpretar esta condición como el caso de una barra empotrada en el extremo B y articulada en el extremo A.

Asociaremos al giro en A con la acción del momento M^*_A, gráficamente:



De la teoría de la resistencia de materiales, sabemos que la ecuación diferencial que nos permite obtener la curva elástica, de manera simplificada, es:

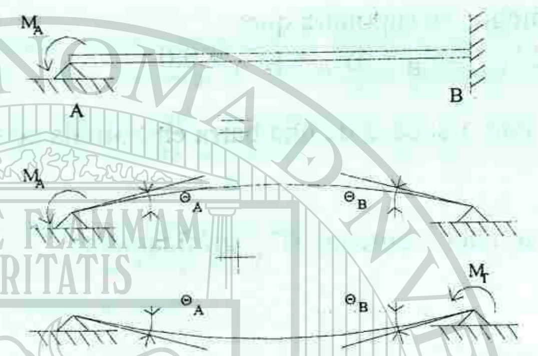
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

Donde:

y	es el desplazamiento transversal de un punto ubicado en la barra en la coordenada x, medida desde un extremo.
M(x)	es el momento flexionante en la coordenada x
E	es el módulo de elasticidad
I	es el momento de inercia de la sección transversal en la coordenada x

NOTA IMPORTANTE: En nuestro análisis habremos de suponer que EI se mantiene constante en toda la longitud de la barra, es decir, analizaremos el caso de *barras prismáticas.*

La barra que se analizará es un sistema estructural hiperestático. Para encontrar la curva elástica y las reacciones, descompondremos al sistema original en dos barras isostáticas en las que el momento M_T es el momento necesario en el extremo B para evitar que este gire (B está empotrado), gráficamente:



Así, una condición de deformación impuesta en el extremo B por la restricción del apoyo es:

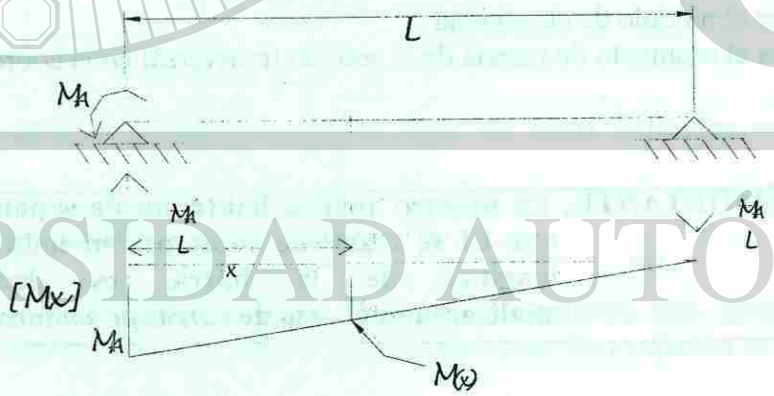
$$\Theta_{B_{MA}} + \Theta_{B_{MT}} = 0$$

Donde:

$\Theta_{B\,MA}$ -> es el giro en B producido por M_A

$\Theta_{B\,MT}$ -> es el giro en B producido por M_T

Solución del sistema 1:



Donde

$$M(x) = -M_A + \frac{M_A}{L}x = M_A(\frac{x}{L} - 1)$$

Ecuación diferencial a resolver

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

Integrando una vez:

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = \int M_A(\frac{x}{L} - 1)dx$$

$$\frac{EI}{M_A} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2L} - x + C_1 \qquad \text{(ecuación 1)}$$

Integrando nuevamente:

$$\frac{EI}{M_A} \cdot y = \int (\frac{x^2}{2L} - x + C_1)dx$$

$$\frac{EI}{M_A} \cdot y = \frac{x^3}{6L} - \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2 \qquad \text{(ecuación 2)}$$

Condiciones de borde:

para $x = 0 \rightarrow y = 0;$ para $x = L \rightarrow y = 0$

sustituyendo en la ecuación 2 las dos condiciones de borde :

$$0 = C_2 \qquad \text{condición 1}$$

$$0 = \frac{L^3}{6L} - \frac{L^2}{2} + C_1L \rightarrow C_1 = \frac{L}{3} \qquad \text{condición 2}$$

$$\frac{EI}{M_A} \cdot y = \frac{x^3}{6L} - \frac{x^2}{2} + \frac{L}{3}x \qquad \text{(ecuación 3)}$$

y $$\frac{EI}{M_A} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2L} - x + \frac{L}{3} \qquad \text{(ecuación 4)}$$

Donde la ecuación 4 nos define la pendiente de la curva elástica en el punto de coordenada x para $0 < x < L$.

Debido a la hipótesis de los desplazamientos pequeños

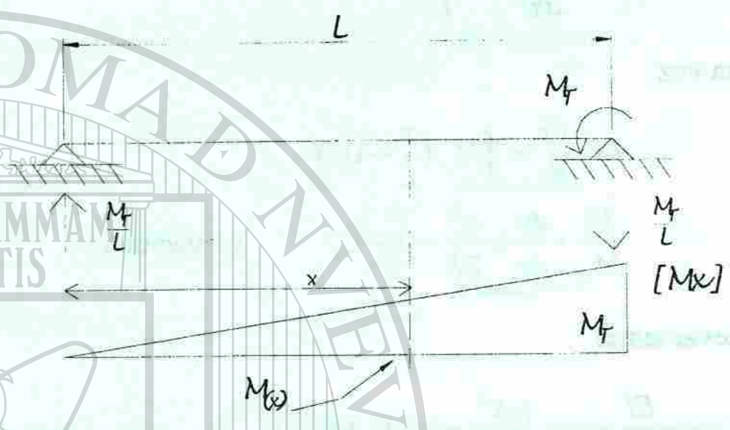
$$\Theta \approx \frac{dy}{dx}$$

$\therefore$ $\Theta^*_{B\,MA}$ se puede calcular como

$$\frac{EI}{M_A} \cdot \Theta^*_{B_{MA}} = -\frac{L}{6} \qquad \text{(ecuación 5)}$$

ecuación 4 cuando $x = L$

Solución del sistema 2:



Donde

$$M(x) = \frac{M_T}{L} \cdot x$$

Ecuación diferencial a resolver

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{Mx}{EI}$$

Integrando una vez:

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = \int M_T \cdot \frac{x}{L} \cdot dx$$

$$\frac{EI}{M_T} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2L} + C_1 \qquad \text{(ecuación 6)}$$

Integrando nuevamente:

$$\frac{EI}{M_T} \cdot y = \int (\frac{x^2}{2L} + C_1) dx$$

$$\frac{EI}{M_T} \cdot y = \frac{x^3}{6L} + C_1 x + C_2 \qquad \text{(ecuación 7)}$$

Condiciones de borde:

para $x = 0 \rightarrow y = 0$; para $x = L \rightarrow y = 0$

sustituyendo en la ecuación 2 las dos condiciones de borde :

$$0 = C_2 \qquad \text{condición 1}$$

$$0 = \frac{L^3}{6L} + C_1 L \quad \rightarrow \quad C_1 = -\frac{L}{6} \qquad \text{condición 2}$$

$$\frac{EI}{M_T} \cdot y = \frac{x^3}{6L} - \frac{L}{6} x \qquad \text{(ecuación 8)}$$

$$\text{y} \quad \frac{EI}{M_T} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2L} - \frac{L}{6} \qquad \text{(ecuación 9)}$$

$\therefore$ $\Theta^*_{B\,MT}$ se puede calcular como

$$\frac{EI}{M_T} \cdot \Theta^*_{B\;MT} = \frac{L}{3} \qquad \text{(ecuación 10)}$$

cuando $x = L$

Superposición de las dos soluciones.

recordando que se debe cumplir la condición geométrica:

$$\Theta^*_{B_{MA}} + \Theta^*_{B_{MT}} = 0$$

entonces, de ecuaciones 5 y 10:

$$-\frac{M_A L}{6EI} = -\frac{M_T L}{3EI}$$

$$\Rightarrow \quad M_T = \frac{M_A}{2}$$

y el resto de las reacciones se pueden calcular de manera inmediata ya que el sistema se ha vuelto isostático:

Además, podemos calcular la forma y pendiente de la curva elástica correspondiente.

Para la curva elástica, sumamos las ecuaciones 3 y 8:

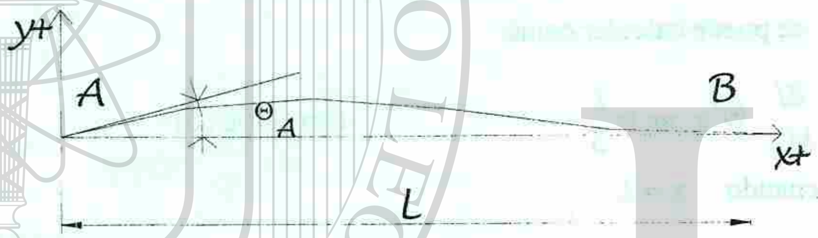
$$\frac{EI}{M_A} y_I = \frac{x^3}{6L} - \frac{x^2}{2} + \frac{L}{3}x$$

$$\frac{EI}{M_A} y_{II} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^3}{6L} - \frac{L}{6}x\right) \qquad \text{ecuación 8 con } M_T = \frac{M_A}{2}$$

sumando las dos ecuaciones y agrupando términos :

$$\frac{EI}{M_A} y = \frac{3}{12} \cdot \frac{x^3}{L} - \frac{x^2}{2} + \frac{3L}{12}x \qquad \text{(ecuación 11)}$$

Graficando esta ecuación:



Y para la función tangente a la curva elástica, sumamos las ecuaciones 4 y 9:

$$\left(\frac{EI}{M_A} \cdot \frac{dy}{dx}\right)_I = \left(\frac{x^2}{2L} - x + \frac{L}{3}\right)$$

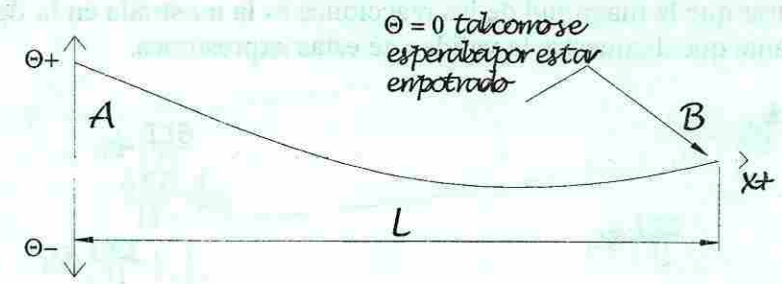
$$\left(\frac{EI}{M_A} \cdot \frac{dy}{dx}\right)_{II} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{2L} - \frac{L}{6}\right) \qquad \text{ecuación 9 con } M_T = \frac{M_A}{2}$$

por la hipótesis de los desplazamientos pequeños $\Theta_x \approx \frac{dy}{dx}$

sumando y agrupando términos :

$$\frac{EI}{M_A} \Theta_x = \frac{3}{4} \cdot \frac{x^2}{L} - x + \frac{3}{12}L \qquad \text{(ecuación 12)}$$

Graficando esta ecuación:



Ahora, utilizando el resultado expresado en la ecuación 12 obtendremos una ecuación que nos relaciona a M_A con el giro en A:

para $x = 0$

$$\frac{EI}{M_A} \Theta_A = \frac{3}{4} \frac{x^2}{L} - x + \frac{3L}{12}$$

$$\Rightarrow \qquad M_A = \left(\frac{4EI}{L}\right) \cdot \Theta_A$$

Sustituyendo este valor de M_A en el diagrama de reacciones obtenido anteriormente:

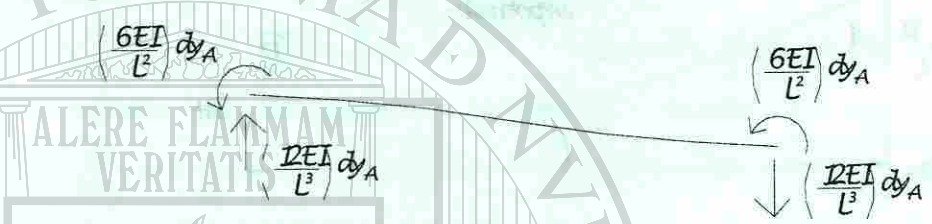
Así, podemos calcular la magnitud de las reacciones que ocurren al girar el extremo A en la cantidad Θ_A.

2) efecto del vector de desplazamiento transversal dy^*_A en el extremo A.

En este caso $dy^*_A \neq 0$ y el resto es: $dy^*_A = \Theta^*_A = dx^*_B = dy^*_B = \Theta^*_B = 0.0$, que se puede modelar como una viga empotrada en ambos extremos en que ocurre un corrimiento vertical del extremo A y asociado a este, una fuerza cortante V^*_A. Gráficamente:

Enseguida, podemos calcular analíticamente la magnitud de las reacciones que ocurren al desplazarse transversalmente el extremo A como se indica en la figura anterior.

Se puede demostrar que la magnitud de las reacciones es la mostrada en la figura siguiente, se pide al estudiante que demuestre la validez de estas expresiones.



3) efecto del vector de desplazamiento axial dx^*_A en el extremo A.

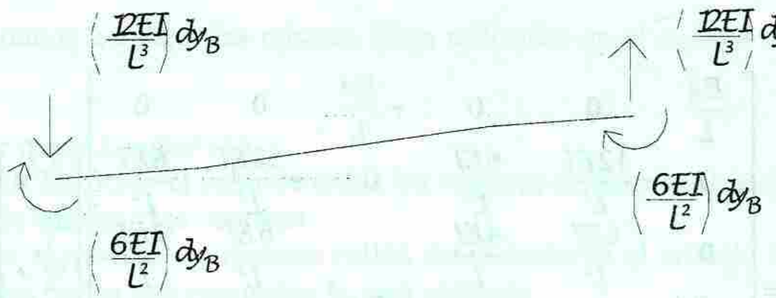
Como ya se sabe del análisis de armaduras, este vector de desplazamiento solo provoca las cargas axiales indicadas en la figura siguiente:

4) efecto del vector de giro Θ^*_B en el extremo B.

Las reacciones se pueden obtener por analogía con los resultados obtenidos cuando ocurre el giro en el extremo A, las reacciones son:

5) efecto del vector de desplazamiento transversal dy^*_B en el extremo B.

Las reacciones generadas por el desplazamiento transversal del extremo B son:



6) efecto del vector de desplazamiento axial dx^*_B en el extremo B.

Las reacciones generadas al ocurrir el desplazamiento axial del extremo B son:

b) Superposición de los efectos de los 6 vectores de desplazamiento.

Conocido el efecto de cada vector de desplazamiento actuando independientemente, realizamos la superposición de sus efectos para obtener la magnitud de los vectores de fuerzas generalizadas asociadas a la existencia simultánea de los 6 vectores. De esta suma de efectos resultan las ecuaciones algebraicas siguientes:

Fuerzas axiales

$$F_A = \frac{EA}{L} \cdot dx_A - \frac{EA}{L} \cdot dx_B$$

$$F_B = -\frac{EA}{L} \cdot dx_A + \frac{EA}{L} \cdot dx_B$$

Fuerzas cortantes

$$V_A = \frac{12EI}{L^3} \cdot dy_A + \frac{6EI}{L^2} \cdot \Theta_A - \frac{12EI}{L^3} \cdot dy_B + \frac{6EI}{L^2} \cdot \Theta_B$$

$$V_B = -\frac{12EI}{L^3} \cdot dy_A - \frac{6EI}{L^2} \cdot \Theta_A + \frac{12EI}{L^3} \cdot dy_B - \frac{6EI}{L^2} \cdot \Theta_B$$

Momentos flexionant es

$$M_A = \frac{6EI}{L^2} \cdot dy_A + \frac{4EI}{L} \cdot \Theta_A - \frac{6EI}{L^2} \cdot dy_B + \frac{2EI}{L} \cdot \Theta_B$$

$$M_B = \frac{6EI}{L^2} \cdot dy_A + \frac{2EI}{L} \cdot \Theta_A - \frac{6EI}{L^2} \cdot dy_B + \frac{4EI}{L} \cdot \Theta_B$$

Expresadas estas ecuaciones algebraicas en notación matricial extendida:

$$\begin{Bmatrix} F^*_A \\ V^*_A \\ M^*_A \\ F^*_B \\ V^*_B \\ M^*_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx^*_A \\ dy^*_A \\ \Theta^*_A \\ dx^*_B \\ dy^*_B \\ \Theta^*_B \end{Bmatrix}$$

Y en notación matricial compacta:

$$\{F^*\} = [k] \cdot \{D^*\}$$

Esta última expresión es análoga a la utilizada en el caso de las barras con rigidez axial únicamente:

$$p = k.e$$

Para las barras de armaduras, $\mathbf{k}$ es un escalar, para las barras de marcos en el espacio bidimensional $[\mathbf{k}]$ es una matriz de 6 renglones y 6 columnas.

4.1.1.2. Aplicación del método general de análisis

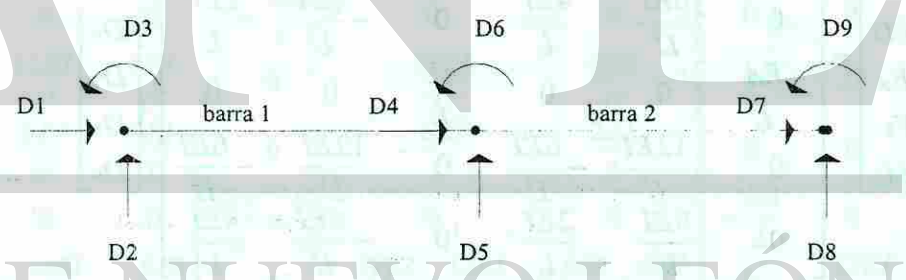
Ahora procederemos a aplicar las mismas ideas utilizadas en el análisis de las estructuras tipo armadura.

La secuencia de pasos a seguir son:

a) Supondremos conocido el valor de todos los vectores de desplazamiento posibles en los tres nudos de nuestra viga continua
b) Aplicaremos el modelo matemático recién demostrado en el artículo 4.1.1.1 para cada una de las dos barras que componen la viga continua.
c) "Ensamblaremos" (sumaremos) las "resistencias" (rigideces) que oponen las dos barras a ser deformadas, para así obtener la rigidez de "toda" la estructura.
d) A partir de este último modelo matemático, podremos calcular los desplazamientos en los grados de libertad.
e) Identificamos los desplazamientos de cada una de las barras en sus extremos A y B
f) Calculamos las fuerzas asociadas a cada grado de libertad.

4.1.1.2.1. Identificar los vectores de desplazamiento en los puntos de control.

Cuando analizamos armaduras, aprendimos que numerando primero los grados de libertad y posteriormente los vectores desplazamiento restringidos, logramos evitar la operación de reacomodo de renglones y columnas. Sin embargo, en este primer caso de estudio de marcos rígidos, etiquetaremos vectores desplazamiento sin tomar en cuenta esta simplificación, tal como se indica en la figura siguiente:



4.1.1.2.2. Ensamblar matriz de rigidez global de la estructura

Primero deberemos obtener las rigideces de cada una de las dos barras. Calculamos estas rigideces a través del uso del modelo matemático recién demostrado:

Así, para la barra 1 se puede obtener la siguiente ecuación matricial que nos relaciona a los desplazamientos en coordenadas locales con las fuerzas en los extremos en coordenadas locales, las cuales necesariamente deben aparecer para que la barra pueda mantener la configuración deformada propuesta.

Barra 1

$$\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\F_3\\F_4\\F_5\\F_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_A\\V_A\\M_A\\F_B\\V_B\\M_B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0\\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2}\\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L}\\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2}\\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}D_1\\D_2\\D_3\\D_4\\D_5\\D_6\end{bmatrix}$$

vector de fuerzas generalizadas

Barra 2

$$\begin{bmatrix}F_4\\F_5\\F_6\\F_7\\F_8\\F_9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_A\\V_A\\M_A\\F_B\\V_B\\M_B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0\\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2}\\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L}\\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2}\\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}D_4\\D_5\\D_6\\D_7\\D_8\\D_9\end{bmatrix}$$

Las fuerzas externas que actúan sobre la estructura son resistidas por el conjunto de barras, por esta razón, debemos sumar la aportación de cada barra a la resistencia total que opone toda la estructura a la acción de las fuerzas externas.

Así, al actuar una fuerza axial en el extremo A de la barra 1, podrán existir los vectores D_1,D_4 y D_7 compatibles con esta fuerza y podremos obtener la resistencia total a esta fuerza con las expresiones:

$$F_1=\frac{EA}{L}\cdot D_1-\frac{EA}{L}\cdot D_4$$

De manera análoga:

$$F_2=V_2{}^*=\frac{12EI}{L^3}\cdot D_2+\frac{6EI}{L^2}\cdot D_3-\frac{12EI}{L^3}\cdot D_5+\frac{6EI}{L^2}\cdot D_6$$

$$F_3=M_3{}^*=\frac{6EI}{L^2}\cdot D_2+\frac{4EI}{L}\cdot D_3-\frac{6EI}{L^2}\cdot D_5+\frac{2EI}{L}\cdot D_6$$

$$F_4=F_4{}^*=(-\frac{EA}{L}\cdot D_1+\frac{EA}{L}\cdot D_4)+(\frac{EA}{L}\cdot D_4-\frac{EA}{L}\cdot D_7)$$

De donde -> $F_4=-\frac{EA}{L}\cdot D_1+(\frac{EA}{L}+\frac{EA}{L})D_4-\frac{EA}{L}\cdot D_7)$

$$F_5=V_5=(-\frac{12EI}{L^3}\cdot D_2-\frac{6EI}{L^2}\cdot D_3+\frac{12EI}{L^3}\cdot D_5-\frac{6EI}{L^2}\cdot D_6)+(\frac{12EI}{L^3}\cdot D_9+\frac{6EI}{L^2}\cdot D_6-\frac{12EI}{L^3}\cdot D_8+\frac{6EI}{L^2}\cdot D_9)$$

$$V_5=-\frac{12EI}{L^3}\cdot D_2-\frac{6EI}{L^2}+\left(\frac{12EI}{L^3}+\frac{12EI}{L^3}\right)\cdot D_5+\left(-\frac{6EI}{L^2}+\frac{6EI}{L^2}\right)\cdot D_6-\frac{12EI}{L^3}\cdot D_8+\frac{6EI}{L^2}\cdot D_9$$

El estudiante deberá obtener las expresiones "ensambladas" para : M_6,F_7,F_8 Y F_9.

Este conjunto resultante de 9 ecuaciones algebraicas pueden reescribirse en notación matricial de la siguiente forma:

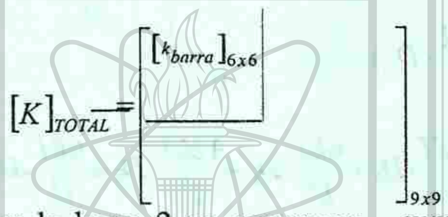
$$\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\F_3\\F_4\\F_5\\F_6\\F_7\\F_8\\F_9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L}+\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3}+\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2}+\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2}\\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2}+\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L}+\frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L}\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D_1\\D_2\\D_3\\D_4\\D_5\\D_6\\D_7\\D_8\\D_9\end{bmatrix}$$

$[K]_{TOTAL}$

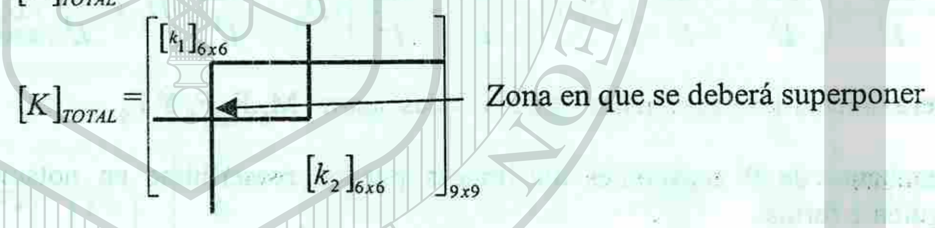
Observaciones acerca del proceso de ensamble de la matriz de rigidez total, $[K]_{TOTAL}$

1.- Si las barras se definen con su "extremo A" en el lado izquierdo y son colineales y los grados de libertad se enumeran para cada barra en el orden: $d_{xA}, d_{yA}, \theta_A, d_{xB}, d_{yB}$ y θ_B .... entonces la matriz $[K]_{TOTAL}$ se puede calcular superponiendo cada una de las matrices $[K]_{barra}$ sobre la matriz $[K]_{TOTAL}$ de acuerdo a la numeración de los grados de libertad y las fuerzas externas asociadas.

Así, para la barra 1



y la barra 2 se superpone , sumando elemento por elemento al contenido actual de $[K]_{TOTAL}$

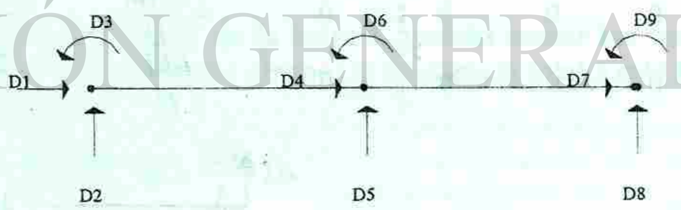


2.- La matriz $[K]_{TOTAL}$ obtenida, no tiene incluidas las restricciones de los apoyos y por lo tanto es un sistema inestable sin solución única (matriz singular).

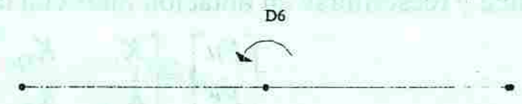
4.1.1.2.3. Inclusión de las restricciones impuestas por los apoyos sobre la estructura

Condiciones de apoyo en la viga analizada

vectores desplazamiento posibles en "puntos de control"



grados de libertad (vectores desplazamiento posibles no nulos)



Así , reordenaremos el sistema de ecuaciones lineales simultáneas

$$\{F\} = [K]_{TOTAL}\{D\}$$

de manera de obtener:

$$\{F\} = \begin{bmatrix} F_6 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \end{bmatrix} \qquad \{D\} = \begin{bmatrix} D_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \end{bmatrix}$$

El sistema original deberá reacomodarse intercambiando renglones y columnas para quedar así:

$$\begin{bmatrix} F_6 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:cccccccc} \frac{4EI}{L}+\frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2}+\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \hdashline 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L}+\frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2}+\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3}+\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} D_6 \\ \hdashline D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \end{bmatrix}$$

De manera análoga al caso de las armaduras, el sistema matricial se puede "particionar" como se indica y reescribirse en notación matricial compacta de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} Fu \\ Fr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11u} & K_{12r} \\ K_{21u} & K_{22r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Du \\ Dr \end{bmatrix}$$

donde:

$$[Fu] = [F_6]$$
$$[Du] = [D_6]$$

y $[K_{11u}] = \left[\frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L}\right]$

el resto de las submatrices se pueden deducir de manera inmediata por inspección.

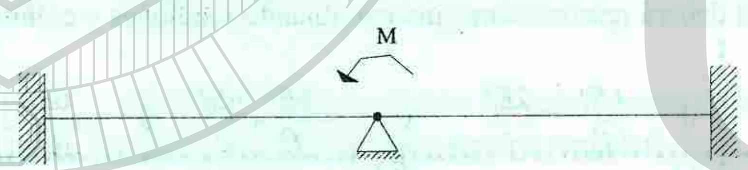
El sistema matricial podemos reescribirlo así:

$$[Fu - K_{12r} Dr] = K_{11u} \cdot Du \text{.........................(1)}$$
$$Fr = K_{21u} \cdot Du + K_{22r} \cdot Dr \text{.........................(2)}$$

de la ecuación 1 podemos calcular Du y de la ecuación 2 calculamos Fr que son las reacciones en los apoyos.

Formación del vector de fuerzas actuantes.

Para ejemplificar, supondremos que actúa un momento como el indicado:



el vector de fuerzas $\{Fu\}$ será $\{Fu\} = \{M\}$

Cálculo del vector de desplazamientos solución, Du:

$$\{Du\} = [K_{11u}]^{-1} \cdot [Fu - K_{12r} \cdot Dr]$$

sustituyendo lo conocido

$$\{D_6\} = \left[\frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L}\right]^{-1} \cdot [M - K_{12r} \cdot Dr]$$

$$\{D_6\} = M \frac{L}{8EI}$$

4.1.1.2.4. Cálculo de fuerzas en cada barra

Para esto podemos utilizar la expresión

$$\{F^*\} = [k^*]_{6x6} \{D^*\}_{6x1}$$

que nos dará de manera directa las fuerzas compatibles con el vector de desplazamientos solución.

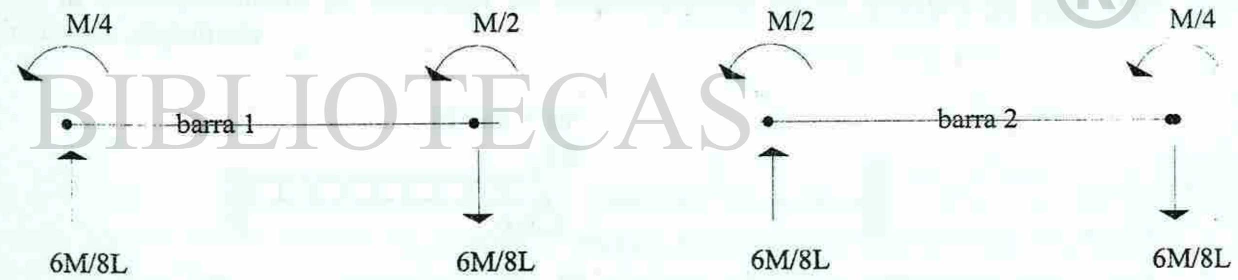
para la barra 1:

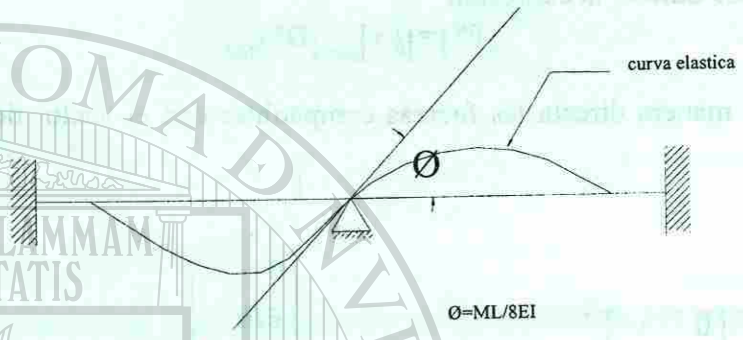
$$\{D^*\}_{6x1} = \begin{bmatrix} d_{xA} \\ d_{yB} \\ \theta_A \\ d_{xB} \\ d_{yB} \\ \theta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ M\frac{L}{8EI} \end{bmatrix} \Rightarrow \{F^*\}_{6x1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{2EI}{L} \\ 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \cdot M\frac{L}{8EI}$$

para la barra 2:

$$\{D^*\}_{6x1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M\frac{L}{8EI} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \{F^*\}_{6x1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{4EI}{L} \\ 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \cdot M\frac{L}{8EI}$$

gráficamente:



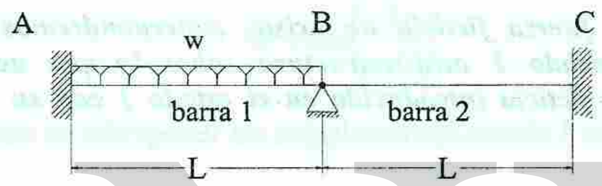


4.1.2. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS CON CARGAS ACTUANDO SOBRE LA LONGITUD DE LAS BARRAS

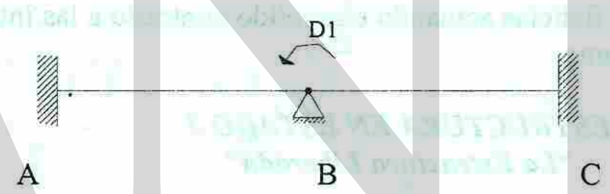
Hasta ahora hemos realizado el análisis de armaduras y vigas continuas en las que las cargas actuantes existen solo en los puntos de control. En el caso general, las cargas actúan en cualquier parte de la estructura y esto incluye la zona entre los puntos de control.

En este artículo introduciremos los conceptos necesarios para poder analizar estructuras con cargas actuando en cualquier parte de la misma.

4.1.2.1. *CASO PARA ESTUDIO*: VIGA CONTINUA DE DOS CLAROS. CARGA EN UN CLARO.



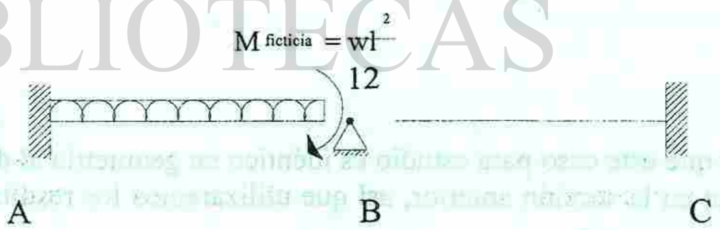
esta estructura tiene 1 grado de libertad:



Para poder aplicar los teoremas demostrados hasta el momento, recurriremos al siguiente truco:

"Aplicaremos" una fuerza ficticia (en realidad no existe) en el grado de libertad, de tal magnitud y sentido que evite la rotación del nudo B.

Esto equivale a suponer que el nudo B está empotrado y, de acuerdo a lo que hemos aprendido en nuestros cursos de mecánica de materiales, podemos calcular esta fuerza como la correspondiente al momento de empotramiento en el extremo de una viga doblemente empotrada:



Denominaremos a la estructura con esta carga ficticia de restricción como:

ESTRUCTURA EN ESTADO 1
"La Estructura Restringida"

Bajo estas condiciones, es relativamente sencillo determinar el estado de esfuerzos y deformaciones de la estructura, ya que solo tendremos que analizar el caso de dos barras empotradas en sus extremos. Para la barra izquierda, ya hemos calculado el momento de empotramiento e igualmente podemos calcular las reacciones. Para la barra derecha, no existen fuerzas actuando sobre la barra, *¡por lo que no existirán esfuerzos ni deformaciones en la misma!*

Para que el truco que estamos empleando no altere la condición de cargas de la estructura original deberemos hacer la siguiente consideración:

> ***Debido a que esta fuerza ficticia no existe, superpondremos a la estructura en su estado 1 otra estructura sobre la que actuará solamente la fuerza ficticia introducida en el estado 1 con su signo cambiado.***

De esta manera, al sumar las dos estructuras, se cancelará la fuerza ficticia del estado 1 con la fuerza ficticia de estado adicional, resultando la estructura con las cargas originales.

A la estructura con las cargas ficticias actuando en sentido contrario a las introducidas en el estado 1 la denominaremos como:

ESTRUCTURA EN ESTADO 2
"La Estructura Liberada"

El estado final de esfuerzos y deformaciones de la estructura se obtiene al superponer:

Esfuerzos y deformaciones en la estructura sometida a las cargas externas reales y las fuerzas ficticias que impiden el desplazamiento de los puntos de control	+	Esfuerzos y deformaciones en la estructura sometida solamente a la acción de las fuerzas ficticias actuando en sentido contrario

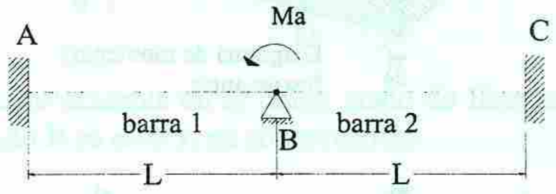
Es decir

FUERZAS Y DEFORMACIONES EN ESTADO 1	+	**FUERZAS Y DEFORMACIONES EN ESTADO 2**

Podemos observar que este caso para estudio es idéntico en geometría al de la viga continua de 2 claros resuelto en la sección anterior, así que utilizaremos los resultados obtenidos en ese caso.

La fuerza ficticia es $M_{ficticia} = Me = -\dfrac{wl^2}{12}$

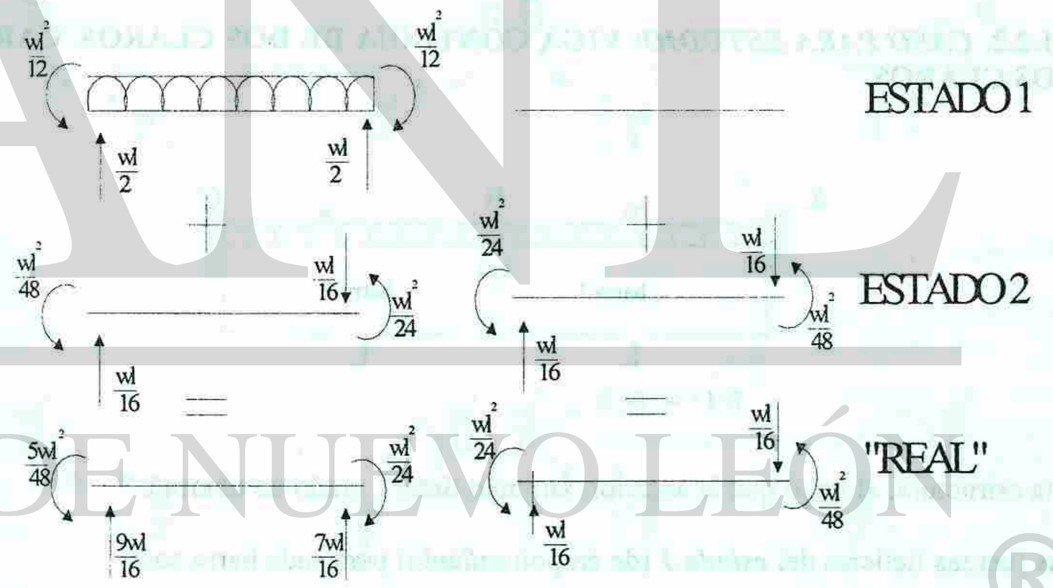
y analizaremos la estructura en el *estado 2* con la fuerza $Ma = -M_{ficticia}$ actuando sobre ella, cuya solución es la que obtuvimos anteriormente en el artículo 4.1.1. Solo tendremos que sustituir a M por Ma.



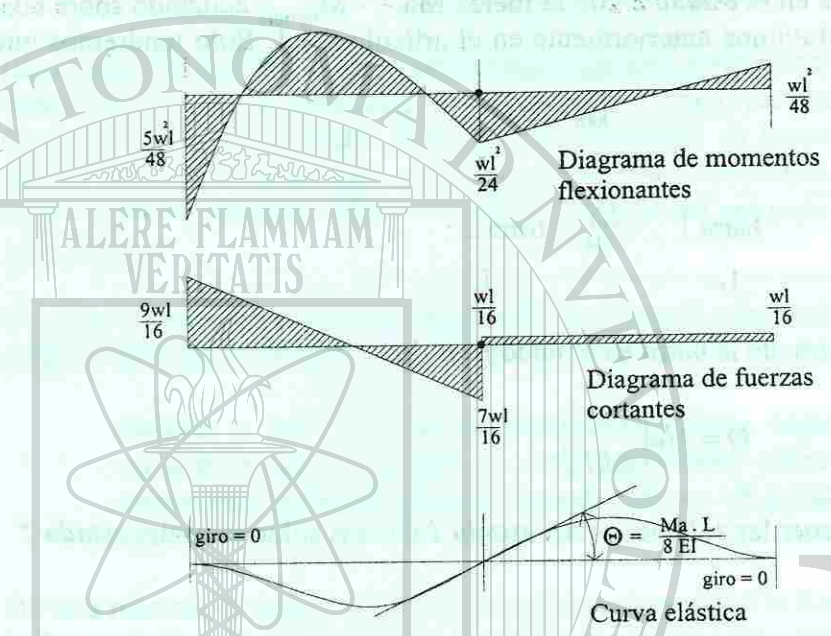
Así, la magnitud de la rotación de la barra en el nudo B es de:

$$\Theta = Ma\left(\frac{L}{8EI}\right)$$

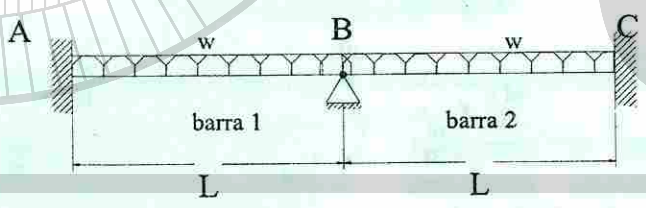
El siguiente paso es sobreponer las soluciones del *estado 1* con las soluciones del *estado 2*



Representación gráfica de los resultados obtenidos es:



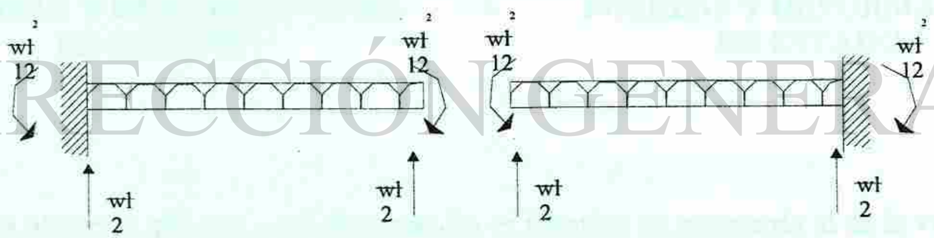
4.1.2.2. ***CASO PARA ESTUDIO*****: VIGA CONTINUA DE DOS CLAROS. CARGA EN DOS CLAROS.**



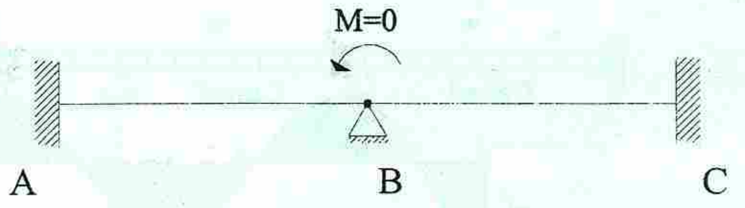
$E^1 I^1 = E^2 I^2$

esta estructura, al igual que la anterior, también tiene 1 grado de libertad.

Las fuerzas ficticias del ***estado 1*** (de empotramiento) para cada barra son:



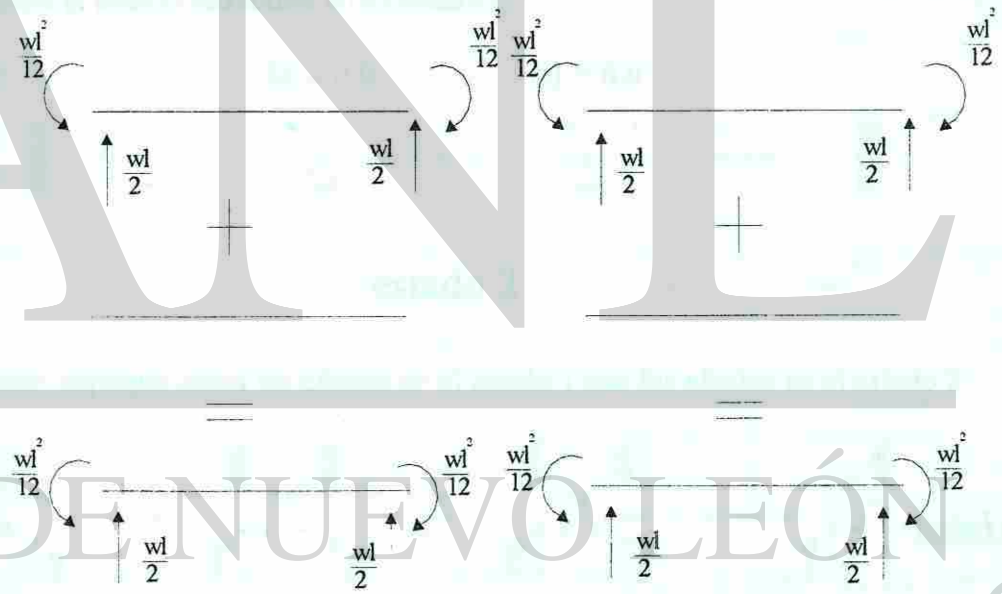
Las fuerzas resultantes actuantes sobre los nudos en el ***estado 2*** son:



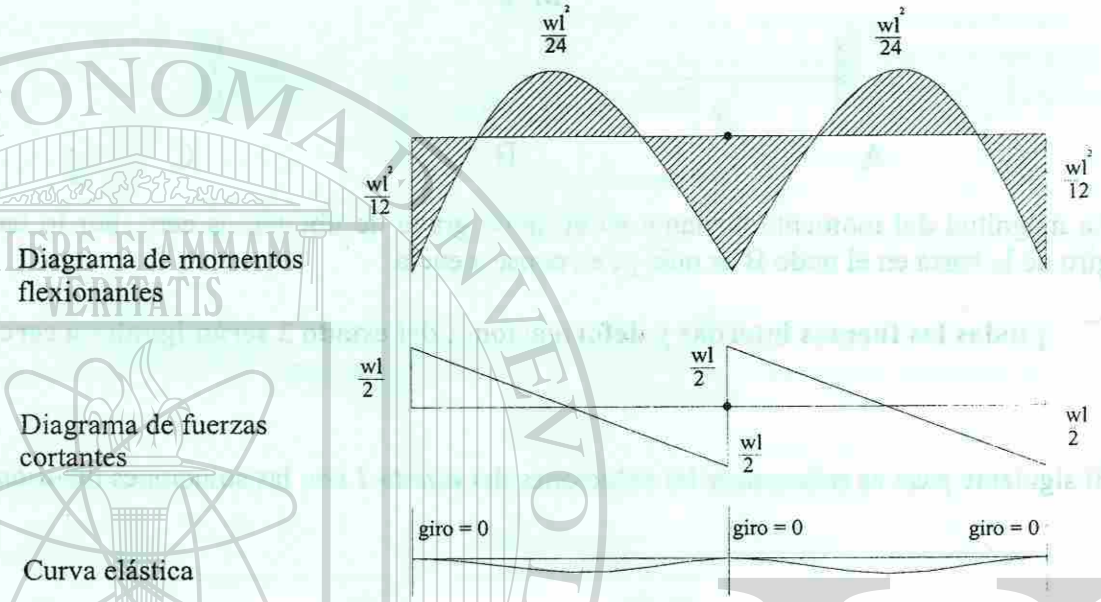
La magnitud del momento actuante en el único grado de libertad es cero, por lo tanto, el giro de la barra en el nudo B es nulo y, en consecuencia:

¡ todas las fuerzas internas y deformaciones del estado 2 serán iguales a cero!

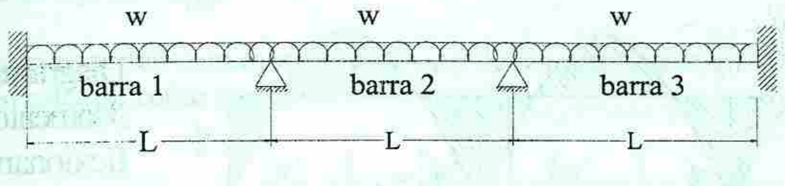
El siguiente paso es sobreponer las soluciones del ***estado 1*** con las soluciones del ***estado 2***



Representación gráfica de los resultados obtenidos:

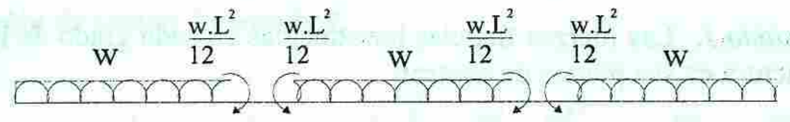


4.1.2.3. *CASO PARA ESTUDIO*: VIGA CONTINUA DE TRES CLAROS.



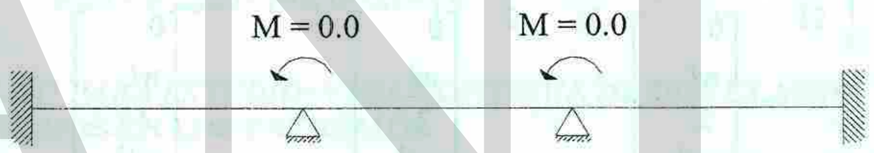
$E_1 I_1 = E_2 I_2 = E_3 I_3$

La estructura en su estado 1, con las fuerzas ficticias de restricción será:



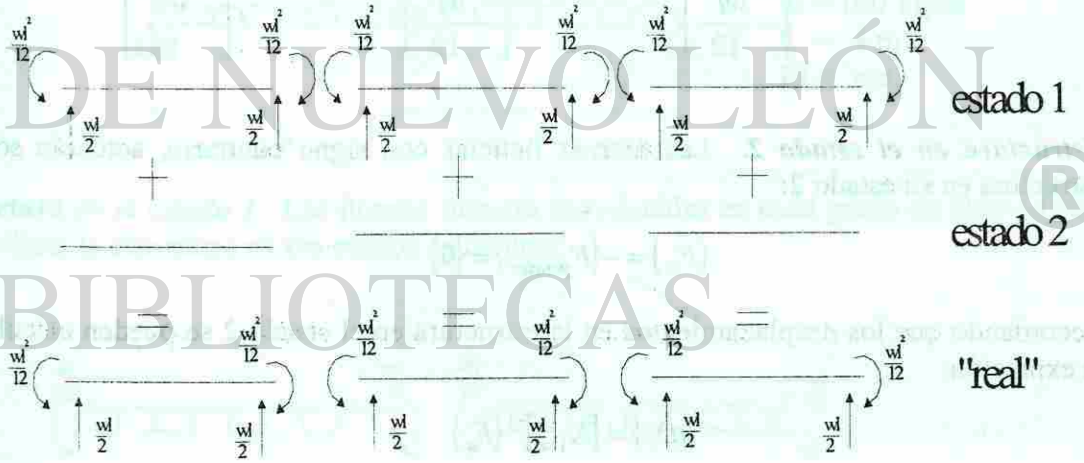
estado 1

Las fuerzas ficticias resultantes en cada grado de libertad, con signo cambiado, se hacen actuar sobre la misma estructura en su estado 2:



estado 2

Finalmente, superponemos los efectos en el estado 1 con los efectos en el estado 2:



Y el diagrama de momentos flexionantes que resulta es:

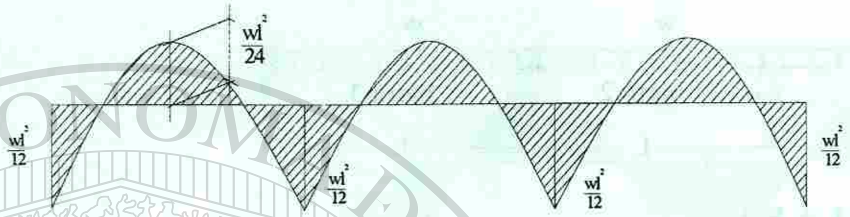


Diagrama de Momentos flexionantes

Ahora, utilizaremos la notación matricial con la que hemos estado trabajando, para representar esta misma cadena de razonamientos expresados gráficamente.

Estructura en el estado 1. Las fuerzas ficticias introducidas en cada grado de libertad para inmovilizar la estructura en sus puntos de control:

$$\{F_{ficticias}\} = \{F_{empotramiento}\} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{wl^2}{12} + \dfrac{wl^2}{12} \\ -\dfrac{wl^2}{12} + \dfrac{wl^2}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Del análisis de la estructura en su estado 1, resultan las siguientes fuerzas en los extremos de cada una de las tres barras:

$$\{F^*_{emp\,b1}\} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{wl}{2} \\ \dfrac{wl^2}{12} \\ 0 \\ \dfrac{wl}{2} \\ -\dfrac{wl^2}{12} \end{bmatrix} \qquad \{F^*_{emp\,b2}\} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{wl}{2} \\ \dfrac{wl^2}{12} \\ 0 \\ \dfrac{wl}{2} \\ -\dfrac{wl^2}{12} \end{bmatrix} \qquad \{F^*_{emp\,b3}\} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{wl}{2} \\ \dfrac{wl^2}{12} \\ 0 \\ \dfrac{wl}{2} \\ -\dfrac{wl^2}{12} \end{bmatrix}$$

Estructura en el estado 2. Las fuerzas ficticias con signo contrario, actuarán sobre la estructura en su estado 2:

$$\{F_U\} = -\{F_{ficticias}\} = \{0\}$$

Recordando que los desplazamientos en la estructura en el estado 2 se pueden calcular con la expresión:

$$\{D_u\} = [K_{11u}]^{-1}\{F_u\}$$

Donde F_u es igual cero entonces ¡Du será igual a cero! Y no será necesario ensamblar la matriz de rigidez K_{11u}.

Las fuerzas en los extremos de cada una de las tres barras que componen la estructura se pueden calcular como sigue:

$$\{F^*_{barra1}\}_{6x1} = [K^*_{barra1}]_{6x6}\{D^*_{barra1}\}_{6x1} = \{0\}_{6x1}$$
$$\{F^*_{barra2}\}_{6x1} = [K^*_{barra2}]_{6x6}\{D^*_{barra2}\}_{6x1} = \{0\}_{6x1}$$
$$\{F^*_{barra3}\}_{6x1} = [K^*_{barra3}]_{6x6}\{D^*_{barra3}\}_{6x1} = \{0\}_{6x1}$$

Superposición de estado 1 y estado 2.

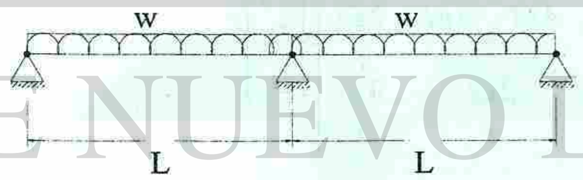
$$\{F^*_{b1}\} = \{F^*_{emp\,b1}\} + [K^*_{b1}]\{D^*_{b1}\} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{wl}{2} & \dfrac{wl^2}{12} & 0 & \dfrac{wl}{2} & -\dfrac{wl^2}{12} \end{bmatrix}^T$$

$$\{F^*_{b2}\} = \{F^*_{emp\,b2}\} + [K^*_{b2}]\{D^*_{b2}\} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{wl}{2} & \dfrac{wl^2}{12} & 0 & \dfrac{wl}{2} & -\dfrac{wl^2}{12} \end{bmatrix}^T$$

$$\{F^*_{b3}\} = \{F^*_{emp\,b3}\} + [K^*_{b3}]\{D^*_{b3}\} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{wl}{2} & \dfrac{wl^2}{12} & 0 & \dfrac{wl}{2} & -\dfrac{wl^2}{12} \end{bmatrix}^T$$

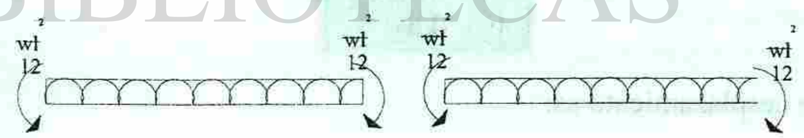
4.1.2.4. *CASO PARA ESTUDIO*: VIGA CONTINUA DE DOS CLAROS ARTICULADOS EN LOS EXTREMOS.

Nuevamente, tenemos el caso de carga uniformemente distribuida sobre toda la longitud de la viga:



Si consideramos:
w = 100 kg/m
L = 4 m
EI = cte.

Estructura en el estado 1. Las fuerzas ficticias introducidas en cada grado de libertad para inmovilizar la estructura en sus puntos de control:



Expresado en notación matricial:

$$\{F_{ficticias}\} = \{F_{empotramiento}\} = \begin{bmatrix} F_3 \\ F_6 \\ F_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\dfrac{wl^2}{12} \\ 0 \\ -\dfrac{wl^2}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +133.3333 \\ 0 \\ -133.3333 \end{bmatrix}$$

Estructura en el estado 2. Las fuerzas ficticias con signo contrario, actuarán sobre la

$$\{F_U\} = -\{F_{ficticias}\} = \begin{Bmatrix} -133.333333 \\ 0 \\ +133.33333 \end{Bmatrix}$$

estructura en su estado 2:

Si revisamos la ecuación matricial completa que ensamblamos en el ejemplo 4.1.1, podemos identificar a los vectores desplazamiento D_3, D_6 y D_9 como los correspondientes a los grados de libertad en esta estructura. Así que tomaremos esa ecuación matricial y la reordenaremos para separar los terminos asociados a los grados de libertad de los demás. Además, si consideramos que los vectores desplazamientos restringidos son todos de magnitud cero, podemos escribir:

$$\begin{Bmatrix} F_3 \\ F_6 \\ F_9 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{4EI}{L} & \dfrac{2EI}{L} & 0 \\ \dfrac{2EI}{L} & \dfrac{4EI}{L} + \dfrac{4EI}{L} & \dfrac{2EI}{L} \\ 0 & \dfrac{2EI}{L} & \dfrac{4EI}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_3 \\ D_6 \\ D_9 \end{Bmatrix}$$

Sustituyendo los valores propuestos en este ejemplo:

$$K_{11u} = EI \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

El vector-solución de desplazamiento es:

$$[D_u] = [K_{11u}]^{-1} \cdot [F_U] = \begin{bmatrix} -133.3 \\ 0 \\ 133.3 \end{bmatrix} \frac{1}{EI}$$

Las fuerzas en los extremos de las barras se pueden calcular con la ecuación matricial deducida en el artículo 4.1.1.1, sin embargo en este ejemplo se propone una forma abreviada de calcular las fuerzas, aplicable al caso en que solo tenemos giros en los extremos de las barras.

$$\begin{Bmatrix} M_{izq} \\ M_{der} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{4EI}{L} & \dfrac{2EI}{L} \\ \dfrac{2EI}{L} & \dfrac{4EI}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Theta_{izq} \\ \Theta_{der} \end{Bmatrix}$$

Estos valores se calculan directamente en la etapa de superposición de efectos.

Superposición de estado 1 y estado 2:

Fuerzas en los extremos de cada una de las barras.

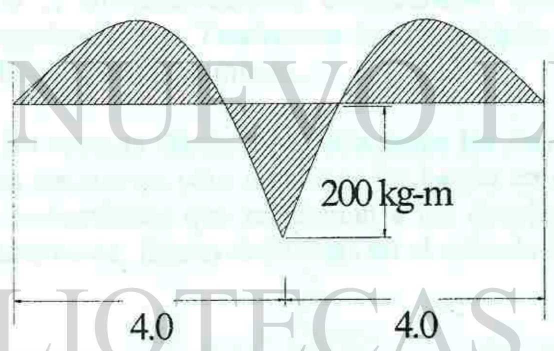
Barra 1.-

$$\begin{bmatrix} M_{izq} \\ M_{der} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +133.3 \\ -133.3 \end{bmatrix} + EI \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -133.3 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{EI} = \begin{bmatrix} 0 \\ -200 \end{bmatrix} \quad kgf.m$$

Barra 2.-

$$\begin{bmatrix} M_{izq} \\ M_{der} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +133.3 \\ -133.3 \end{bmatrix} + EI \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 133.3 \end{bmatrix} \frac{1}{EI} = \begin{bmatrix} +200 \\ 0 \end{bmatrix} \quad kgf.m$$

Si dibujamos el diagrama de momentos para la viga continua, tendremos:



4.1.3. CONCLUSIONES Y OBSERVACIONES DE LOS CASOS PARA ESTUDIO.

- Los resultados obtenidos son congruentes con los obtenidos al emplear los métodos de análisis aprendidos en cursos anteriores de análisis de estructuras formadas por barras, tales como: área momento, 3 momentos, método de Cross, viga conjugada, etc.

  De esta manera podemos confiar en que este nuevo conjunto de teoremas matemáticos nos permite resolver los problemas que antes resolvíamos y esperamos que nos permitirán atacar problemas que, por su complejidad, antes no podíamos resolver. Esto habrá que comprobarlo en el resto del curso.

- En el proceso de solución obtenemos, necesariamente, los desplazamientos en los extremos de las barras. A diferencia de los métodos de análisis ya conocidos, en los que teníamos que realizar cálculos adicionales para obtener estos desplazamientos.

- A diferencia del caso de las armaduras, en ningún momento tuvimos que realizar transformaciones de sistemas de coordenadas

4.2. PROCEDIMIENTO ALTERNO SIMPLIFICADO PARA LA OBTENCIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ, CONDENSADA A LOS DESPLAZAMIENTOS NO NULOS.

Como se pudo observar en los ejemplos anteriores el proceso necesario para ensamblar la matriz de rigidez global es bastante laborioso.

Si a priori sabemos que nuestro modelo matemático contiene varios vectores de desplazamiento en los puntos de control cuya magnitud es cero, podemos no incluir estos vectores en la formación de la matriz de rigidez. Con esto logramos reducir considerablemente el orden de la matriz de rigidez a ensamblar y tendremos consideradas las condiciones de frontera en nuestra matriz, razón por la cual existirá su inversa (si definimos una estructura estable) y podremos utilizarla para la solución de nuestro problema.

En este artículo se propone un método alterno simplificado que se puede emplear para la formación de la matriz de rigidez ensamblada. Este método aprovecha algunas propiedades de las matrices que se forman con el método general hasta ahora demostrado, y a partir de estas, se proponen una serie de "atajos matemáticos" que nos permitirán llegar a la misma matriz a la cual llegamos anteriormente, $K_{11u,}$ de una manera mas intuitiva para nuestra mente, acostumbrada mas bien a las interpretaciones físicas y no a las matemáticas.

La secuencia de pasos que componen nuestro procedimiento alterno simplificado son:

1. Identificar y numerar los grados de libertad de nuestra estructura. Desde esta etapa debemos verificar que nuestra estructura no sea un mecanismo, es decir, que sea una estructura estable. Estos grados de libertad están definidos en los puntos de control de la estructura. Recordar que por conveniencia estos puntos de control se fijan en la unión de los tramos rectos de las barras (nudos de conexión), aunque nada nos impide definir puntos de control en posiciones intermedias.

2. Para cada uno de los grados de libertad (uno a la vez) se dibujara un croquis de la estructura en su configuración deformada suponiendo que el grado de libertad tiene una magnitud unitaria y, simultáneamente, considerando que el resto de los grados de libertad tiene magnitud cero. Tendremos tantos croquis de la estructura deformada como grados de libertad tenga la misma.

3. En cada uno de los croquis dibujados se dibujarán las fuerzas en los extremos de cada barra que resultan necesarias para mantener las barras en su configuración deformada. Las expresiones matemáticas que relacionan a los desplazamientos y rotaciones con estas fuerzas y momentos, fueron deducidas en el artículo 4.1.1.1 para el caso de barras prismáticas.

4. Finalmente, procedemos a la formación de la matriz de rigidez K_{11u}, la cual nos relaciona a los grados de libertad con las fuerzas externas aplicadas en estos mismos grados de libertad.

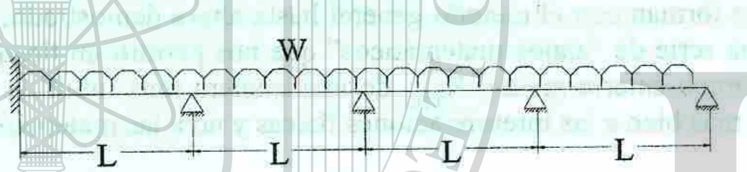
Esta matriz contendrá en la columna i-ésima a las fuerzas que aparecen al hacer igual a 1 la magnitud del grado de libertad i-ésimo. Estas fuerzas se obtienen de los croquis de la estructura deformada elaborados en el paso 3. Mediante ejemplos se clarificará esta parte del procedimiento.

Al terminar la secuencia de pasos propuesta tendremos lo necesario para, una vez calculado el vector de fuerzas actuantes en los grados de libertad, proceder a calcular el vector de desplazamientos con la expresión:

$$[D_U]=[K_{11u}]^{-1}\cdot[F_U]$$

4.2.1. *CASO PARA ESTUDIO*: VIGA CONTINUA DE 4 CLAROS

Como primer ejemplo de aplicación del método alterno simplificado, resolveremos una viga continua. Elegimos este ejemplo para así poder comparar fácilmente los resultados con los que obtendríamos al utilizar el método general.

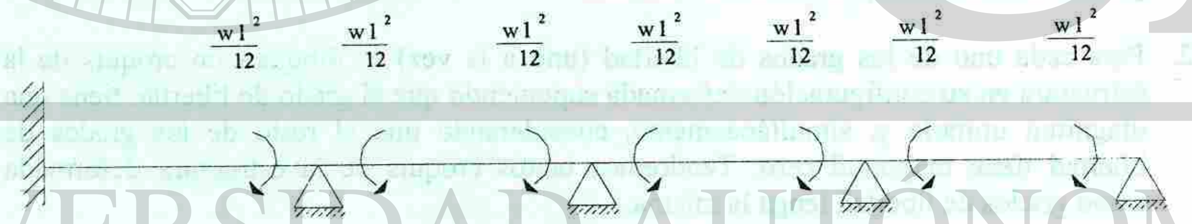


Hipótesis de trabajo:

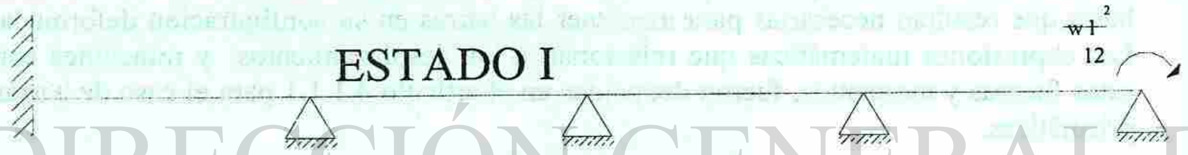
- Las barras no se deforman axialmente
- no hay desplazamientos verticales en los apoyos

Objetivo: analizar completamente la estructura.

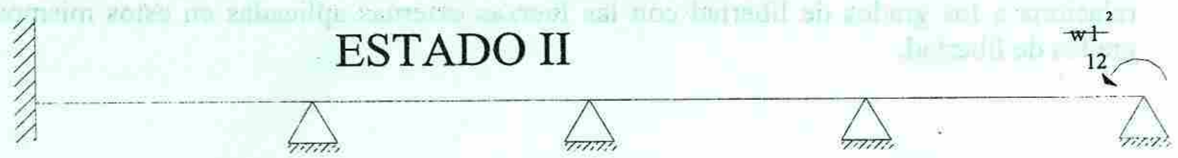
Las fuerzas ficticias introducidas en el **estado 1** son:



Cuya resultante es:

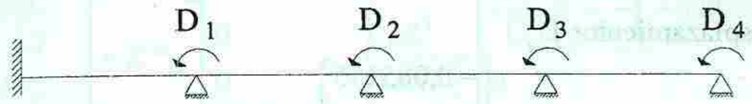


Por lo tanto, las fuerzas necesarias en el **estado 2** son:

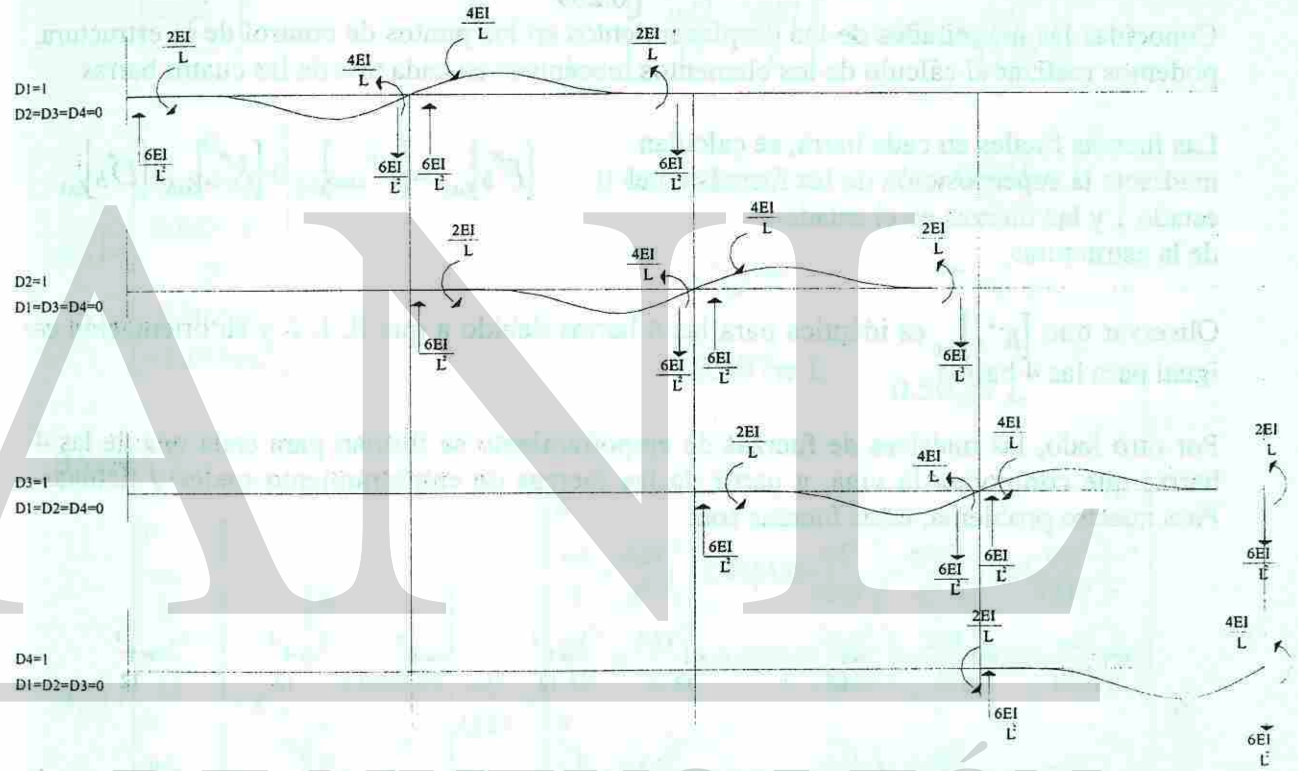


Para poder resolver la estructura en su estado 2, debemos obtener la matriz de rigidez K_{11u} que nos permita calcular las magnitudes de los diferentes grados de libertad. El cálculo de la matriz de rigidez lo realizaremos a través del uso del método alterno simplificado.

Paso 1: identificación de todos los grados de libertad existentes en la viga de acuerdo a las hipótesis de trabajo aceptadas.



Pasos 2 y 3: croquis de las deformadas de la viga para cada uno de los grados de libertad tomando un valor unitario y el resto un valor de cero.



Paso 4: Formación de la matriz de rigidez $[K_{11u}]$ que nos relaciona a F_u con D_u.

La primera columna se obtiene de los valores establecidos en el croquis de la deformada cuando $D_1 = 1$, las demás columnas se obtienen de manera análoga.

$$\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\F_3\\F_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4EI}{L}+\frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 & 0\\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L}+\frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0\\ 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L}+\frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L}\\ 0 & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_1\\D_2\\D_3\\D_4\end{bmatrix}$$

Aquí termina la aplicación del método alterno simplificado. Los siguientes pasos corresponden a la secuencia de pasos requeridos por el método general de rigideces.

El vector de fuerzas $[Fu]$ actuante sobre la estructura que estamos analizando en su estado 2 es:

$$F_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dfrac{w \cdot L^2}{12} \end{bmatrix}^T$$

Calculo del vector de desplazamientos D_u

$$\Longrightarrow \quad D_u = [K_{11u}]^{-1} \cdot F_u = \begin{bmatrix} -0.005155 \\ 0.021 \\ -0.077 \\ 0.289 \end{bmatrix} \frac{wL^2}{12} \cdot \frac{L}{EI}$$

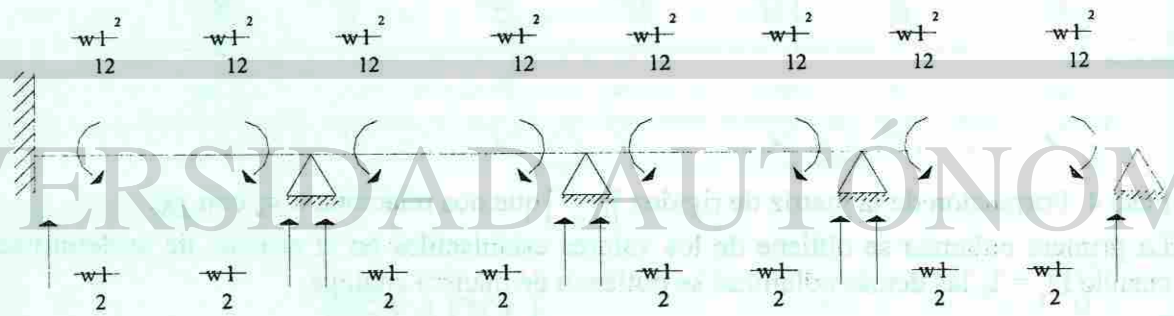
Conocidas las magnitudes de los desplazamientos en los puntos de control de la estructura, podemos realizar el cálculo de los elementos mecánicos en cada una de las cuatro barras.

Las fuerzas finales en cada barra, se calculan mediante la superposición de las fuerzas en el estado 1 y las fuerzas en el estado 2 de la estructura:

$$[F^*{}_b]_{6x1} = [F^*{}_{emp}]_{6x1} + [K^*{}_b]_{6x6} \cdot [D^*{}_b]_{6x1}$$

Observar que $[K^*{}_b]_{6x6}$ es idéntica para las 4 barras debido a que E, I, L y su orientación es igual para las 4 barras.

Por otro lado, las matrices de fuerzas de empotramiento se forman para cada una de las 4 barras que componen la viga, a partir de las fuerzas de empotramiento reales y ficticias. Para nuestro problema, estas fuerzas son:

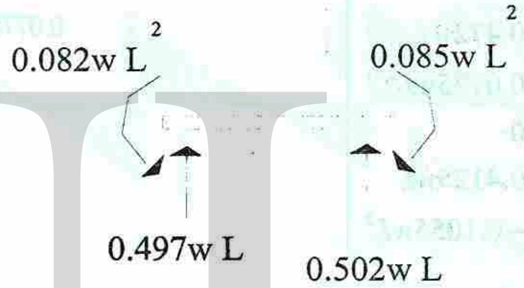


A partir de esta información, las fuerzas resultantes de la superposición del estado I con el estado II son las descritas a continuación para cada una de las cuatro barras:

BARRA 1:

$$\{F^*_{b1}\} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{wl}{2} \\ \dfrac{wl^2}{12} \\ 0 \\ \dfrac{wl}{2} \\ -\dfrac{wl^2}{12} \end{bmatrix} + K^*{}_{b1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.005155 \end{bmatrix} \frac{wL^3}{12EI} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{wl}{2} + \dfrac{6EI}{L^2}\left(-0.005155\dfrac{wL^3}{12EI}\right) \\ \dfrac{wL^2}{12} + \dfrac{2EI}{L}\left(-0.005155\dfrac{wL^3}{12EI}\right) \\ 0 \\ \dfrac{wl}{2} - \dfrac{6EI}{L^2}\left(-0.005155\dfrac{wL^3}{12EI}\right) \\ -\dfrac{wL^2}{12} + \dfrac{4EI}{L}\left(-0.005155\dfrac{wL^3}{12EI}\right) \end{bmatrix}$$

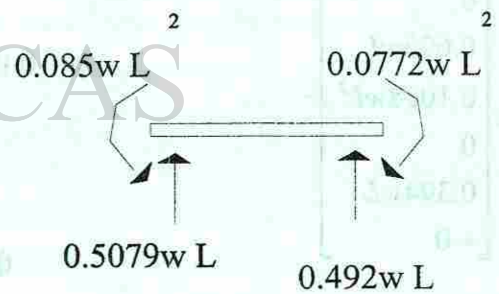
$$\{F^*_{b1}\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.497wL \\ 0.082wL^2 \\ 0 \\ 0.502wL \\ -0.085wL^2 \end{bmatrix}$$



BARRA 2:

$$\{F^*_{b2}\} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{wL}{2} \\ \dfrac{wL^2}{12} \\ 0 \\ \dfrac{wL}{2} \\ -\dfrac{wL^2}{12} \end{bmatrix} + K^*_{b2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.005155 \\ 0 \\ 0 \\ 0.021 \end{bmatrix} \frac{wL^3}{12EI} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{wL}{2} + \dfrac{6EI}{L^2}\left(-0.005155\dfrac{wL^3}{12EI}\right) + \dfrac{6EI}{L^2}\left(0.021\dfrac{wL^3}{12EI}\right) \\ \dfrac{wL^2}{12} + \dfrac{4EI}{L}\left(-0.005155\dfrac{wL^3}{12EI}\right) + \dfrac{2EI}{L}\left(0.021\dfrac{wL^3}{12EI}\right) \\ 0 \\ \dfrac{wL}{2} - \dfrac{6EI}{L^2}\left(-0.005155\dfrac{wL^3}{12EI}\right) - \dfrac{6EI}{L^2}\left(0.021\dfrac{wL^3}{12EI}\right) \\ -\dfrac{wL^2}{12} + \dfrac{2EI}{L}\left(-0.005155\dfrac{wL^3}{12EI}\right) + \dfrac{4EI}{L}\left(0.021\dfrac{wL^3}{12EI}\right) \end{bmatrix}$$

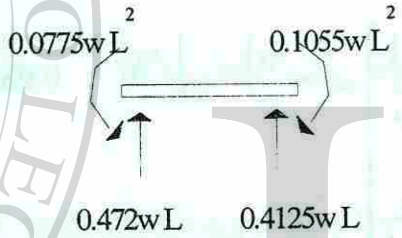
$$\{F^*_{b2}\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5079wL \\ 0.085wL^2 \\ 0 \\ 0.492wL \\ -0.0772wL^2 \end{bmatrix}$$



BARRA 3:

$$\{F^{*}_{b3}\}=\begin{bmatrix}0\\ \frac{wl}{2}\\ \frac{wl^2}{12}\\ 0\\ \frac{wl}{2}\\ -\frac{wl^2}{12}\end{bmatrix}+K^{*}_{b3}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\0.021\\0\\0\\-0.077\end{bmatrix}\frac{wL^3}{12EI}=\begin{bmatrix}0\\ \frac{wl}{2}+\frac{6EI}{L^2}\left(0.021\frac{wL^3}{12EI}\right)+\frac{6EI}{L^2}\left(-0.077\frac{wL^3}{12EI}\right)\\ \frac{wL^2}{12}+\frac{4EI}{L}\left(-0.021\frac{wL^3}{12EI}\right)+\frac{2EI}{L}\left(-0.077\frac{wL^3}{12EI}\right)\\ 0\\ \frac{wl}{2}-\frac{6EI}{L^2}\left(0.021\frac{wL^3}{12EI}\right)-\frac{6EI}{L^2}\left(-0.077\frac{wL^3}{12EI}\right)\\ -\frac{wL^2}{12}+\frac{2EI}{L}\left(0.021\frac{wL^3}{12EI}\right)+\frac{4EI}{L}\left(-0.077\frac{wL^3}{12EI}\right)\end{bmatrix}$$

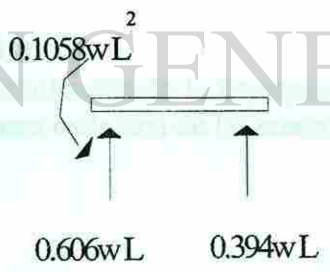
$$\{F^{*}_{b3}\}=\begin{bmatrix}0\\ 0.472wL\\ 0.0775wL^2\\ 0\\ 0.4125wL\\ -0.1055wL^2\end{bmatrix}$$



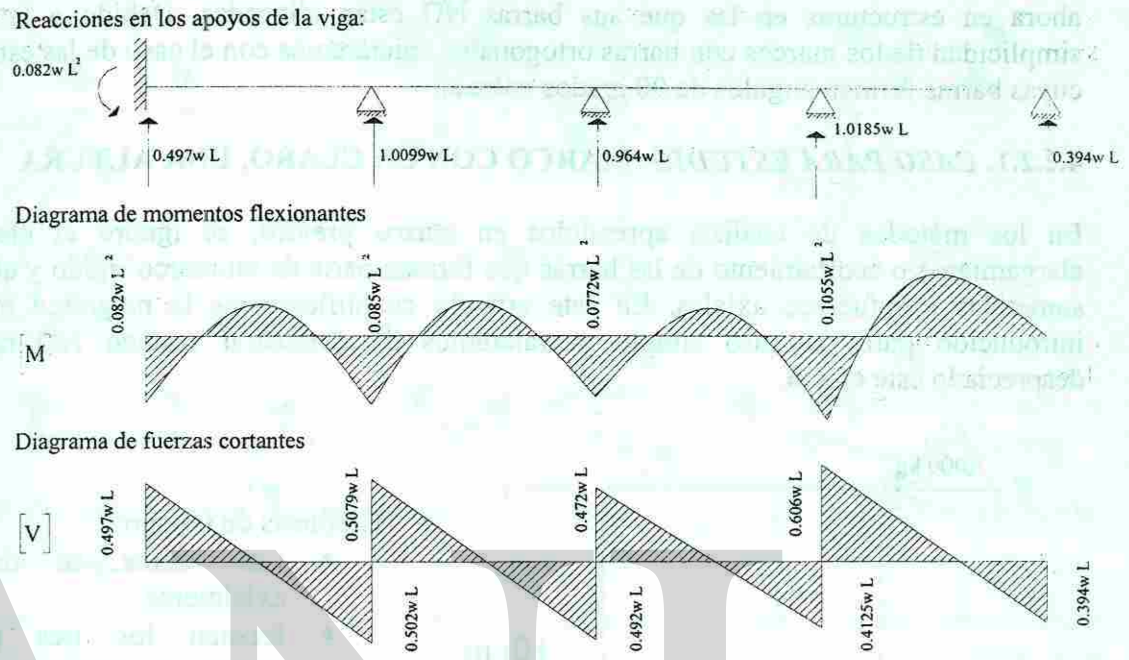
BARRA 4:

$$\{F^{*}_{B4}\}=\begin{bmatrix}0\\ \frac{wl}{2}\\ \frac{wl^2}{12}\\ 0\\ \frac{wl}{2}\\ -\frac{wl^2}{12}\end{bmatrix}+K^{*}_{b4}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\-0.077\\0\\0\\0.289\end{bmatrix}\frac{wL^3}{12EI}=\begin{bmatrix}0\\ \frac{wl}{2}+\frac{6EI}{L^2}\left(-0.077\frac{wL^3}{12EI}\right)+\frac{6EI}{L^2}\left(0.289\frac{wL^3}{12EI}\right)\\ \frac{wL^2}{12}+\frac{4EI}{L}\left(-0.077\frac{wL^3}{12EI}\right)+\frac{2EI}{L}\left(0.289\frac{wL^3}{12EI}\right)\\ 0\\ \frac{wl}{2}-\frac{6EI}{L^2}\left(-0.077\frac{wL^3}{12EI}\right)-\frac{6EI}{L^2}\left(0.289\frac{wL^3}{12EI}\right)\\ -\frac{wL^2}{12}+\frac{2EI}{L}\left(-0.077\frac{wL^3}{12EI}\right)+\frac{4EI}{L}\left(0.289\frac{wL^3}{12EI}\right)\end{bmatrix}$$

$$\{F^{*}_{b4}\}=\begin{bmatrix}0\\ 0.606wL\\ 0.1058wL^2\\ 0\\ 0.394wL\\ \approx 0\end{bmatrix}$$



Representación gráfica de los resultados obtenidos:

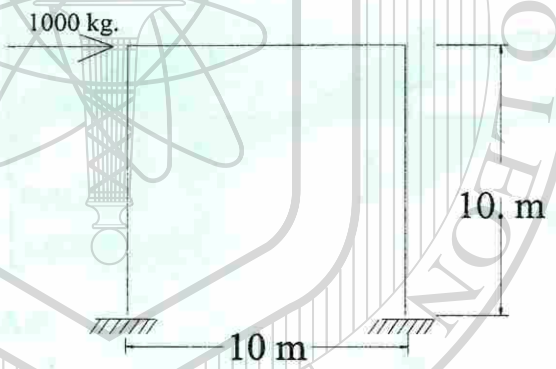


4.2.2. MARCOS CON BARRAS ORTOGONALES

El método alterno simplificado propuesto y probado en el artículo anterior lo utilizaremos ahora en estructuras en las que sus barras NO están alineadas. Debido a la relativa simplicidad de los marcos con barras ortogonales, iniciaremos con el caso de las estructuras cuyas barras forman ángulos de 90 grados entre si.

4.2.2.1. *CASO PARA ESTUDIO*: MARCO CON UN CLARO, UNA ALTURA

En los métodos de análisis aprendidos en cursos previos, se ignoró el efecto del alargamiento o acortamiento de las barras que forman parte de un marco rígido y que están sometidas a esfuerzos axiales. En este artículo cuantificaremos la magnitud del error introducido para un caso simple y trataremos de demostrar cuando NO debe ser despreciado este efecto.



Hipótesis de trabajo:

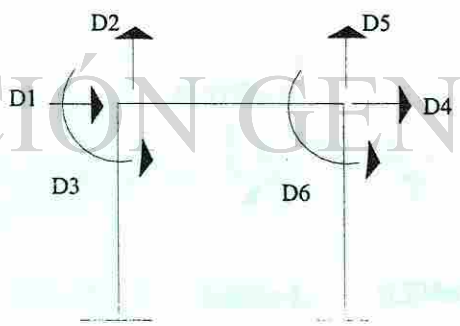
- Las barras se deforman axialmente.
- Existen los tres posibles grados de libertad en cada punto de control.
- Área e Inercia son iguales en las tres barras.

Nota importante: Como no tenemos cargas transversales en las barras, no es necesario descomponer a la estructura en una estructura en estado I y otra estructura en estado II.

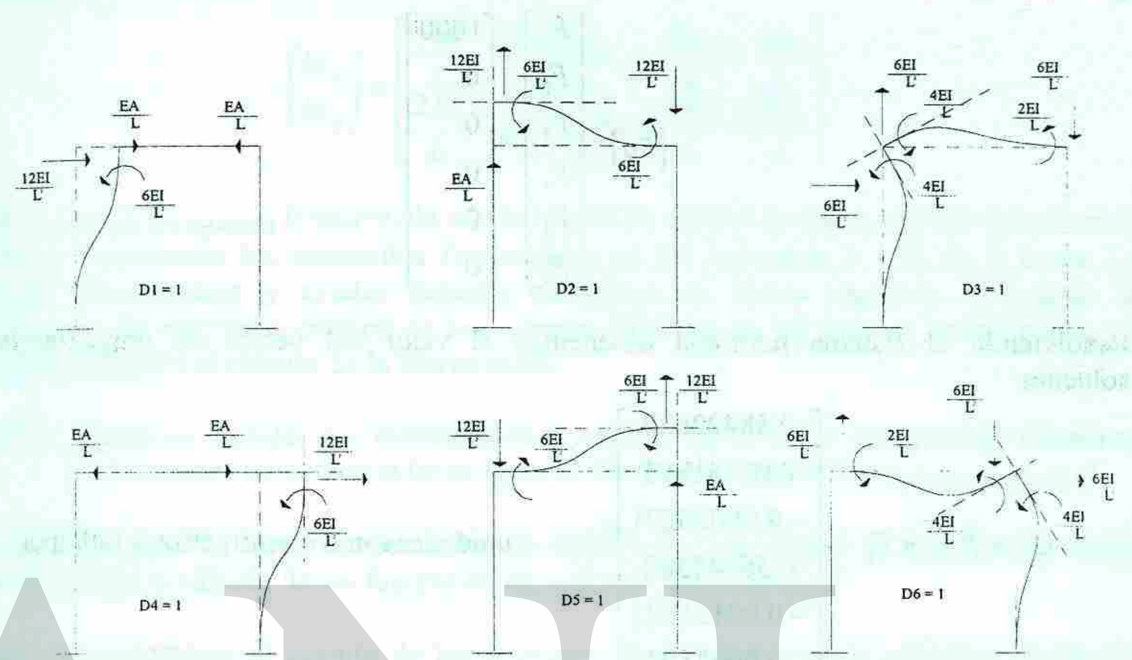
Aplicación del método alterno simplificado para la formación del sistema matricial:

$$F_U = K_{11U} \bullet D_U$$

Paso 1 .- identificar los grados de libertad



Paso 2 y 3: Dibujar croquis de las deformadas del marco para cada uno de los grados de libertad tomando un valor unitario y el resto un valor de cero.



Paso 4 .- Ensamblar por inspección la matriz de rigidez $[k_{11u}]$ y formar el sistema matricial que relaciona a las fuerzas en los puntos de control con sus desplazamientos.

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L}+\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA}{L}+\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L}+\frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L}+\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{EA}{L}+\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L}+\frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix}$$

Para sensibilizarnos sobre la magnitud de los parámetros involucrados, tomaremos las dimensiones de perfiles que aparecen en un manual de perfiles fabricados en México.

Propiedades geométricas de perfil IPR 18" X 7 ½" X 105.65kg/m (manual AHMSA)

A=134.19 cms²
I=48699 cm⁴
E=2100000 kgf/cm²

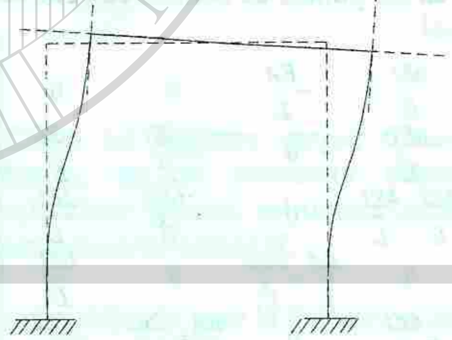
Sustituyendo en el vector de fuerzas $[Fu]$ las magnitudes de las cargas actuantes en los grados de libertad:

$$[Fu]=\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\F_3\\F_4\\F_5\\F_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1000\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema matricial obtenemos el valor del vector de desplazamientos solución:

$$D_U = K_{11U}^{-1} \bullet F_U = \begin{bmatrix}0.58422620\\0.00151895\\-0.00035271\\0.58245382\\-0.00151895\\-0.00035094\end{bmatrix} \quad \text{unidades son en centimetros y radianes}$$

Representando gráficamente este resultado la configuración del marco deformado es:



Conocida la magnitud de todos los desplazamientos de los puntos de control, el problema ha quedado cinemáticamente determinado y por lo tanto, podemos calcular las fuerzas en los extremos de las tres barras que forman el marco.

En el caso para estudio descrito en el artículo 4.1.2.4, se propuso calcular las fuerzas en las barras utilizando una matriz de rigidez de barra de 2 renglones y 2 columnas. Con esta matriz y los giros en los extremos de las barras se calcularon solamente los momentos flexionantes en los dos extremos de las barras.

En el ejemplo que estamos trabajando en este artículo, las barras tienen desplazamientos transversales y axiales, además de los giros de sus extremos. Proponemos utilizar la

siguiente ecuación para las barras, expresadas sus componentes en el sistema de coordenadas locales de cada barra:

$$\begin{Bmatrix}M_A\\M_B\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L}\\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L}\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\Theta_A+\frac{Dy_A}{L}-\frac{Dy_B}{L}\\ \Theta_B+\frac{Dy_A}{L}-\frac{Dy_B}{L}\end{Bmatrix}$$

Esta *ecuación compacta* (comparada con la matriz de rigidez de barra de 6x6) nos permitirá calcular únicamente los momentos flexionantes en los extremos A y B de la barra. Las fuerzas transversales y axiales deberán calcularse en forma separada, utilizando las ecuaciones de equilibrio estático de los cuerpos rígidos para las fuerzas transversales y la rigidez axial para el cálculo de la fuerza axial.

NOTA: Como es sabido, las deformaciones axiales en la barra no generan momentos flexionantes en la misma (si se ignoran los desplazamientos de *segundo orden*)

Se deja al lector la tarea de demostrar la validez de esta forma compacta del sistema matricial para el cálculo de las fuerzas en los extremos de una barra.

Ahora procederemos al cálculo de los momento flexionantes en los extremos de las tres barras. La matriz de rigidez de barra (en su forma compacta) para las tres barras son idénticas y su valor numérico es:

$$K_b=\begin{bmatrix}4 & 2\\2 & 4\end{bmatrix}*102{,}267{,}900 \qquad \text{unidades en kgf - cm}$$

los momentos flexionantes en cada una de las tres barras son:

BARRA 1:

$$\begin{bmatrix}M_A\\M_B\end{bmatrix}=[K_b]\cdot\begin{bmatrix}0+\frac{0}{1000}-\frac{(-0.5842262)}{1000}\\ -0.00035271+\frac{0}{1000}-\frac{(-0.5842262)}{1000}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}286344\\214202\end{bmatrix}$$

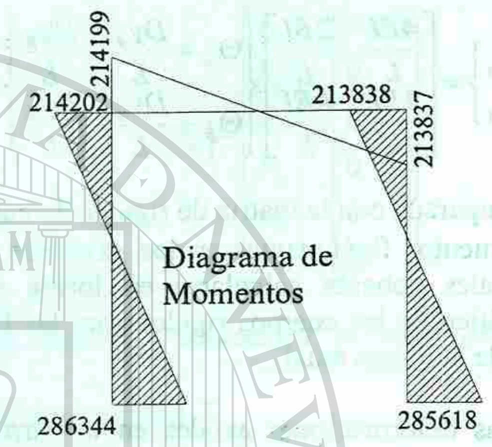
BARRA 2:

$$\begin{bmatrix}M_A\\M_B\end{bmatrix}=[K_b]\cdot\begin{bmatrix}-0.00035271+\frac{0.00151895}{1000}-\frac{(-0.00151895)}{1000}\\ -0.00035094+\frac{0.00151895}{1000}-\frac{(-0.00151895)}{1000}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-214199\\-213837\end{bmatrix}$$

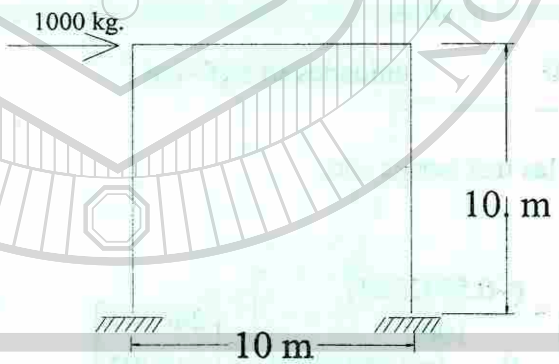
BARRA 3:

$$\begin{bmatrix}M_A\\M_B\end{bmatrix}=[K_b]\cdot\begin{bmatrix}0+\frac{0}{1000}-\frac{(-0.58245382)}{1000}\\ -0.00035094+\frac{0}{1000}-\frac{(-0.58245382)}{1000}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}285618\\213838\end{bmatrix}$$

Con estos valores de momentos podemos dibujar el diagrama de momentos flexionantes:



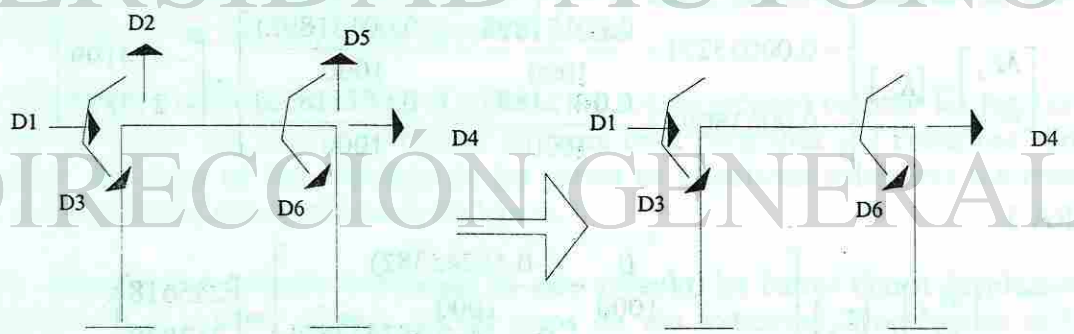
Ahora, volveremos a analizar el mismo marco considerando que las barras no se deforman axialmente. Los valores del diagrama de momentos se compararán con los valores presentados en el diagrama para el caso del marco en que se consideraron las deformaciones axiales.



Hipótesis de trabajo:

- Las barras NO se deforman axialmente.
- Área e Inercia son iguales en las tres barras.

Debido a la hipótesis de que las barras no se deforman axialmente, los grados de libertad se reducen de 6 a 3, tal como se muestra en el diagrama siguiente:



Como la viga no se deforma axialmente, el grado de libertad D_4 tiene que ser igual al grado de libertad D_1.
En consecuencia, el sistema matricial se reduce a:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_3 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3}+\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L}+\frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L}+\frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_3 \\ D_6 \end{bmatrix}$$

Se deja al lector la demostración mediante el método alterno simplificado.

Sustituyendo en el vector de fuerzas $[Fu]$ las magnitudes de las cargas actuantes en los grados de libertad:

$$F_U = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_3 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema matricial obtenemos el valor del vector de desplazamientos solución:

$$D_U = K_{11U}^{-1} \bullet F_U = \begin{bmatrix} 0.58203805 \\ -0.00034922 \\ -0.00034922 \end{bmatrix}$$ unidades son en centimetros y radianes

Representando gráficamente este resultado la configuración del marco deformado es:

Ahora procederemos al cálculo de los momento flexionantes en los extremos de las tres barras.

BARRA 1:

$$\begin{bmatrix}M_A\\M_B\end{bmatrix}=[K_b]\cdot\begin{bmatrix}0+\dfrac{0}{1000}-\dfrac{(-0.58203805)}{1000}\\-0.00034922+\dfrac{0}{1000}-\dfrac{(-0.58203805)}{1000}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}285715\\214287\end{bmatrix}$$

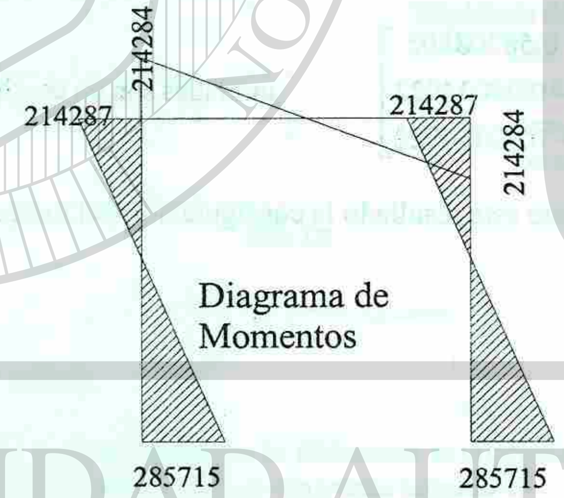
BARRA 2:

$$\begin{bmatrix}M_A\\M_B\end{bmatrix}=[K_b]\cdot\begin{bmatrix}-0.00034922+\dfrac{0}{1000}-\dfrac{0}{1000}\\-0.00034922+\dfrac{0}{1000}-\dfrac{0}{1000}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-214284\\-214284\end{bmatrix}$$

BARRA 3:

$$\begin{bmatrix}M_A\\M_B\end{bmatrix}=[K_b]\cdot\begin{bmatrix}0+\dfrac{0}{1000}-\dfrac{(-0.58203805)}{1000}\\-0.00034922+\dfrac{0}{1000}-\dfrac{(-0.58203805)}{1000}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}285715\\214287\end{bmatrix}$$

Con estos valores de momentos podemos dibujar el diagrama de momentos flexionantes:



Comparando el momento flexionante en el extremo inferior de la columna izquierda para el marco con rigidez axial finita y el marco con rigidez axial infinita (no deformable axialmente) podemos establecer la magnitud del error introducido voluntariamente al simplificar el problema mediante la aceptación de la hipótesis de no deformabilidad axial de las barras.

$$error=\left(\frac{285715}{286344}-1\right)*100=0.22\%$$

Considerando los niveles de incertidumbre existentes en la determinación de las propiedades geométricas de las estructuras, las propiedades mecánicas de los materiales y

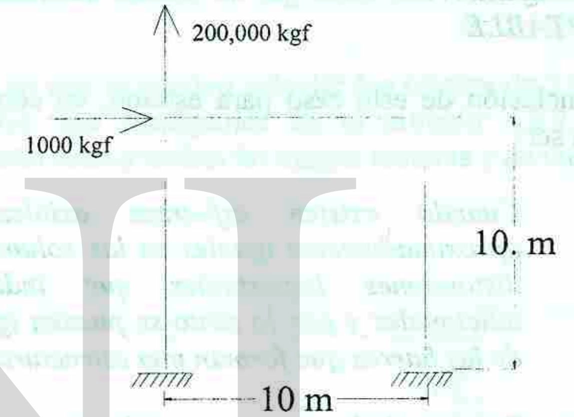
la magnitud de las acciones a las que estará sometida durante su vida útil; este nivel de error es muy pequeño y por lo tanto es aceptable.

Una conclusión posible de este caso para estudio es:

> *Se puede ignorar la deformación axial de las barras que forman una estructura, lo cual conduce a un problema matemáticamente menos laborioso y por lo tanto más conveniente para el ingeniero que tiene que realizar el análisis estructural.*

Antes de aceptar ciegamente esta conclusión, estudiaremos enseguida un caso extremo en el que una de las barras (la columna izquierda) está sometida a una carga axial sustancialmente mayor que el resto de las barras.

Marco bajo estudio



Aplicando los sistemas matriciales obtenidos en el marco del problema anterior, podemos calcular los siguientes vectores de desplazamiento solución:

A) Considerando rigidez Axial finita

$$D_U=\begin{bmatrix}0.88801638\\0.71080368\\-0.00096029\\0.88624399\\-0.00107796\\-0.00095852\end{bmatrix}$$

B) Considerando rigidez Axial infinita

$$D_U=\begin{bmatrix}0.58203805\\-0.00034922\\-0.00034922\end{bmatrix}$$

Calculamos ahora los momentos flexionantes en el extremo superior de la columna izquierda para los casos A y B:

Caso A

$$M_A=4\frac{EI}{L}(-0.00096029)+6\frac{EI}{L^2}(0.88801638)=152066\ kgf-cm$$

Caso B

$$M_B = 4\frac{EI}{L}(-0.00034922) + 6\frac{EI}{L^2}(0.58203805) = 214287 \ \ kgf - cm$$

Si hubiéramos despreciado las deformaciones axiales, la fuerza de 200,000 kgf no hubiera sido considerada en la formación del vector de cargas F_U y entonces el análisis daría los mismos momentos flexionantes que en el caso del marco sin la carga vertical. Esta ultima afirmación debe ser reflexionada cuidadosamente por el lector.

Basados en los resultados recién obtenidos, calcularemos la magnitud del error introducido voluntariamente al suponer que no se deforman axialmente las barras:

$$error = \left(\frac{214287}{152066} - 1\right) * 100 = 40.91\%$$

Esta magnitud del error ya no puede considerarse pequeña y por lo tanto ***NO ES ACEPTABLE***.

La conclusión de este caso para estudio, en conjunto con el anterior caso para estudio, podría ser:

> *Cuando existen esfuerzos axiales relativamente pequeños o aproximadamente iguales en las columnas de una estructura, no habrá distorsiones importantes que induzcan momentos flexionantes adicionales y por lo tanto se pueden ignorar las deformaciones axiales de las barras que forman una estructura.*
>
> *Por otro lado, si no se cumplen las condiciones mencionadas, NO debe suponerse la indeformabilidad axial de las barras.*

Estas condiciones se cumplen generalmente en las estructuras de poca altura, tales como las naves industriales típicas y los edificios de pocos pisos.

En los casos para estudio y ejemplos en que aplicamos el método alterno simplificado estaremos utilizando la hipótesis de que las barras no se deforman axialmente. Esto lo haremos así para simplificar la solución de los sistemas matriciales y concentrarnos en las características especiales de los diferentes tipos de problemas.

Debe quedar claro que no procederemos así porque sea la manera más correcta o cercana a la realidad en lo que se refiere al efecto de la deformación axial que sufren las barras al ser sometidas a cargas, solo lo haremos por simplicidad académica.

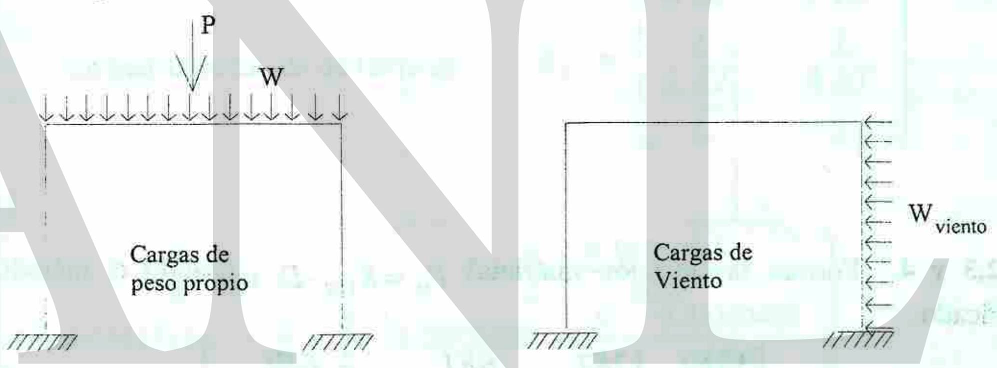
4.2.2.2. CASO PARA ESTUDIO: MARCO CON UN CLARO, UNA ALTURA Y CARGAS EN LAS BARRAS

Como es sabido, sobre las estructuras actúan a lo largo de su vida útil diferentes tipos de cargas. Por ejemplo:

- Cargas de peso propio o cargas muertas.
- Cargas vivas, debidas a las cargas móviles tales como las del mobiliario en un edificio o el tránsito de automóviles sobre la calzada de un puente.
- Cargas accidentales, tales como las inducidas por el viento o por la ocurrencia de un evento sísmico.

En el diseño de estas estructuras es práctica común calcular los efectos de los diferentes tipos de cargas de manera separada, para posteriormente sumar sus efectos en diferentes proporciones.

En este ejercicio mostramos la manera en que se pueden calcular los efectos de 2 tipos de carga actuando sobre el mismo marco que manejamos en el artículo 4.2.2.1. Para ejemplificar, supondremos que sobre dicho marco actúan las cargas muertas y de viento que se indican enseguida:

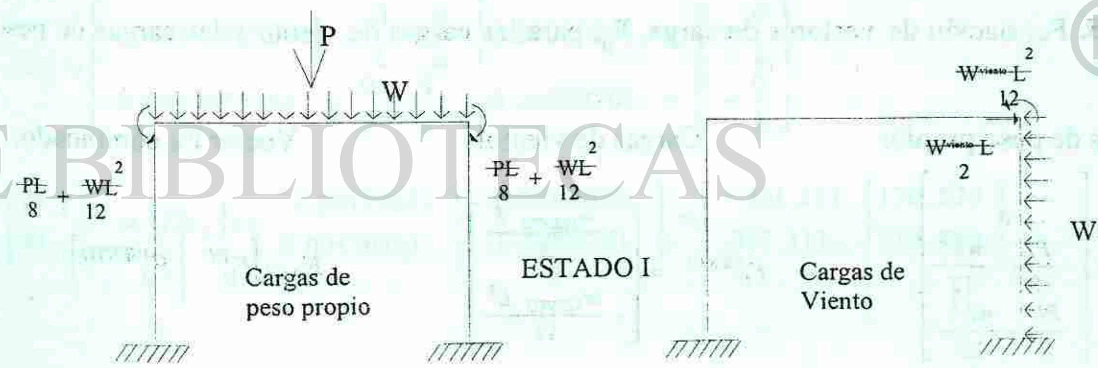


donde:

P = 2000 kgf
W= 10 kgf/cm
W_{viento} = 2 kgf/cm

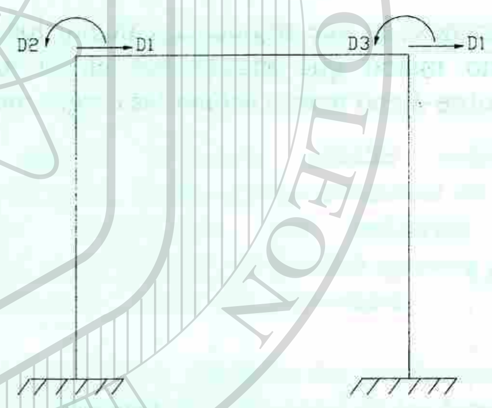
Hipótesis: No hay deformaciones axiales

Debido a que tenemos cargas transversales en las barras, será necesario descomponer a ambos marcos en estructuras en estado I y estructuras en estado II.



SOLUCION DE ESTRUCTURAS EN ESTADO 2:

Paso 1. Identificar los grados de libertad, suponiendo, que las barras **NO** se deforman axialmente.



Paso 2,3 y 4. Formar la ecuación matricial $F_U = K_{11U} \cdot D_U$, usando el método alterno simplificado.

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3}+\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L}+\frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L}+\frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}$$

Paso 5. Formación de vectores de carga, F_u, para las cargas de viento y las cargas de peso propio.

Cargas de peso propio: Cargas de viento: Vector Fu combinado:

$$F_U^{PP} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{PL}{8}-\frac{wL^2}{12} \\ \frac{PL}{8}+\frac{wL^2}{12} \end{bmatrix} \qquad F_U^{VIENTO} = \begin{bmatrix} -\frac{w_{VIENTO}\ L}{2} \\ 0 \\ -\frac{w_{VIENTO}\ L^2}{12} \end{bmatrix} \qquad F_U = \left[F_U^{PP} \;\middle|\; F_U^{VIENTO} \right]$$

Paso 6. Calculo de D_U a partir de $F_U = K_{11U} \cdot D_U$

Sustituyendo las propiedades geométricas del perfil IPR 18"x7 ½"x105.65 kg./m. (Manual AHMSA)

A = 134.19 cm².
I = 48,699 cm⁴.
E = 2,100,000 kg/cm².

en la ecuación:

$$\left[F_U^{PP} \;\middle|\; F_U^{VIENTO} \right] = \left[K_{11U} \right] \cdot \left[D_U^{PP} \;\middle|\; D_U^{VIENTO} \right]$$

y despejando D_U:

$$Du = \left[D_U^{PP} \;\middle|\; D_U^{VIENTO} \right] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -0.52383425 \\ -0.0017655154 & 0.00036862 \\ 0.001765515 & 0.00009701 \end{array} \right]$$

Paso 7. Calculo de fuerzas en extremos de barra para el estado 2.

La matriz reducida de barra es: $k_b = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$

Barra # 1:

$$Db_1 = \left[\begin{array}{c|c} 0+\frac{0}{L}-\frac{0}{L} & 0+\frac{0}{L}-\frac{0.52383425}{1000} \\ -0.0017655154 \quad +\frac{0}{L}-\frac{0}{L} & 0.00036862 \quad +\frac{0}{L}-\frac{0.52383425}{1000} \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix}_{II} = [K_B] \times \left[\begin{array}{c|c} 0 & -0.000523834 \\ -0.0017655154 & -0.000155214 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} -361111 & -246\,033 \\ -722\,222 & -170\,637 \end{array} \right]$$

Barra # 2:

$$Db_2 = \left[\begin{array}{c|c} -0.0017655154 \quad +\frac{0}{L}-\frac{0}{L} & 0.00036862 \quad +\frac{0}{L}-\frac{0}{L} \\ 0.0017655154 \quad +\frac{0}{L}-\frac{0}{L} & 0.00009701 \quad +\frac{0}{L}-\frac{0}{L} \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix}_{II} = [Kb_2] \times \left[\begin{array}{c|c} -0.00176551 & 0.00036862 \\ 0.00176551 & 0.00009701 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} -361{,}111 & 170{,}634 \\ 361{,}111 & 115{,}080 \end{array} \right]$$

Barra # 3:

$$Db_3 = \left[\begin{array}{c:c} 0+\dfrac{0}{L}-\dfrac{0}{L} & 0+\dfrac{0}{L}-\dfrac{0.523839}{1000} \\ 0.001765515 \quad +\dfrac{0}{L}-\dfrac{0}{L} & 0.00009701 \quad +\dfrac{0}{L}-\dfrac{0.523839}{1000} \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix}_{II} = [Kb_3]\times\left[\begin{array}{c:c} 0 & -0.0005238 \\ 0.001765515 & -0.0004268 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} 361{,}111 & -301{,}587 \\ 722{,}222 & -281{,}745 \end{array}\right]$$

SUPERPOSICION DE ESTADO DE ESFUERZOS DE ESTADO 1 Y ESTADO 2:

Barra # 1:

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]_I + \left[\begin{array}{c:c} -361{,}111 & -246{,}033 \\ -722{,}222 & -170{,}637 \end{array}\right]_{II} = \left[\begin{array}{c:c} -361{,}111 & -246{,}033 \\ -722{,}222 & -170{,}637 \end{array}\right]$$

Barra # 2:

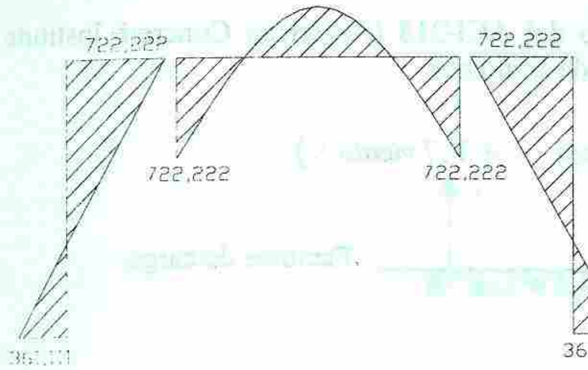
$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} 1{,}083{,}333 & 0 \\ -1{,}083{,}333 & 0 \end{array}\right]_I + \left[\begin{array}{c:c} -361{,}111 & 170{,}634 \\ 361{,}111 & 115{,}080 \end{array}\right]_{II} = \left[\begin{array}{c:c} 722{,}222 & 170{,}634 \\ -722{,}222 & 115{,}080 \end{array}\right]$$

Barra # 3:

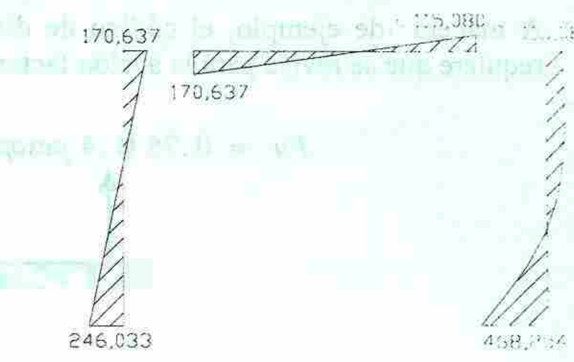
$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} 0 & -166{,}667 \\ 0 & 166{,}667 \end{array}\right]_I + \left[\begin{array}{c:c} 361{,}111 & -301{,}587 \\ 722{,}222 & -281{,}745 \end{array}\right]_{II} = \left[\begin{array}{c:c} 361{,}111 & -468{,}254 \\ 722{,}222 & -115{,}078 \end{array}\right]$$

Diagramas de momentos:

Cargas de peso propio:



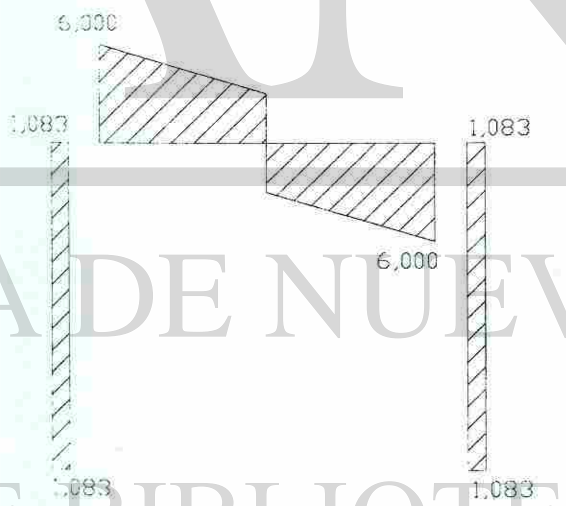
Cargas de viento:



Diagramas de cortantes:

A partir de los momentos en los extremos de las barras y las cargas transversales, resulta simple calcular los diagramas de cortante. Se deja al lector el calculo de los mismos.

Cargas de peso propio:



Cargas de viento:

Ahora, teniendo el estado de esfuerzos inducido por cada uno de los dos tipos de carga, resulta posible realizar combinaciones de carga requeridas por los códigos de diseño, en los que se pide revisar que las combinaciones de acciones, multiplicadas por sus factores de carga, sean menores que las resistencias, reducidas por los factores de reducción de resistencia:

$$Accion \times F_{actor} C_{arg\,a} < \mathrm{Re}\,sistencia \times F_{actor} R_{educcion}$$

A manera de ejemplo, el código de diseño del ACI-318 (American Concrete Institute) requiere que se revise para la acción factorizada siguiente:

$$Fu = 0.75\,(1.4\; pesopropio \quad + 1.7\, viento\;)$$

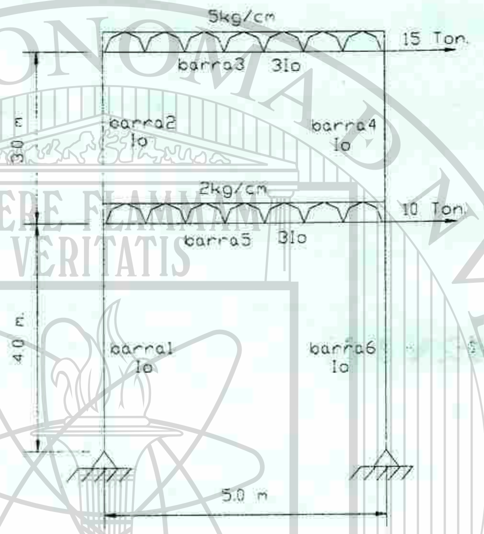
Factores de carga.

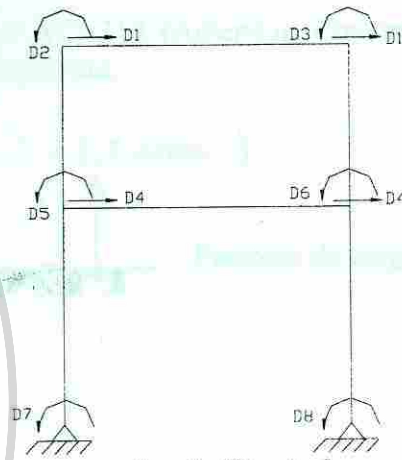
4.2.2.3. EJEMPLO ADICIONAL: Marco Con Dos Claros, Una Altura

PENDIENTE

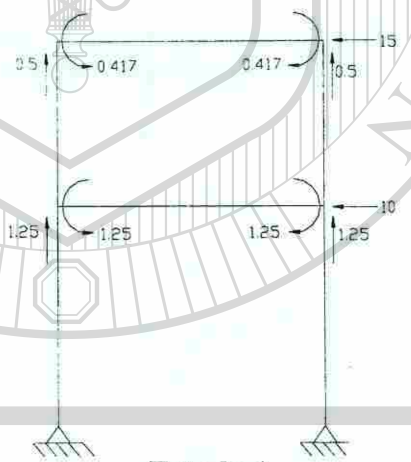
4.2.2.4. EJEMPLO ADICIONAL: Marco Con Un Claro, Dos Niveles

Analizar el marco:

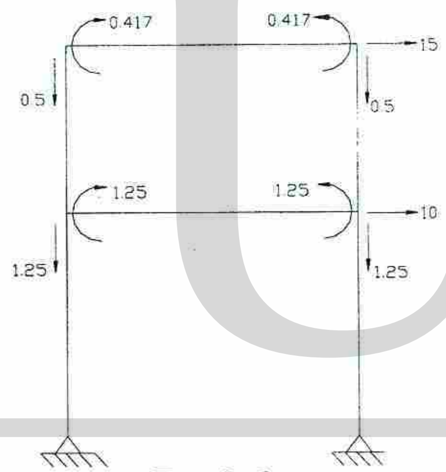




grados de libertad



Estado 1
"Estructura Restringida"



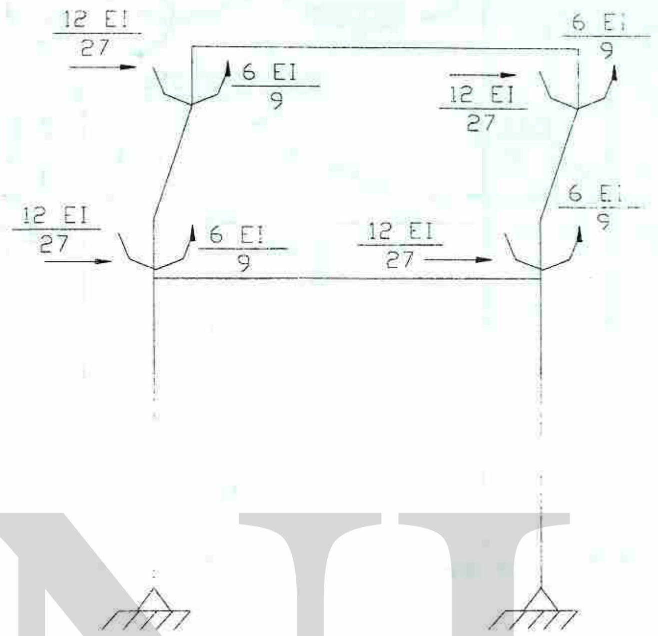
Estado 2
"Estructura liberada"

Formación del vector Fu:

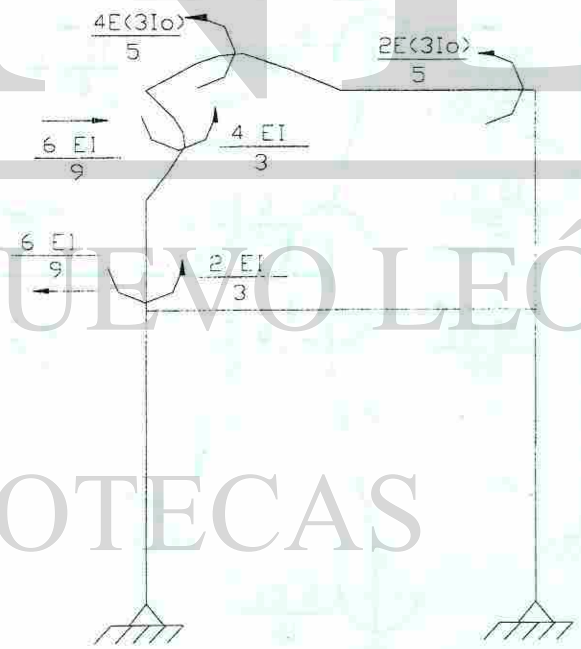
$$Fu = \begin{bmatrix} 15 \\ -0.417 \\ 0.417 \\ 10 \\ -1.25 \\ 1.25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Liberación de los grados de libertad:

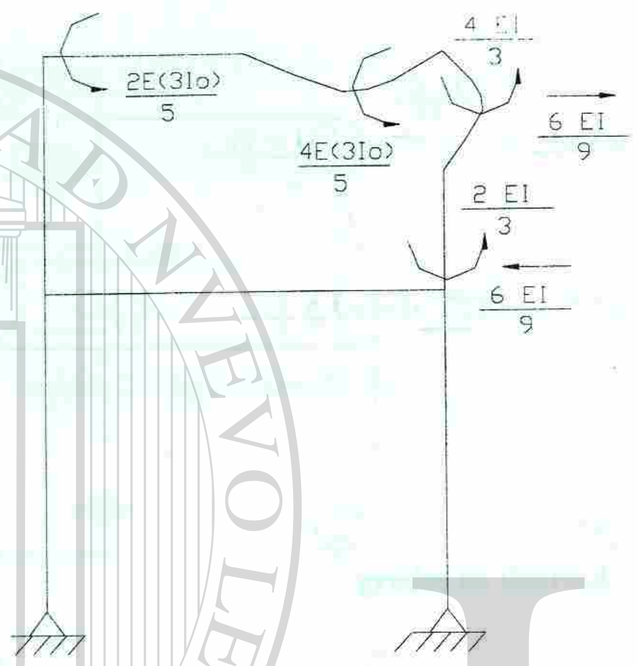
$D_1 = 1, D_n = 0$



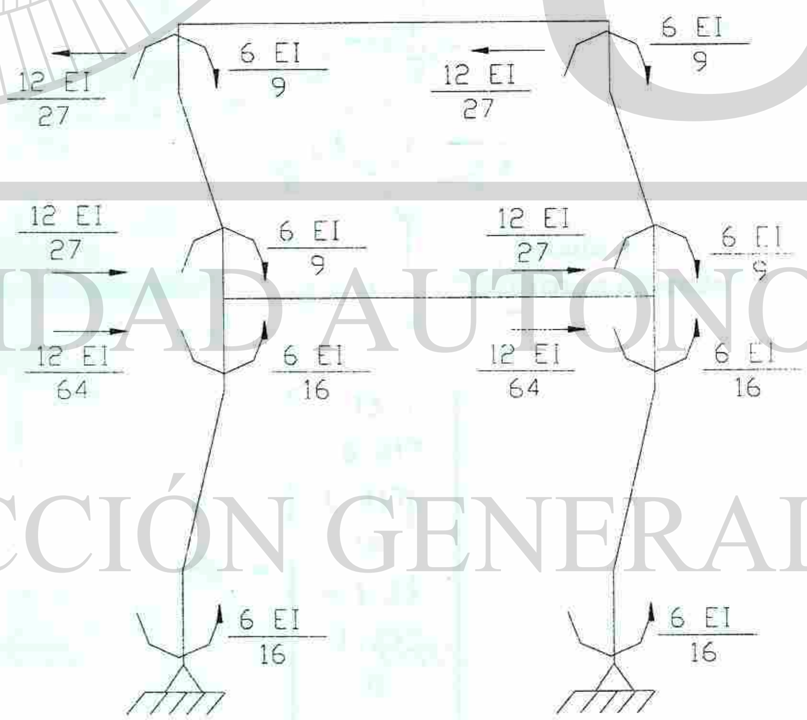
$D_2 = 1, D_n = 0.$



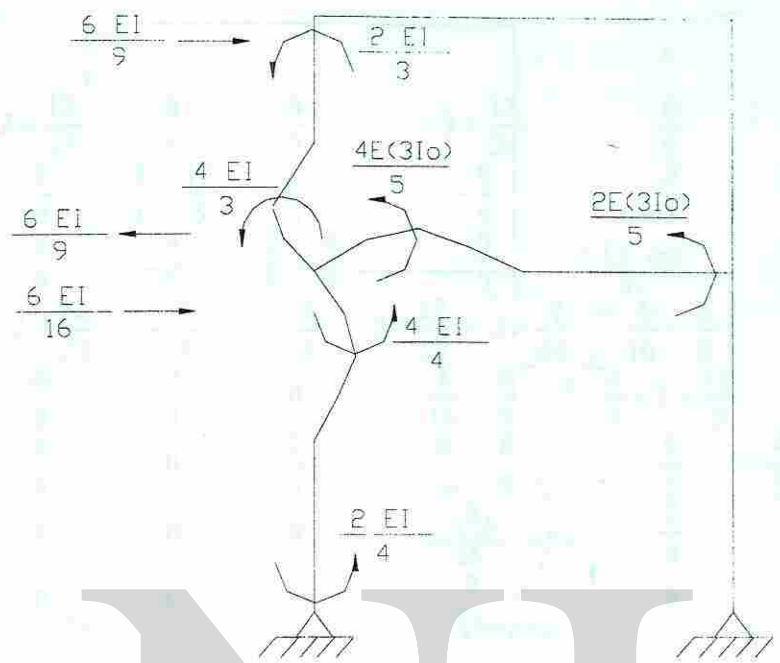
$D_3 = 1, D_n = 0$



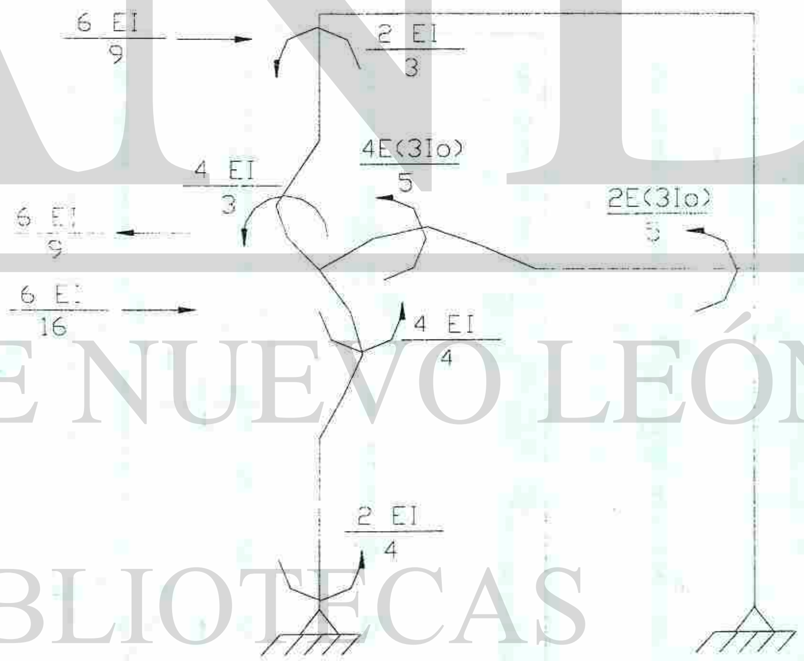
$D_4 = 1, D_n = 0$



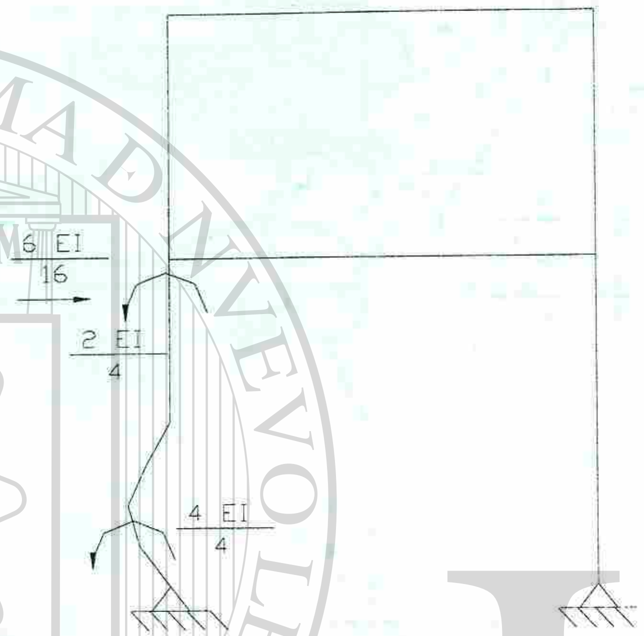
$D_5 = 1, D_n = 0$



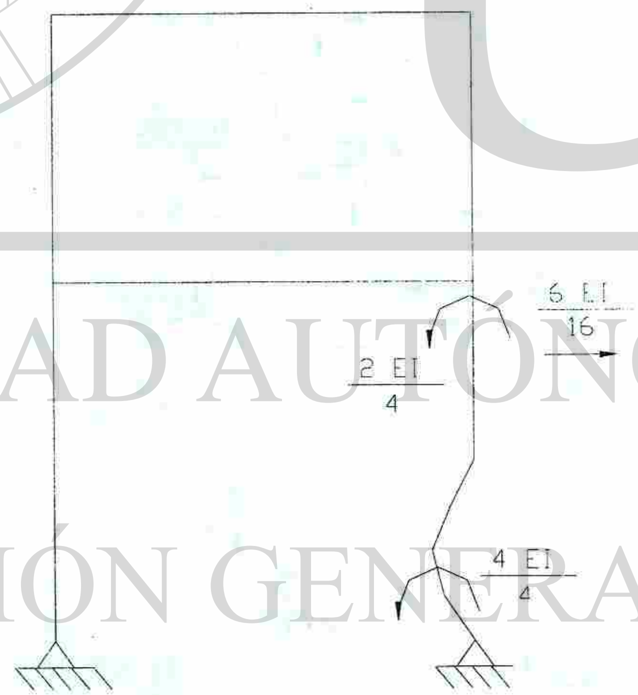
$D_6 = 1, D_n = 0$



$D_7 = 1, D_n = 0$



$D_8 = 1, D_n = 0$



Formación de la matriz K11u:

$$K11u = EI\begin{bmatrix} 2\times\frac{12}{27} & \frac{6}{9} & \frac{6}{9} & -2\times\frac{12}{27} & \frac{6}{9} & \frac{6}{9} & 0 & 0 \\ \frac{6}{9} & \frac{4}{3}+\frac{12}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{6}{9} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{9} & \frac{6}{5} & \frac{12}{5}+\frac{4}{3} & -\frac{6}{9} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -2\times\frac{12}{27} & -\frac{6}{9} & -\frac{6}{9} & 2\times\frac{12}{27}+2\times\frac{12}{64} & \frac{6}{16}-\frac{6}{9} & \frac{6}{16}-\frac{6}{9} & \frac{6}{16} & \frac{6}{16} \\ \frac{6}{9} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{6}{16}-\frac{6}{9} & \frac{4}{3}+1+\frac{12}{5} & \frac{6}{5} & \frac{2}{4} & 0 \\ \frac{6}{9} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{6}{16}-\frac{6}{9} & \frac{6}{5} & \frac{4}{3}+\frac{12}{5}+1 & 0 & \frac{2}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6}{16} & \frac{2}{4} & 0 & \frac{4}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6}{16} & 0 & \frac{2}{4} & 0 & \frac{4}{4} \end{bmatrix}$$

$$K\ 11\ u = EI\cdot\begin{bmatrix} \frac{8}{9} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{8}{9} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{56}{15} & \frac{6}{5} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{6}{5} & \frac{56}{15} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{8}{9} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{91}{72} & -\frac{7}{24} & -\frac{7}{24} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{7}{24} & \frac{71}{15} & \frac{6}{5} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{7}{24} & \frac{6}{5} & \frac{71}{15} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculo de los desplazamientos:

$$Du = K11u^{-1} \times Fu$$

$$Du = \begin{bmatrix} 377.465 \\ -4.278 \\ -4.142 \\ 330.382 \\ -16.296 \\ -15.562 \\ -115.745 \\ -116.112 \end{bmatrix}$$

Calculo de los momentos:

Barra # 1

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = EI\begin{bmatrix} \frac{4}{4} & \frac{2}{4} \\ \frac{2}{4} & \frac{4}{4} \end{bmatrix} \times \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} -115.745 + 0 - \frac{-330.382}{4} \\ -16.296 + 0 - \frac{-330.382}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -33.1495 \\ 66.2995 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 0.00025 \\ 49.725 \end{matrix}$$

Barra # 2

$$\begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = EI\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \times \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} -16.296 + \frac{-330.382}{3} - \frac{-377.465}{3} \\ -4.278 + \frac{-330.382}{3} - \frac{-377.465}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0.6017 \\ 11.4163 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 6.81 \\ 14.82 \end{matrix}$$

Barra # 3

$$\begin{bmatrix} M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.417 \\ -0.417 \end{bmatrix} + EI\begin{bmatrix} \frac{12}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{12}{5} \end{bmatrix} \times \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} -4.278 + 0 - 0 \\ -4.142 + 0 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.417 \\ -0.417 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.4 & 1.2 \\ 1.2 & 2.4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0.6017 \\ 11.4163 \end{bmatrix} =$$

Barra # 4

$$\begin{bmatrix} M_5 \\ M_4 \end{bmatrix} = EI\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \times \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} -15.562 + \frac{-330.382}{3} - \frac{-377.465}{3} \\ -4.142 + \frac{-330.382}{3} - \frac{-377.465}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.1323 \\ 11.5523 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 7.88 \\ 15.49 \end{matrix}$$

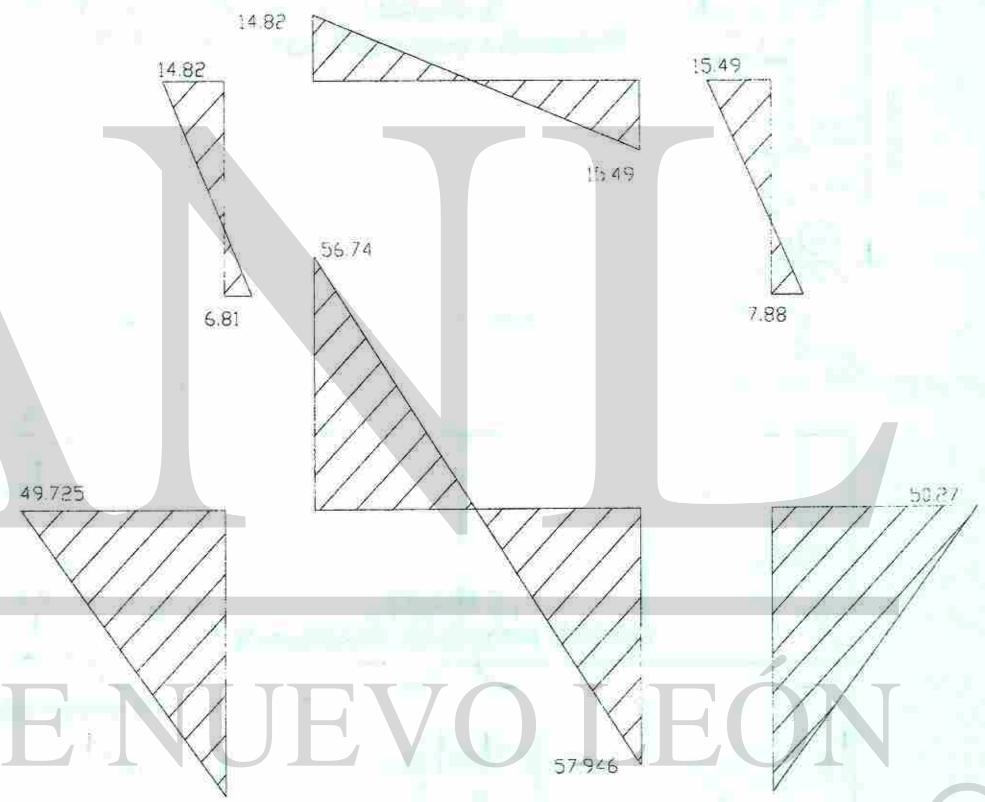
Barra # 5

$$\begin{bmatrix} M_2 \\ M_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.042 \\ -1.042 \end{bmatrix} + EI\begin{bmatrix} \frac{12}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{12}{5} \end{bmatrix} \times \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} -16.296 + 0 - 0 \\ -15.562 + 0 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.042 \\ -1.042 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.4 & 1.2 \\ 1.2 & 2.4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -16.296 \\ -15.562 \end{bmatrix} = \begin{matrix} -56.74 \\ -57.946 \end{matrix}$$

Barra # 6

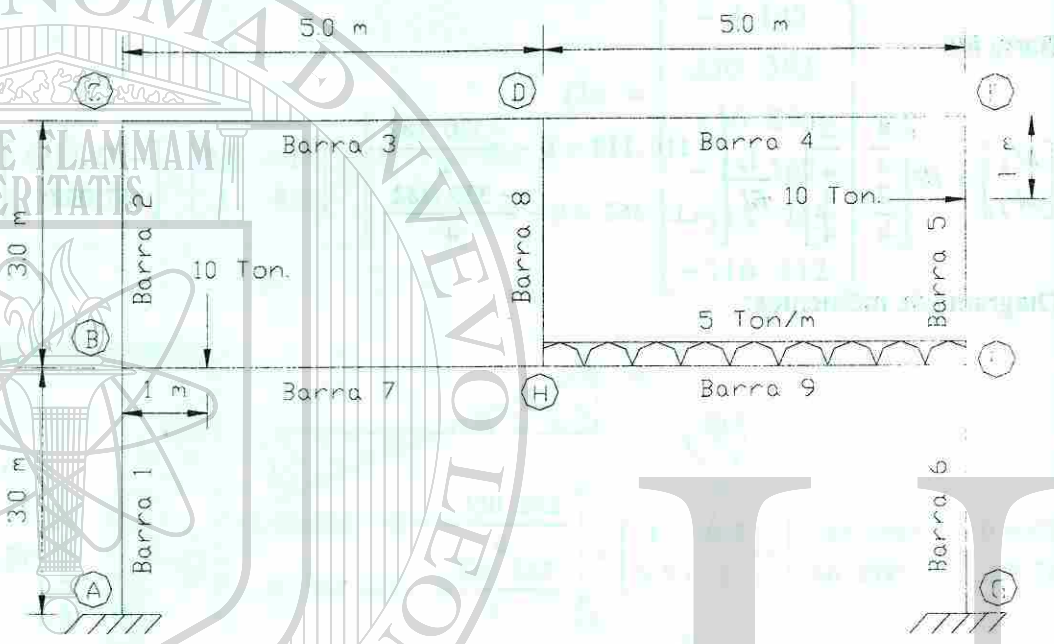
$$\begin{bmatrix} M_6 \\ M_5 \end{bmatrix} = EI\begin{bmatrix} \frac{4}{4} & \frac{2}{4} \\ \frac{2}{4} & \frac{4}{4} \end{bmatrix} \times \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} -116.112 + 0 - \frac{-330.382}{4} \\ -15.562 + 0 - \frac{-330.382}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -33.5165 \\ 67.0335 \end{bmatrix} = \begin{matrix} -0.00025 \\ 50.27 \end{matrix}$$

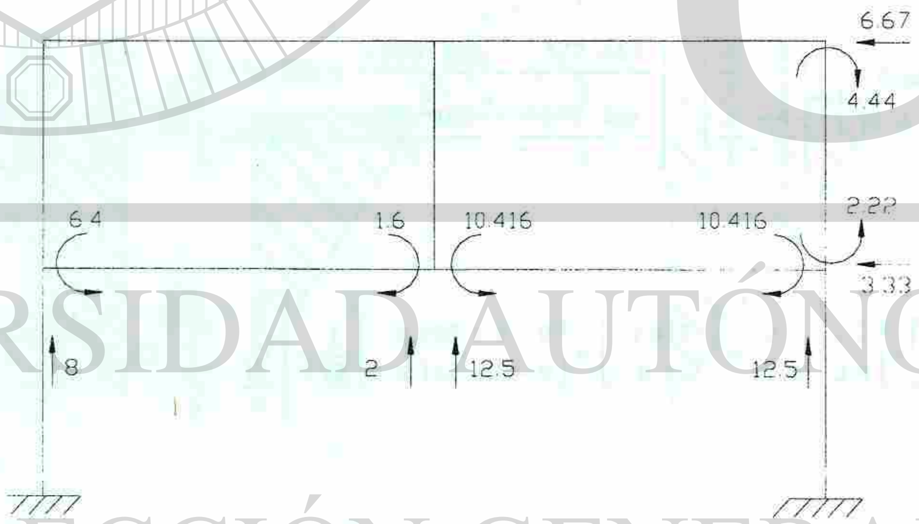
Diagrama de momentos:



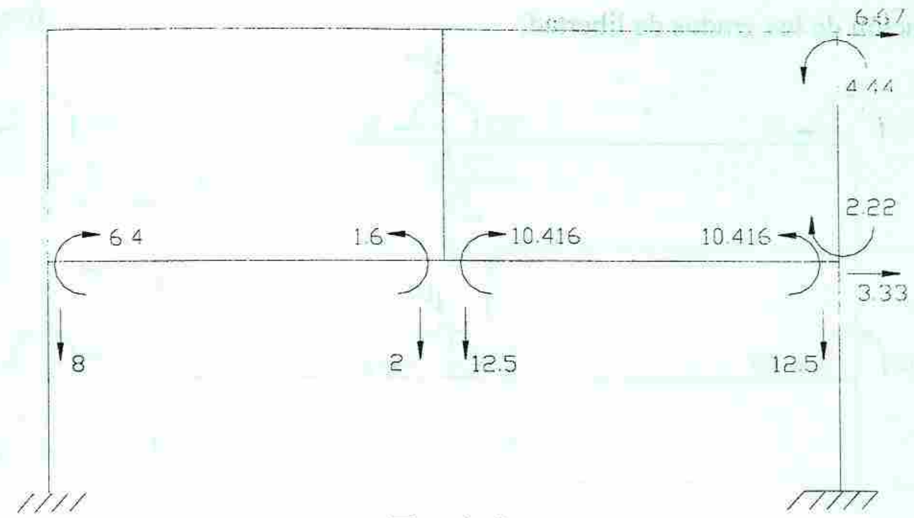
4.2.2.5. EJEMPLO ADICIONAL: Marco Con Grado De Libertad Vertical

Analizar y dibujar el diagrama de momentos para el marco:

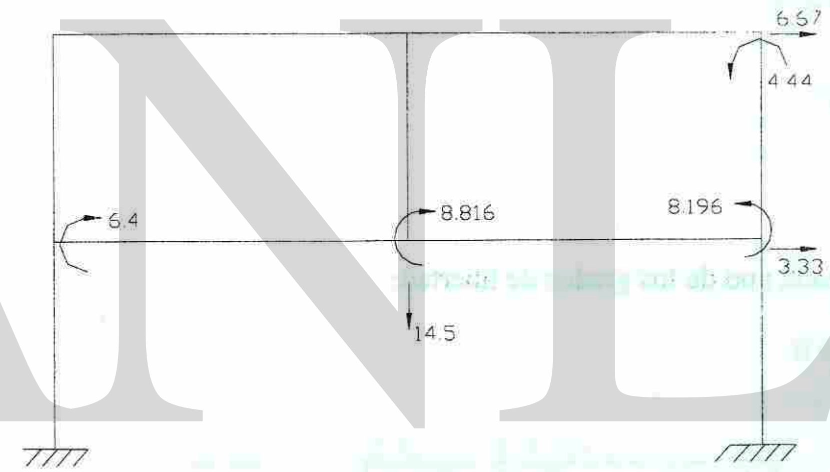




Estado 1
"La Estructura Restringida"



Estado 2:
"La Estructura Liberada"

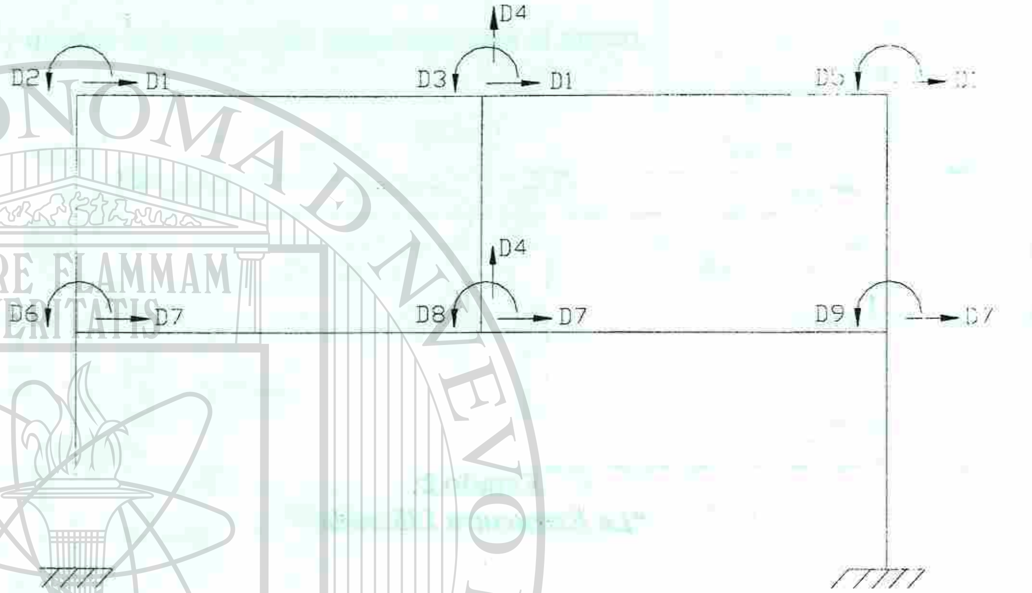


Estado 2
Resultantes de fuerzas ficticias

Formación del vector Fu:

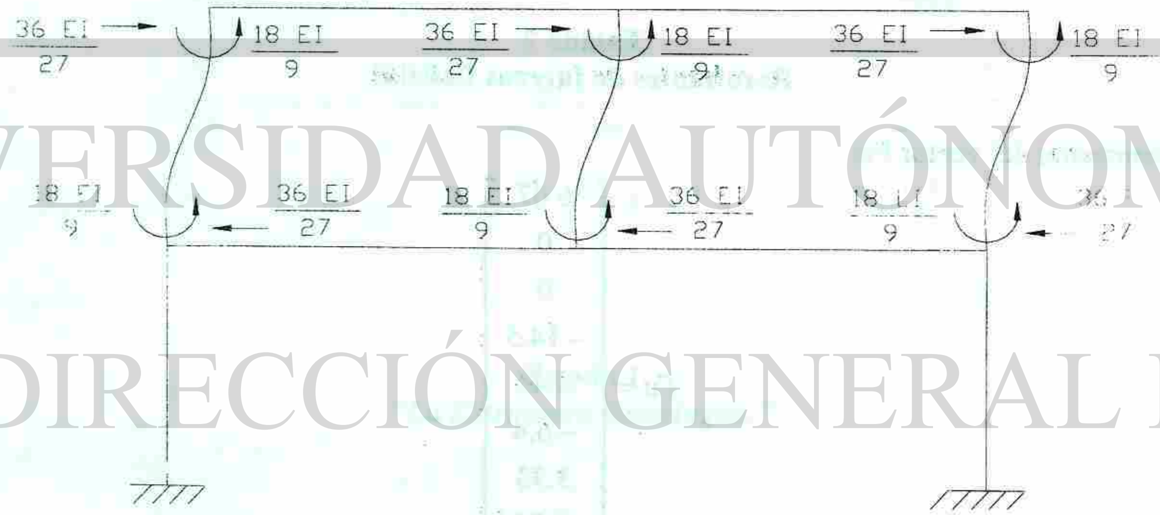
$$Fu = \begin{bmatrix} 6.67 \\ 0 \\ 0 \\ -14.5 \\ 4.44 \\ -6.4 \\ 3.33 \\ -8.816 \\ 8.196 \end{bmatrix}$$

Identificación de los grados de libertad:

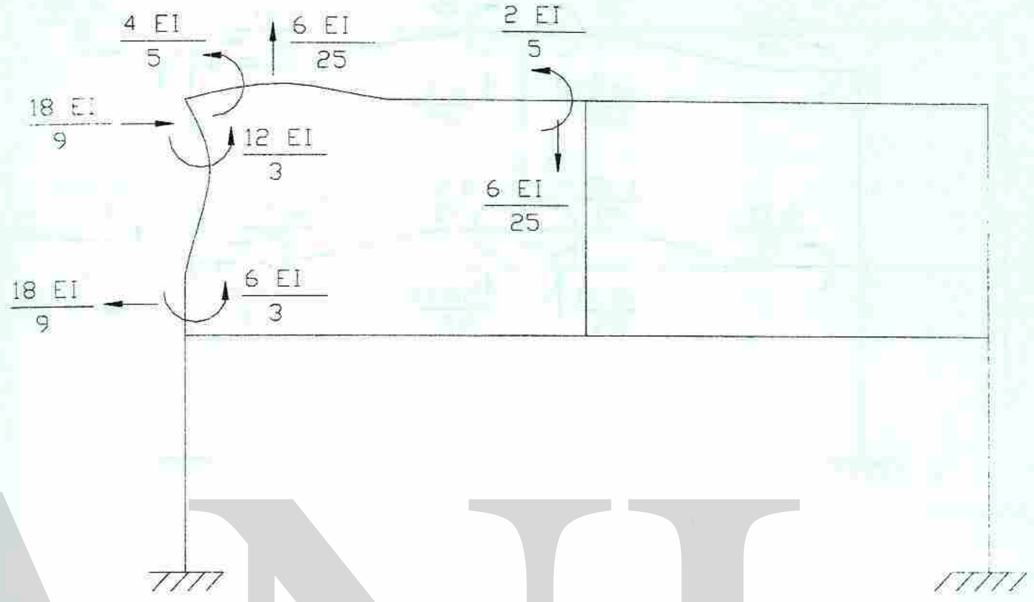


Liberando cada uno de los grados de libertad:

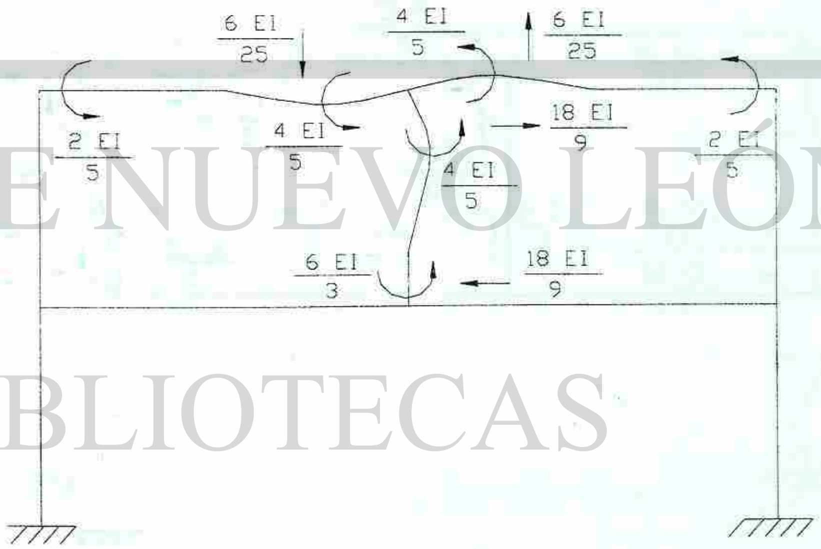
$D_1 = 1$; $D_n = 0$



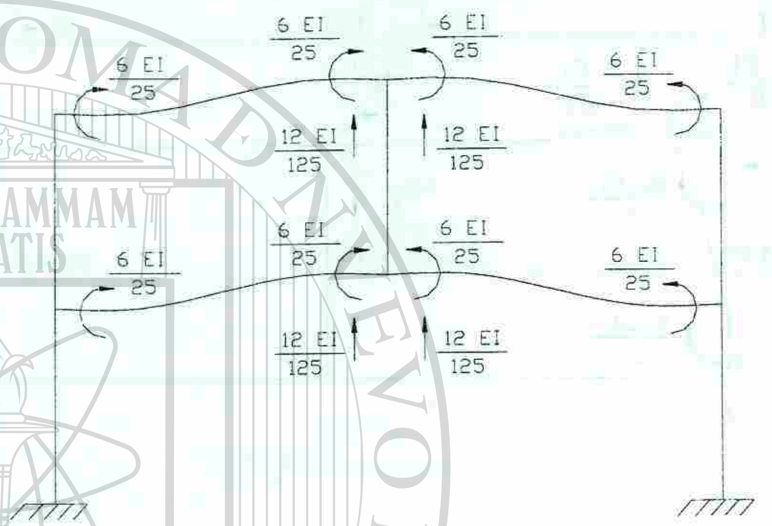
$D_2 = 1$; $D_n = 0$



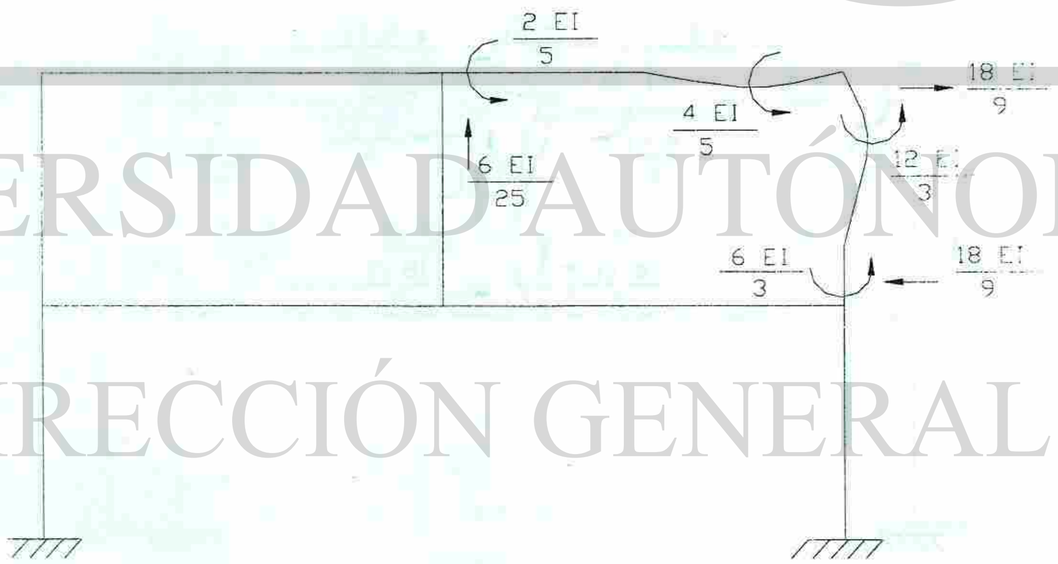
$D_3 = 1$, $D_n = 0$



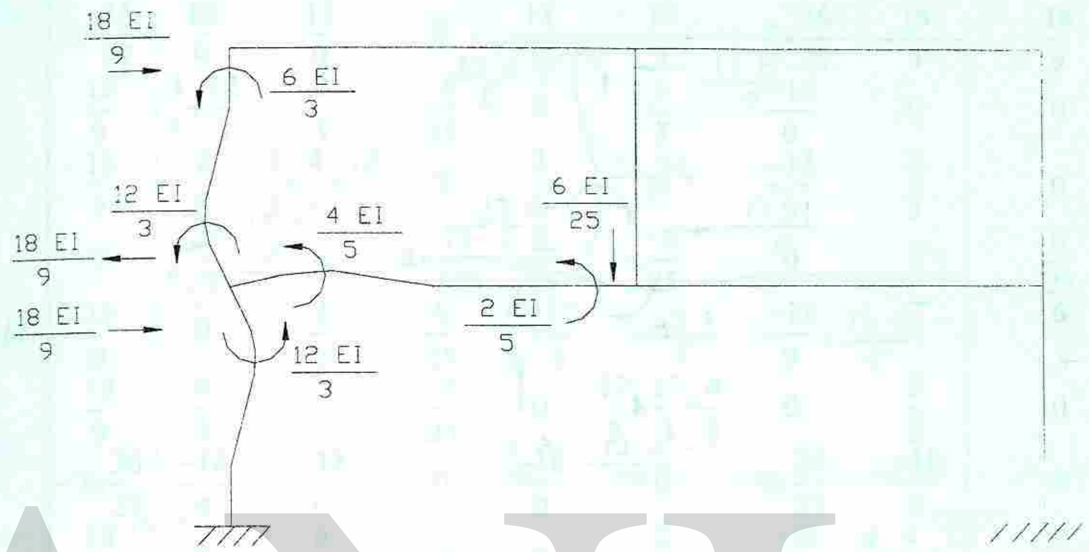
$D_4 = 1, D_n = 0$



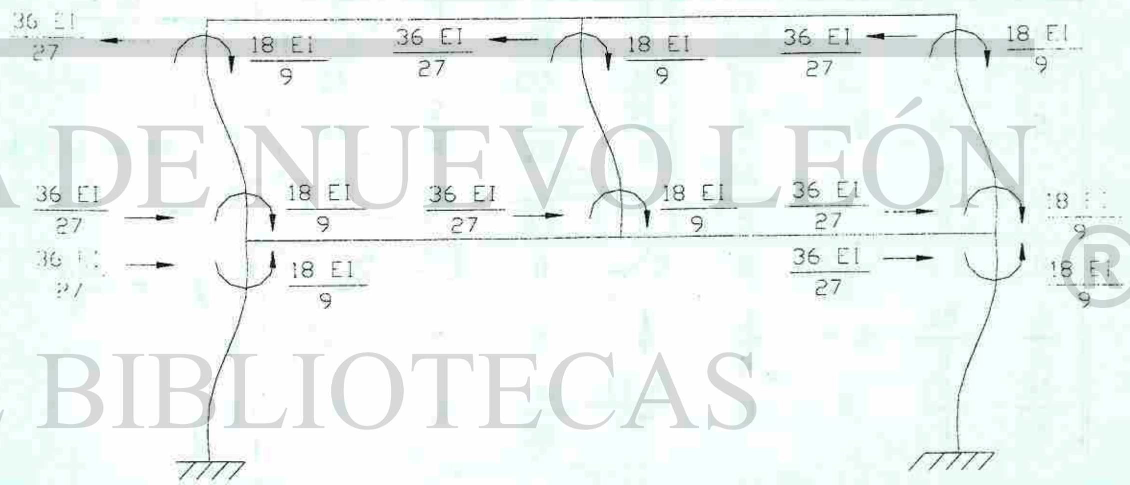
$D_5 = 1, D_n = 0$



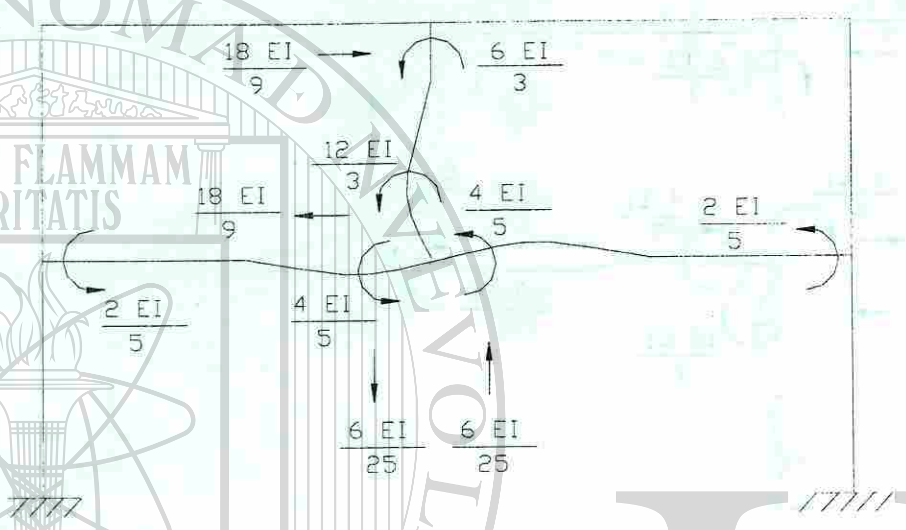
$D_6 = 1, D_n = 0$



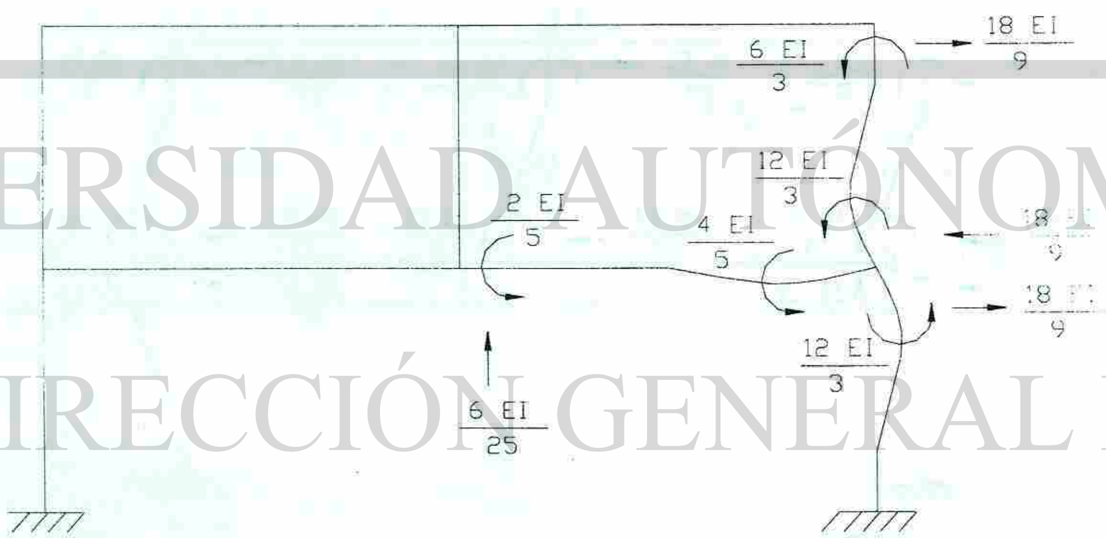
$D_7 = 1, D_n = 0$



$D_8 = 1, D_n = 0$



$D_9 = 1, D_n = 0$



Formación de la matriz K11u:

$$K11u = EI \times \begin{bmatrix} 3\times\frac{36}{27} & \frac{18}{9} & \frac{18}{9} & 0 & \frac{18}{9} & \frac{18}{9} & -3\times\frac{36}{27} & \frac{18}{9} & \frac{18}{9} \\ \frac{18}{9} & \frac{4}{5}+\frac{12}{3} & \frac{2}{5} & \frac{-6}{25} & 0 & \frac{6}{3} & \frac{-18}{9} & 0 & 0 \\ \frac{18}{9} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{12}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{-18}{9} & \frac{6}{3} & 0 \\ 0 & \frac{-6}{25} & 0 & 4\times\frac{12}{125} & \frac{6}{25} & \frac{-6}{25} & 0 & 0 & \frac{6}{25} \\ \frac{18}{9} & 0 & \frac{2}{5} & \frac{6}{25} & \frac{4}{5}+\frac{12}{3} & 0 & \frac{-18}{9} & 0 & \frac{6}{3} \\ \frac{18}{9} & \frac{6}{3} & 0 & \frac{-6}{25} & 0 & \frac{12}{3}+\frac{12}{3}+\frac{4}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ -3\times\frac{36}{27} & \frac{-18}{9} & \frac{-18}{9} & 0 & \frac{-18}{9} & 0 & 5\times\frac{36}{27} & \frac{-18}{9} & 0 \\ \frac{18}{9} & 0 & \frac{6}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{-18}{9} & \frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{12}{3} & \frac{2}{5} \\ \frac{18}{9} & 0 & 0 & \frac{6}{25} & \frac{6}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{12}{3}+\frac{12}{3}+\frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$K\,11\,u = EI \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & -4 & 2 & 2 \\ 2 & \frac{24}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-6}{25} & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{2}{5} & \frac{28}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{-6}{25} & 0 & \frac{48}{125} & \frac{6}{25} & \frac{-6}{25} & 0 & 0 & \frac{6}{25} \\ 2 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{6}{25} & \frac{24}{5} & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & \frac{-6}{25} & 0 & \frac{44}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ -4 & -2 & -2 & 0 & -2 & 0 & \frac{20}{3} & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & -2 & \frac{28}{5} & \frac{2}{5} \\ 2 & 0 & 0 & \frac{6}{25} & 2 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{44}{5} \end{bmatrix}$$

Calculo de los desplazamientos:

$$[Du] = [K11u]^{-1} \times [Fu]$$

$$Du=\frac{1}{EI}\times\begin{bmatrix}20.485\\-4.274\\-2.088\\-42.092\\-0.423\\-5.368\\9.493\\-4.207\\-2.289\end{bmatrix}$$

Calculo de los momentos en cada barra:

Barra # 1:

$$\begin{bmatrix}M_A\\M_B\end{bmatrix}=EI\begin{bmatrix}\frac{4\times3}{3}&\frac{2\times3}{3}\\\frac{2\times3}{3}&\frac{4\times3}{3}\end{bmatrix}\times\frac{1}{EI}\begin{bmatrix}0+0-\frac{-9.493}{3}\\-5.368+0-\frac{-9.493}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&2\\2&4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3.16\\-2.203\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8.234\\-2.492\end{bmatrix}$$

Barra # 2:

$$\begin{bmatrix}M_B\\M_C\end{bmatrix}=EI\begin{bmatrix}\frac{12}{3}&\frac{6}{3}\\\frac{6}{3}&\frac{12}{3}\end{bmatrix}\times\frac{1}{EI}\begin{bmatrix}-5.368+\frac{-9.493}{3}-\frac{-20.485}{3}\\-4.274+\frac{-9.493}{3}-\frac{-20.485}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&2\\2&4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1.704\\-0.61\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8.036\\-5.848\end{bmatrix}$$

Barra # 3:

$$\begin{bmatrix}M_C\\M_D\end{bmatrix}=EI\begin{bmatrix}\frac{4}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{2}{5}&\frac{4}{5}\end{bmatrix}\times\frac{1}{EI}\begin{bmatrix}-4.274+0-\frac{-42.092}{5}\\-2.088+0-\frac{-42.092}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{2}{5}&\frac{4}{5}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4.144\\6.33\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5.847\\6.722\end{bmatrix}$$

Barra # 4:

$$\begin{bmatrix}M_D\\M_E\end{bmatrix}=EI\begin{bmatrix}\frac{4}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{2}{5}&\frac{4}{5}\end{bmatrix}\times\frac{1}{EI}\begin{bmatrix}-2.088+\frac{-42.092}{5}-0\\-0.423+\frac{-42.092}{5}-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{2}{5}&\frac{4}{5}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-10.506\\-8.841\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-11.941\\-11.275\end{bmatrix}$$

Barra # 5:

$$\begin{bmatrix}M_F\\M_E\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.22\\-4.44\end{bmatrix}+EI\begin{bmatrix}\frac{12}{3}&\frac{6}{3}\\\frac{6}{3}&\frac{12}{3}\end{bmatrix}\times\frac{1}{EI}\begin{bmatrix}-2.289+\frac{-9.493}{3}-\frac{-20.485}{3}\\-0.423+\frac{-9.493}{3}-\frac{-20.485}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.22\\-4.44\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&2\\2&4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1.704\\-0.61\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8.036\\-5.848\end{bmatrix}$$

Barra # 6:

$$\begin{bmatrix}M_G\\M_F\end{bmatrix}=EI\begin{bmatrix}\frac{12}{3}&\frac{6}{3}\\\frac{6}{3}&\frac{12}{3}\end{bmatrix}\times\frac{1}{EI}\begin{bmatrix}0+0-\frac{-9.493}{3}\\-2.289+0-\frac{-9.493}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&2\\2&4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3.164\\0.875\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14.406\\9.828\end{bmatrix}$$

Barra # 7:

$$\begin{bmatrix}M_B\\M_H\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6.4\\-1.6\end{bmatrix}+EI\begin{bmatrix}\frac{4}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{2}{5}&\frac{4}{5}\end{bmatrix}\times\frac{1}{EI}\begin{bmatrix}-5.368+0-\frac{-42.092}{5}\\-4.207+0-\frac{-42.092}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6.4\\-1.6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{4}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{2}{5}&\frac{4}{5}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3.05\\4.211\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10.52\\2.98\end{bmatrix}$$

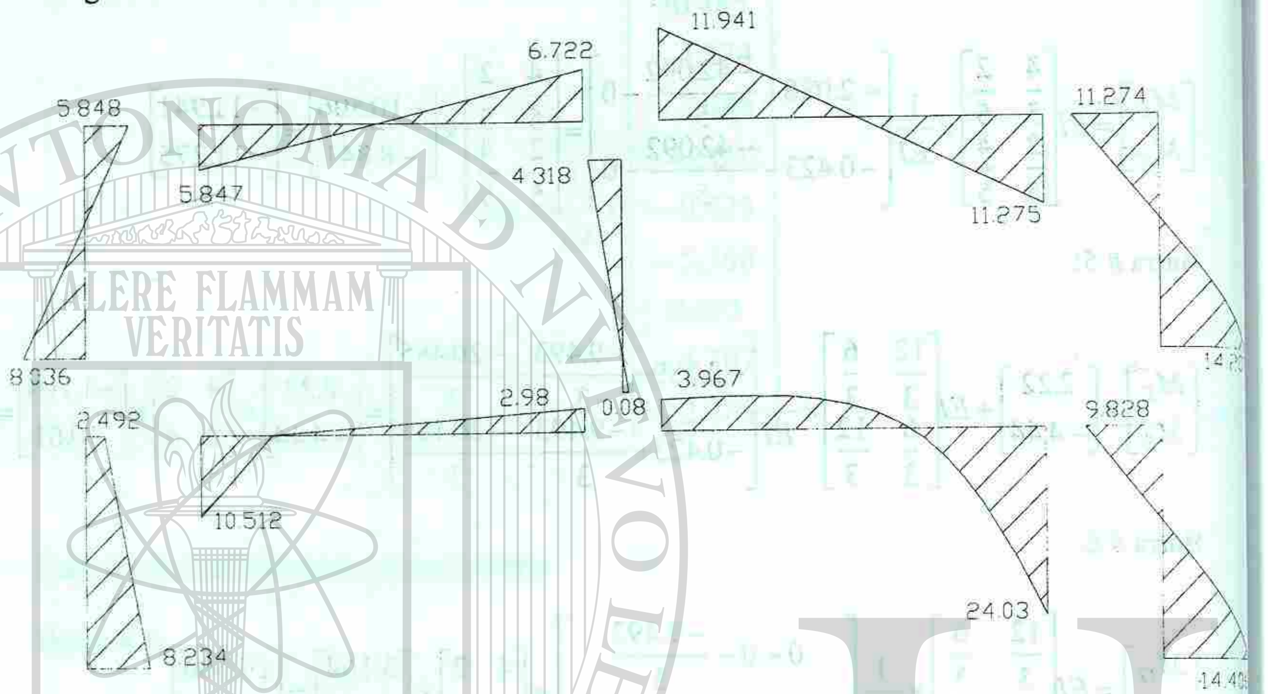
Barra # 8:

$$\begin{bmatrix}M_H\\M_D\end{bmatrix}=EI\begin{bmatrix}\frac{12}{3}&\frac{6}{3}\\\frac{6}{3}&\frac{12}{3}\end{bmatrix}\times\frac{1}{EI}\begin{bmatrix}-4.207+\frac{-9.493}{3}-\frac{-20.485}{3}\\-2.088+\frac{-9.493}{3}-\frac{-20.485}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&2\\2&4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-0.693\\1.426\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.08\\4.318\end{bmatrix}$$

Barra # 9:

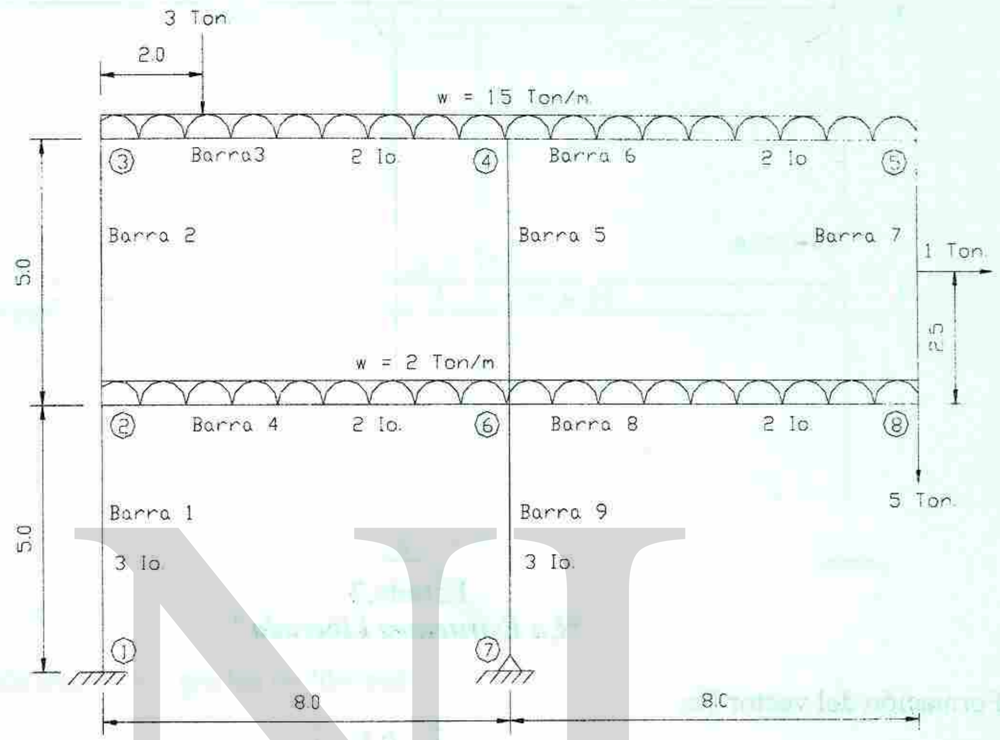
$$\begin{bmatrix}M_H\\M_F\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10.416\\-10.416\end{bmatrix}+EI\begin{bmatrix}\frac{4}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{2}{5}&\frac{4}{5}\end{bmatrix}\times\frac{1}{EI}\begin{bmatrix}-4.207+\frac{-42.092}{5}-0\\-2.289+\frac{-42.092}{5}-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10.416\\-10.416\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{4}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{2}{5}&\frac{4}{5}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-12.625\\-10.707\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3.967\\-24.03\end{bmatrix}$$

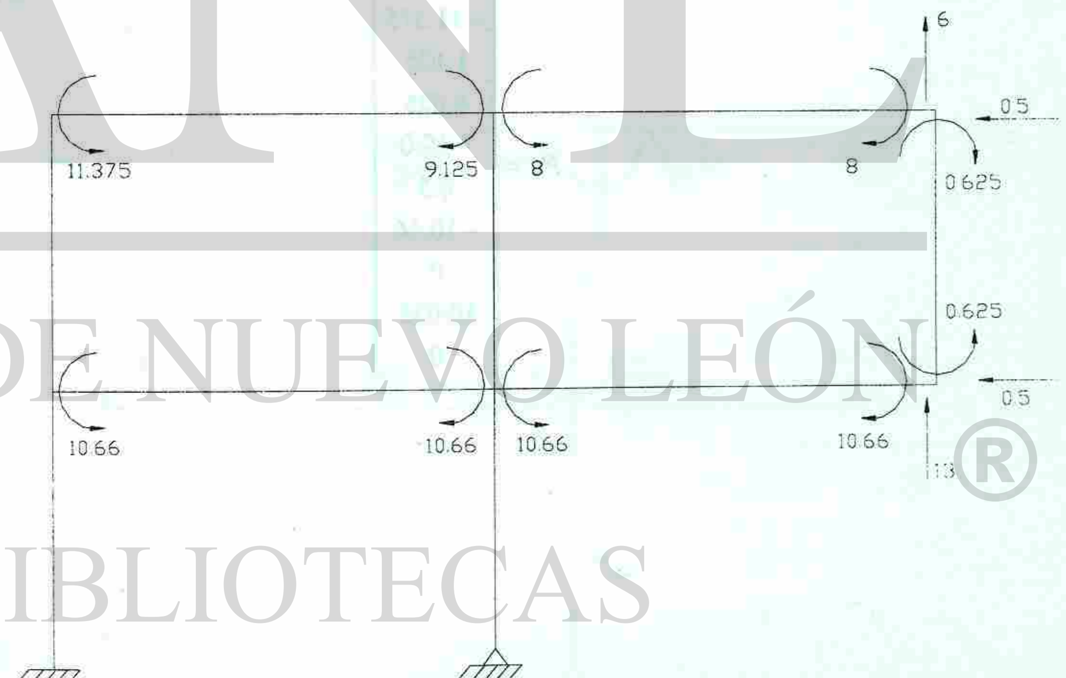
Diagrama de momentos:



4.2.2.6. EJEMPLO ADICIONAL: Marco Con "Volado"

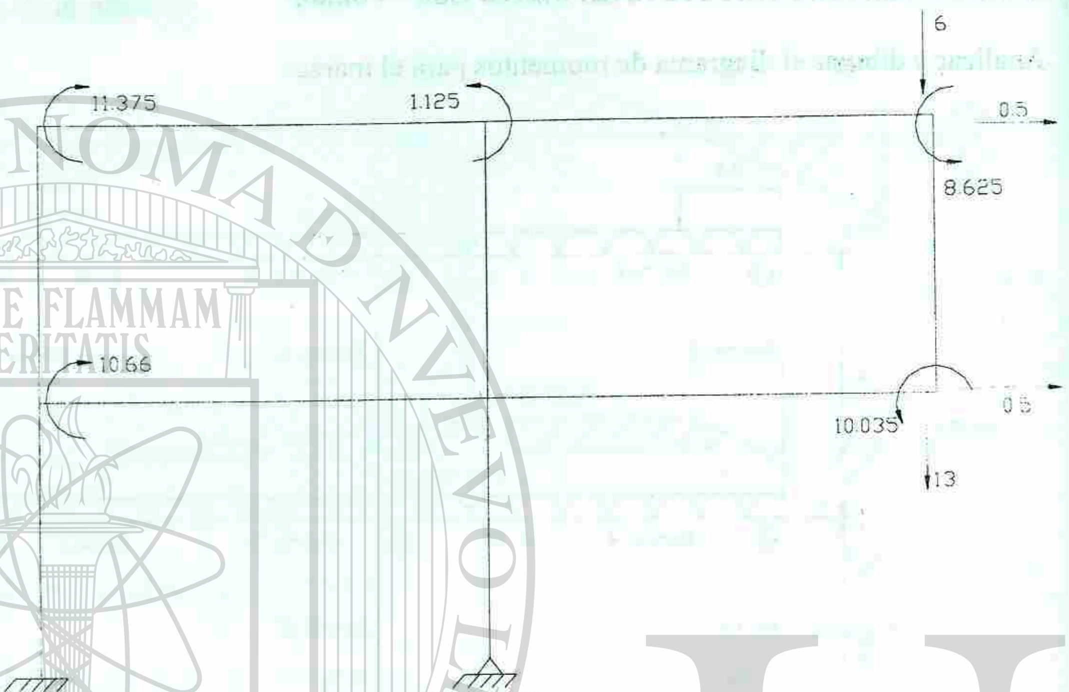
Analizar y dibujar el diagrama de momentos para el marco:





Estado 1

"La Estructura Restringida"

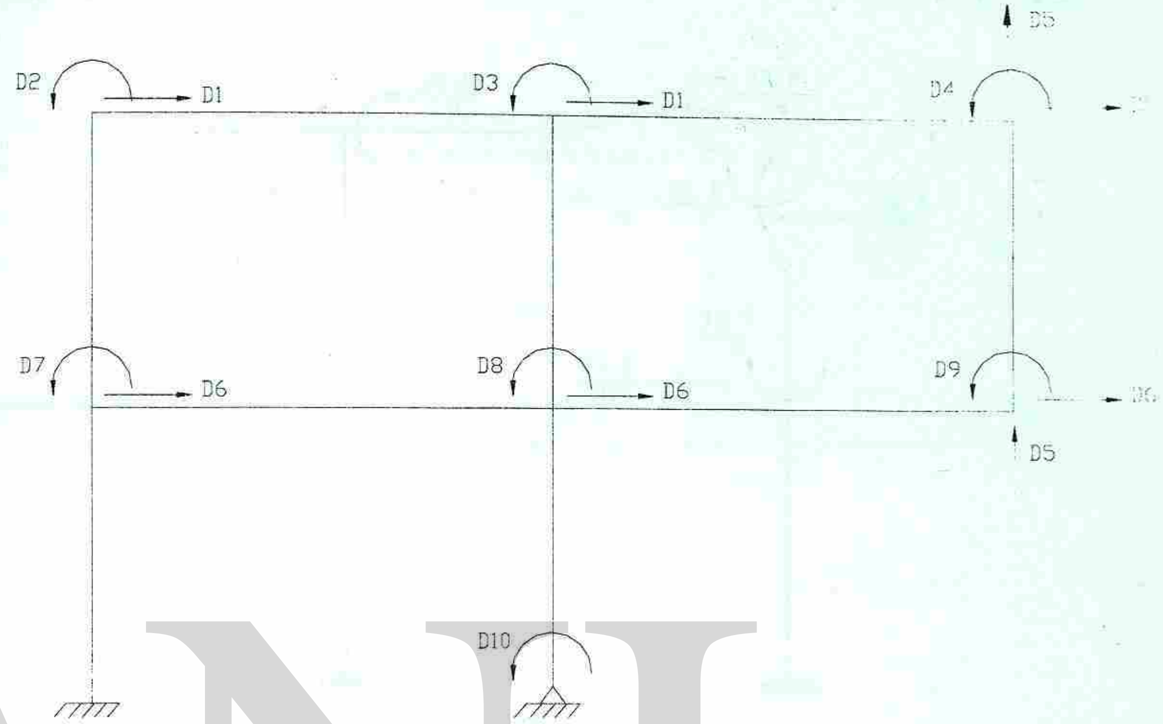


Estado 2
"La Estructura Liberada"

Formación del vector Fu:

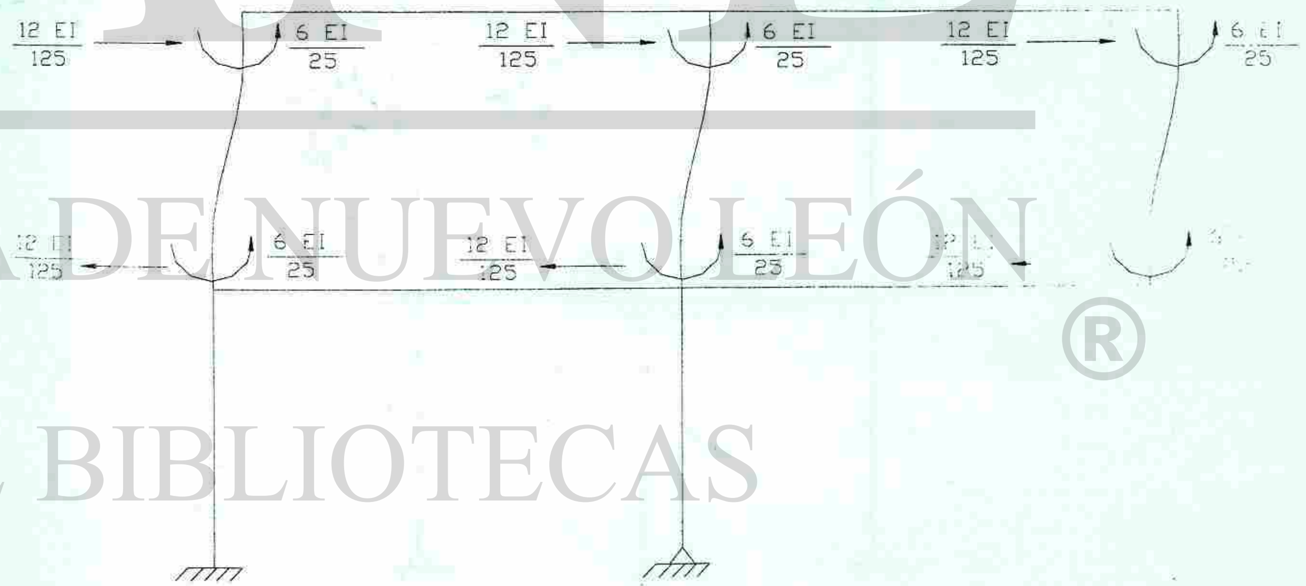
$$Fu = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -11.375 \\ 1.125 \\ 8.625 \\ -19.0 \\ 0.5 \\ -10.66 \\ 0 \\ 10.035 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Identificacion de los grados de libertad:

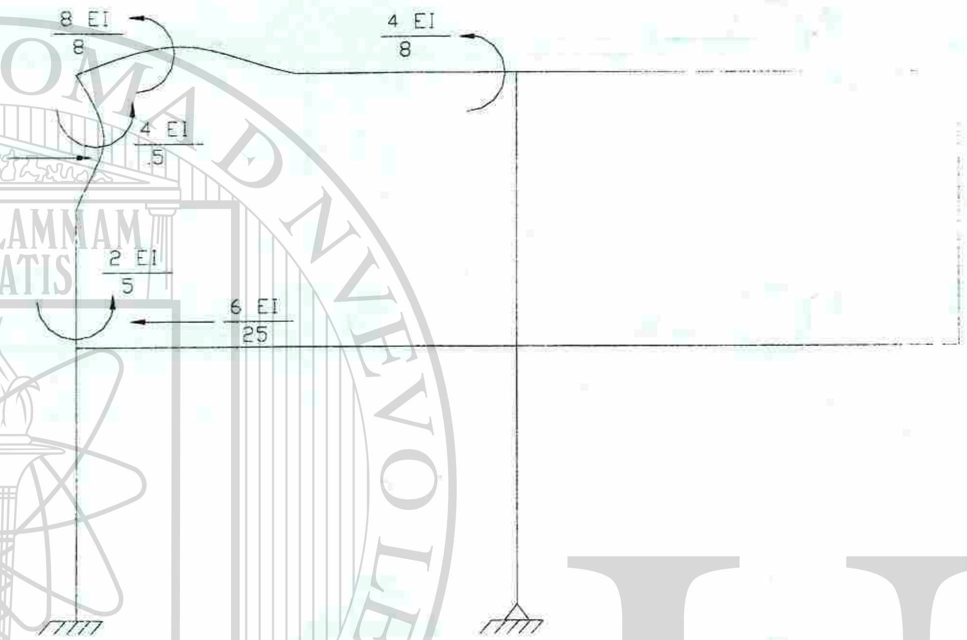


Liberando cada uno de los grados de libertad:

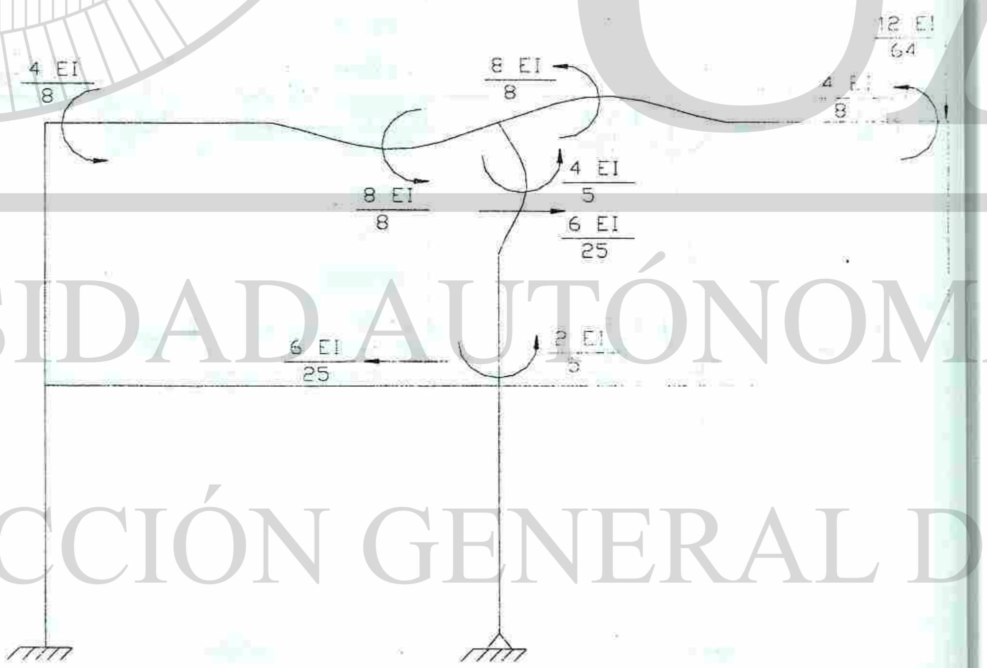
$D_1 = 1, D_n = 0$



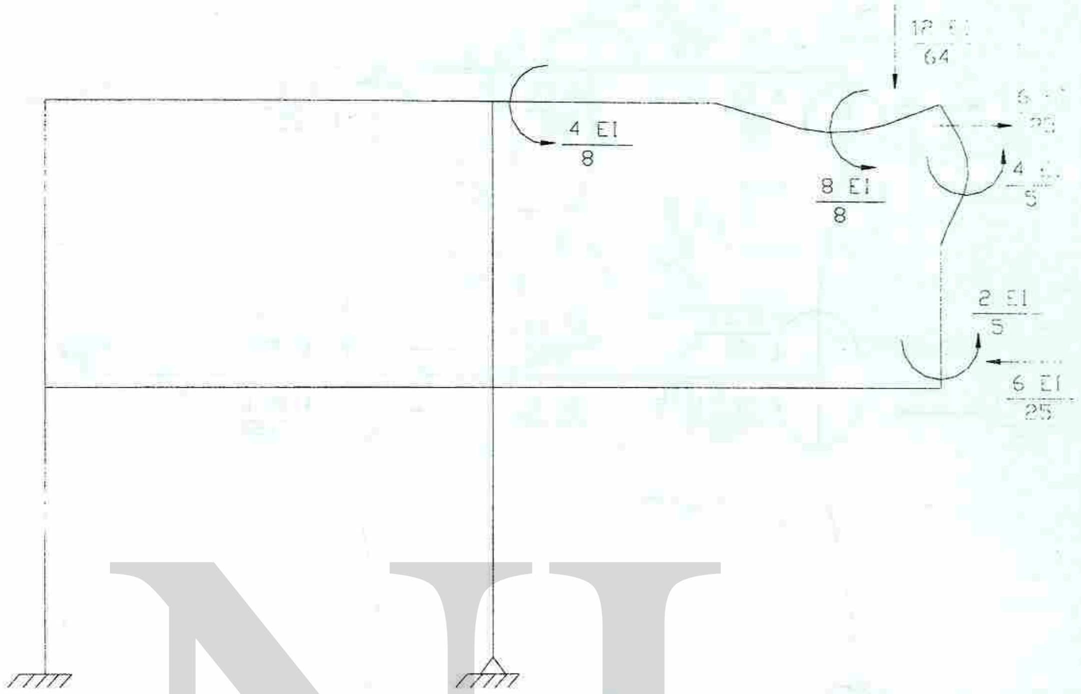
$D_2 = 1, D_n = 0$



$D_3 = 1, D_n = 0$

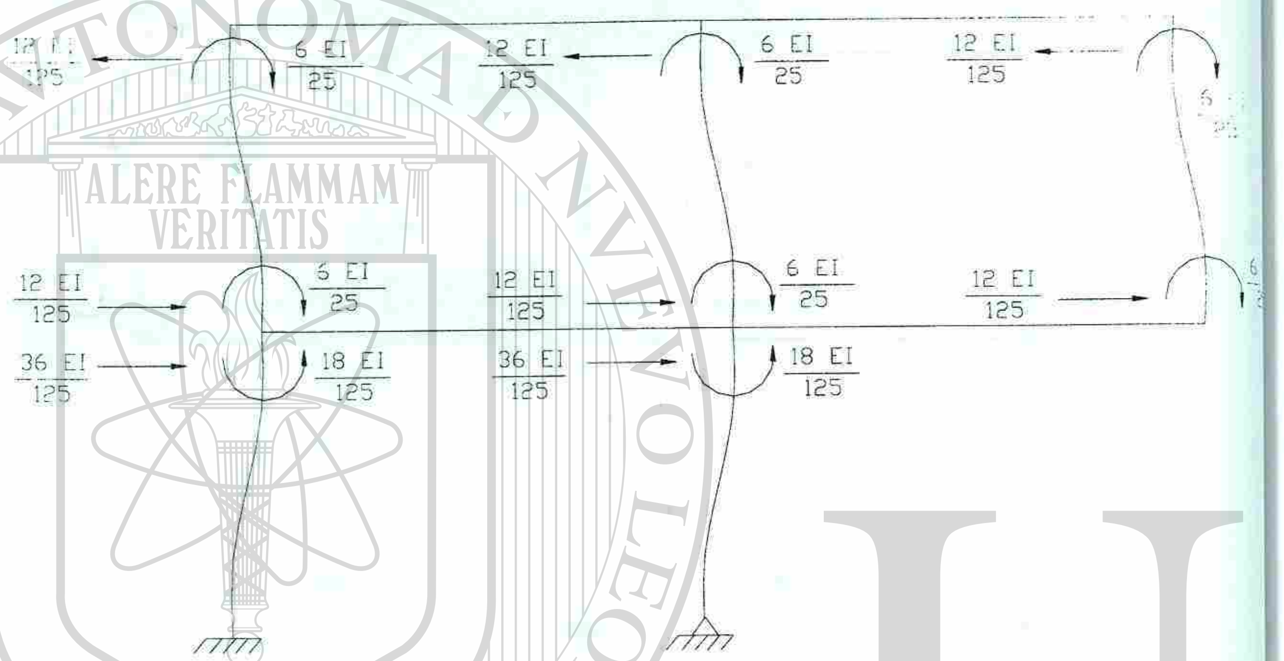


$D_4 = 1, D_n = 0.$

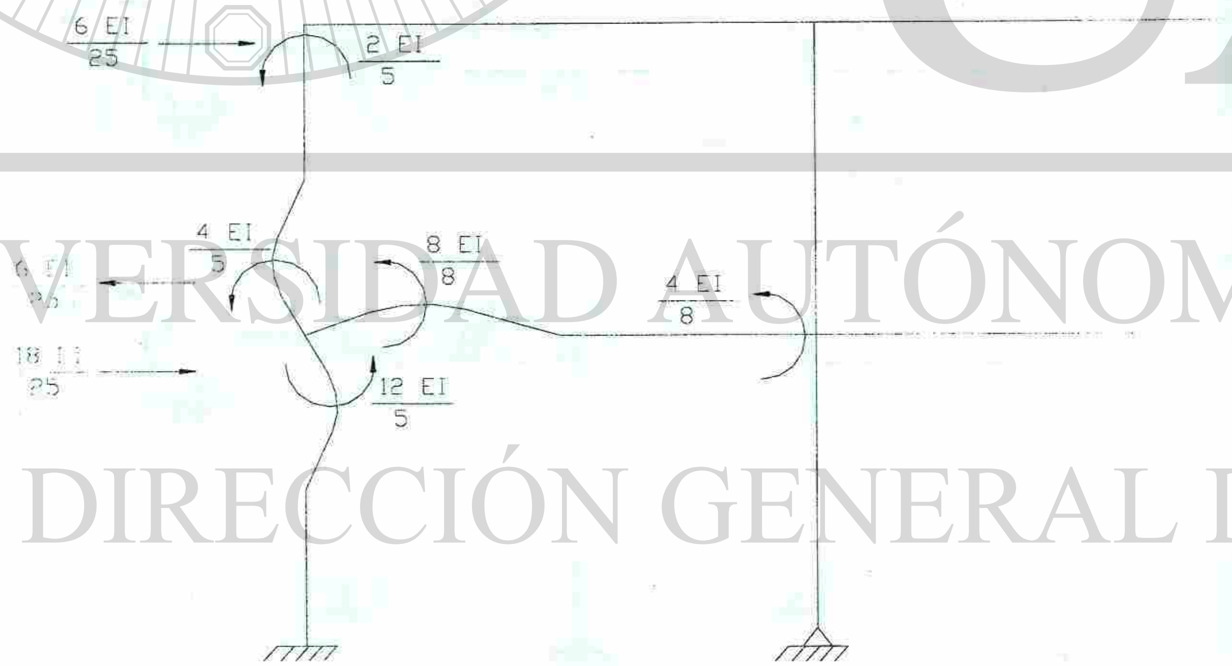


$D_5 = 1, D_n=0$

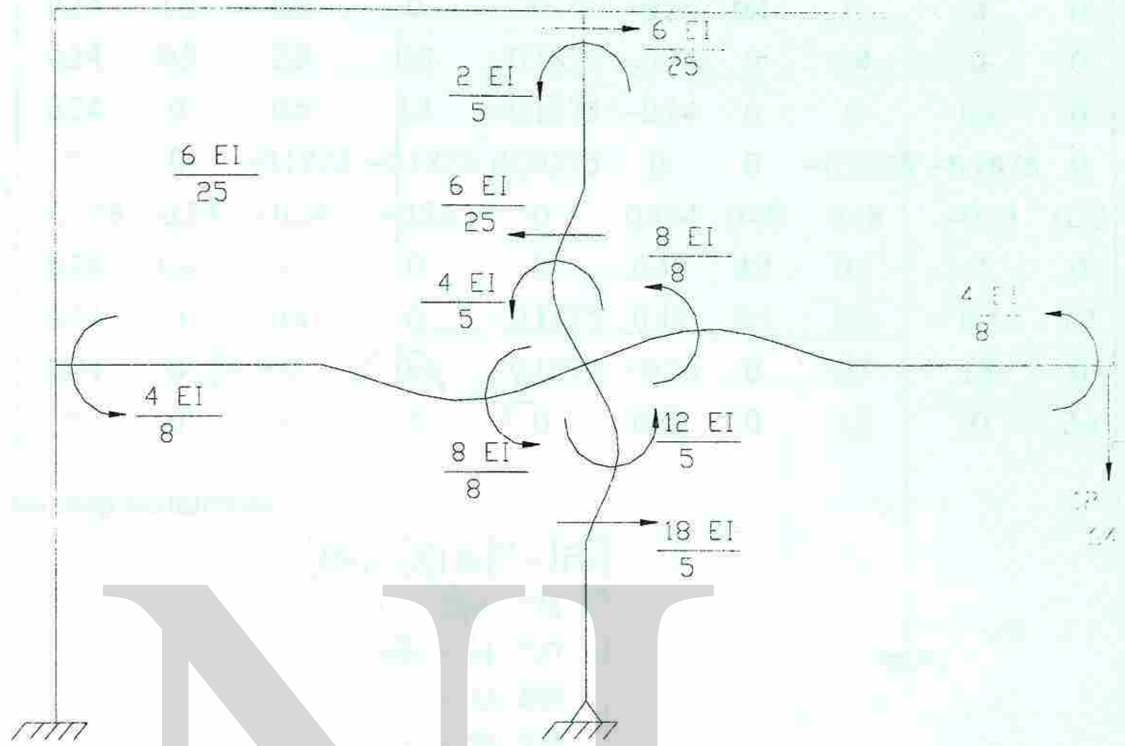
$D_6 = 1, D_n = 0$



$D_7 = 1, D_n = 0$

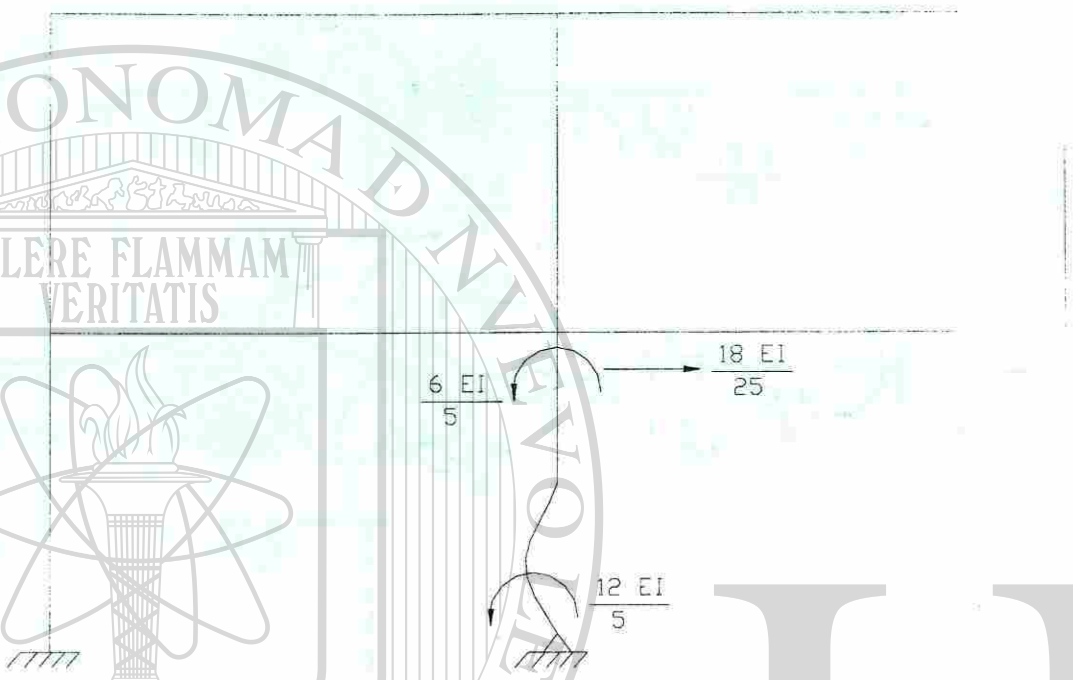


$D_8 = 1, D_n = 0$



$D_9 = 1, D_n = 0$

$D_{10} = 1, D_n = 0$



Formacion de la matriz K11u:

$$K11u = EI \times \begin{bmatrix} 3\times\frac{12}{125} & \frac{6}{25} & \frac{6}{25} & \frac{6}{25} & 0 & -3\times\frac{12}{125} & \frac{6}{25} & \frac{6}{25} & \frac{6}{25} \\ \frac{6}{25} & 1+\frac{4}{5} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{6}{25} & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ \frac{6}{25} & \frac{1}{2} & 1+1+\frac{4}{5} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{16} & -\frac{6}{25} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{6}{25} & 0 & \frac{1}{2} & 1+\frac{4}{5} & -\frac{3}{16} & -\frac{6}{25} & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{16} & -\frac{3}{16} & 2\times\frac{3}{64} & 0 & 0 & -\frac{3}{16} & -\frac{3}{16} \\ -3\times\frac{12}{125} & -\frac{6}{25} & -\frac{6}{25} & -\frac{6}{25} & 0 & 3\times\frac{12}{125}+2\times\frac{36}{125} & \frac{12}{125} & \frac{18}{25}-\frac{6}{25} & -\frac{6}{25} \\ \frac{6}{25} & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{125} & \frac{4}{5}+\frac{12}{5}+1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{6}{25} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & -\frac{3}{16} & \frac{18}{25}-\frac{6}{25} & \frac{1}{2} & \frac{4}{5}+\frac{12}{5}+1+1 & \frac{1}{2} \\ \frac{6}{25} & 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{16} & -\frac{6}{25} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{4}{5}+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{18}{25} & 0 & \frac{6}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

$$K11u = EI \times \begin{bmatrix} 0.288 & 0.24 & 0.24 & 0.24 & 0 & -0.288 & 0.24 & 0.24 & 0.24 & 0 \\ 0.24 & 1.8 & 0.5 & 0 & 0 & -0.24 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0.24 & 0.5 & 2.8 & 0.5 & -0.1875 & -0.24 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.24 & 0 & 0.5 & 1.8 & -0.1875 & -0.24 & 0 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1875 & -0.1875 & 0.09375 & 0 & 0 & -0.1875 & -0.1875 & 0 \\ -0.288 & -0.24 & -0.24 & -0.24 & 0 & 0.864 & 0.48 & 0.48 & -0.24 & 0.72 \\ 0.24 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.48 & 4.2 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.24 & 0 & 0.4 & 0 & -0.1875 & 0.48 & 0.5 & 5.2 & 0.5 & 1.2 \\ 0.24 & 0 & 0 & 0.4 & -0.1875 & -0.24 & 0 & 0.5 & 1.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.72 & 0 & 1.2 & 0 & 2.4 \end{bmatrix}$$

Calculo de los desplazamientos:

$$[Du] = [K11u]^{-1} \times [Fu]$$

$$Du = \begin{bmatrix} 229.778 \\ -14.757 \\ -33.869 \\ -50.936 \\ -527.709 \\ 64.686 \\ -18.75 \\ -24.408 \\ -53.308 \\ -7.207 \end{bmatrix}$$

Calculo de los momentos en cada barra:

Barra # 1:

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4E\times 3I}{5} & \frac{2E\times 3I}{5} \\ \frac{2E\times 3I}{5} & \frac{4E\times 3I}{5} \end{bmatrix} \times \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 0+0-\frac{-64.686}{5} \\ -18.75+0-\frac{-64.686}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4 & 1.2 \\ 1.2 & 2.4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 12.9372 \\ -5.8128 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 24.073 \\ 1.57 \end{matrix}$$

Barra # 2:

$$\begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \times \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} -18.75+\frac{-64.686}{5}-\frac{-229.778}{5} \\ -4.757+\frac{-64.686}{5}-\frac{-229.778}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 14.2684 \\ 18.2614 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 18.72 \\ 20.32 \end{matrix}$$

Barra # 3:

$$\begin{bmatrix} M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.375 \\ -9.125 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4E\times 2I}{8} & \frac{2E\times 2I}{8} \\ \frac{2E\times 2I}{8} & \frac{4E\times 2I}{8} \end{bmatrix} \times \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} -14.757+0-0 \\ -33.869+0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.375 \\ -9.125 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -14.757 \\ -33.869 \end{bmatrix} = \begin{matrix} -20.3 \\ -50.3 \end{matrix}$$

Barra # 4:

$$\begin{bmatrix} M_2 \\ M_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.66 \\ -10.66 \end{bmatrix} + EI \begin{bmatrix} \frac{8}{8} & \frac{4}{8} \\ \frac{4}{8} & \frac{8}{8} \end{bmatrix} \times \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} -18.75+0-0 \\ -24.408+0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.66 \\ -10.66 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -18.75 \\ -24.408 \end{bmatrix} = \begin{matrix} -20.29 \\ -44.44 \end{matrix}$$

Barra # 5:

$$\begin{bmatrix} M_6 \\ M_4 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \times \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} -24.408 + \frac{-64.686}{5} - \frac{-229.778}{5} \\ -33.869 + \frac{-64.686}{5} - \frac{-229.778}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8.614 \\ -0.8506 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 6.55 \\ 2.76 \end{matrix}$$

Barra # 6:

$$\begin{bmatrix} M_4 \\ M_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \end{bmatrix} + EI \begin{bmatrix} \frac{8}{8} & \frac{4}{8} \\ \frac{4}{8} & \frac{8}{8} \end{bmatrix} \times \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} -33.869+0-\frac{-527.709}{8} \\ -50.936+0-\frac{-527.709}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 32.0946 \\ 15.0276 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 47.6 \\ 23.0 \end{matrix}$$

Barra # 7:

$$\begin{bmatrix} M_8 \\ M_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.625 \\ -0.625 \end{bmatrix} + EI \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \times \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} -53.308+\frac{-64.686}{5}-\frac{-229.778}{5} \\ -50.936+\frac{-64.686}{5}-\frac{-229.778}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.625 \\ -0.625 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -20.2896 \\ -17.9176 \end{bmatrix} =$$

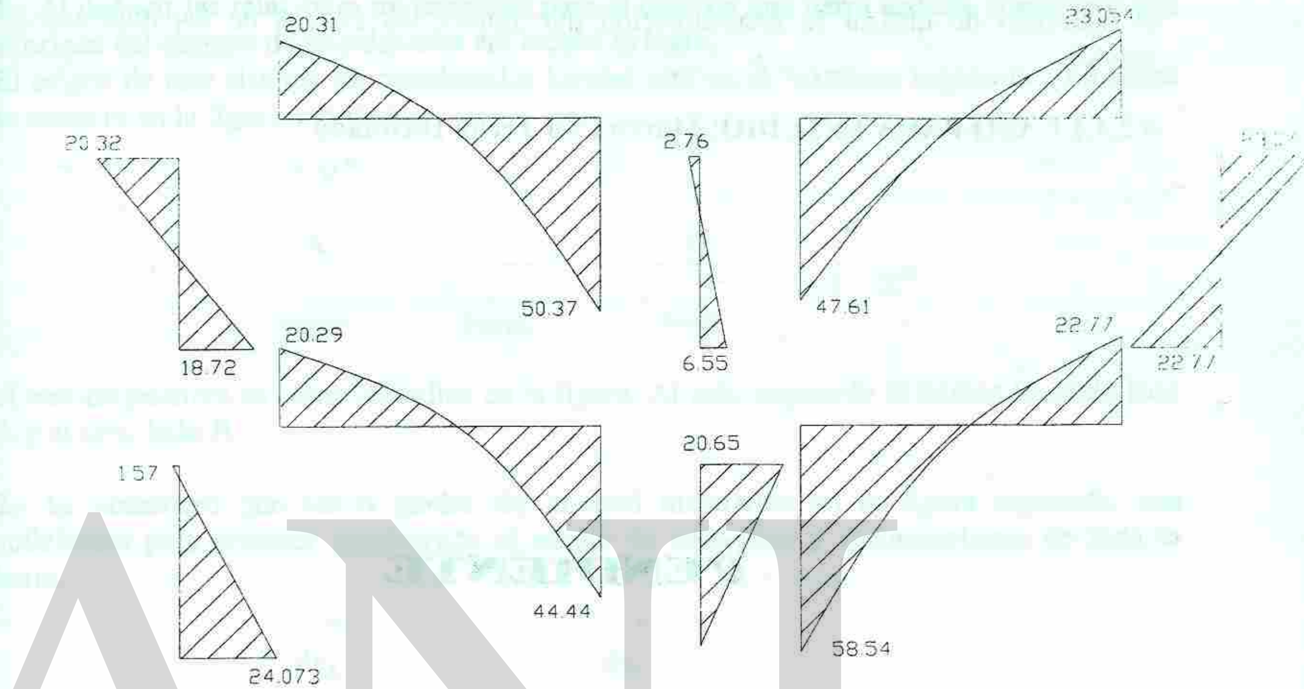
Barra # 8:

$$\begin{bmatrix} M_6 \\ M_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.66 \\ -10.66 \end{bmatrix} + EI \begin{bmatrix} \frac{8}{8} & \frac{4}{8} \\ \frac{4}{8} & \frac{8}{8} \end{bmatrix} \times \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} -24.408+0-\frac{-527.709}{8} \\ -53.308+0-\frac{-527.709}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.66 \\ -10.66 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 41.5556 \\ 12.6556 \end{bmatrix} =$$

Barra # 9:

$$\begin{bmatrix} M_7 \\ M_6 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{12}{5} \end{bmatrix} \times \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} -7.207+0-\frac{-64.686}{5} \\ -24.408+0-\frac{-64.686}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4 & 1.2 \\ 1.2 & 2.4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5.7302 \\ -11.4708 \end{bmatrix} = \begin{matrix} -0.012 \\ -20.65 \end{matrix}$$

Diagrama de momentos:



4.2.3. MARCOS CON BARRAS NO ORTOGONALES

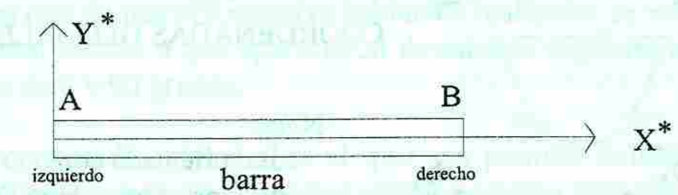
Ahora probaremos la efectividad del método alterno simplificado en las estructuras en que sus barras no están alineadas o a 90 grados unas con respecto a otras. También probaremos el beneficio de utilizar la simplificación que ignora los efectos de las deformaciones axiales.

4.2.3.1 CASO PARA ESTUDIO: Marco Con Techo Inclinado

PENDIENTE

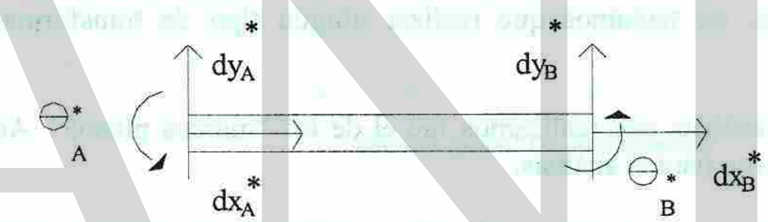
4.2.4. OBSERVACIONES ACERCA DE LA DEDUCCIÓN DE LAS RELACIONES MATEMÁTICAS ENTRE LOS DESPLAZAMIENTOS DE LOS PUNTOS DE CONTROL Y LAS FUERZAS EN LOS MISMOS.

1.- Al deducir las relaciones matemáticas para el caso de una barra aislada, supusimos que el origen del sistema de coordenadas era local a la barra.
El origen de este sistema de coordenadas locales está en el "extremo izquierdo", tal como se muestra en la figura siguiente:



el sentido positivo es como se indica en la figura. Al lado izquierdo lo hemos llamado lado A y al otro, lado B.

2.- Se consideró que los 6 grados de libertad mostrados en la figura siguiente, son suficientes para conocer **totalmente** el estado de esfuerzos y deformaciones de toda la barra.



3.- Debido a estos desplazamientos aparecen 6 fuerzas asociadas a cada uno de ellos, resultando un sistema de ecuaciones lineales simultaneas:

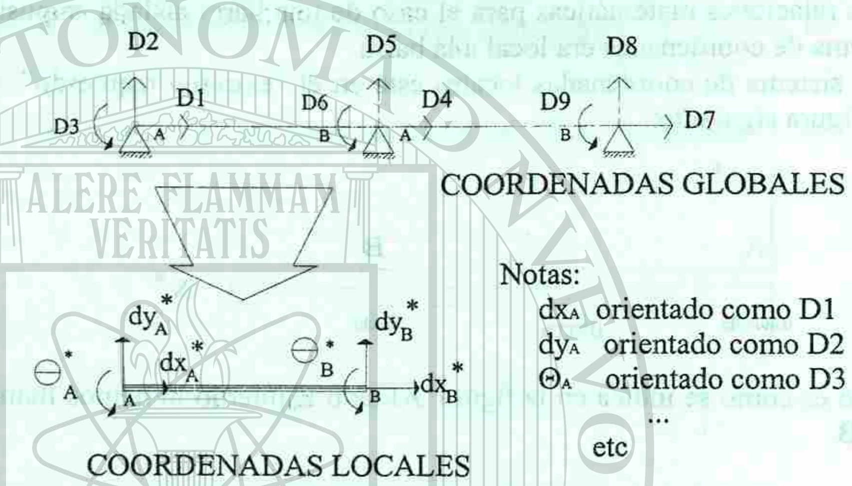
$$\begin{bmatrix} F_{*xA} \\ V*_A \\ M*_A \\ F*_B \\ V*_B \\ M*_B \end{bmatrix} = \left[K*_{barra}\right]_{6x6} \cdot \begin{bmatrix} d*_{xA} \\ d*_{yA} \\ \theta*_A \\ d*_{xB} \\ d*_{yB} \\ \theta*_B \end{bmatrix}$$

NOTA: Asterisco (*) indica: referido al sistema local de coordenadas.

4.- Al resolver sistemas estructurales del tipo de vigas continuas, lo hicimos de dos maneras:

a) a través del Método General de Rigideces
b) a través del Método de Rigideces Alterno Simplificado.

De la primer manera, encontramos que el "ensamble" de las matrices de rigidez de todas las barras puede realizarse de manera directa. Esto es debido a que el sistema de coordenadas local de todas y cada una de las barras, puede orientarse de tal manera que coincidan con la orientación del sistema global de referencia. Observar la figura:

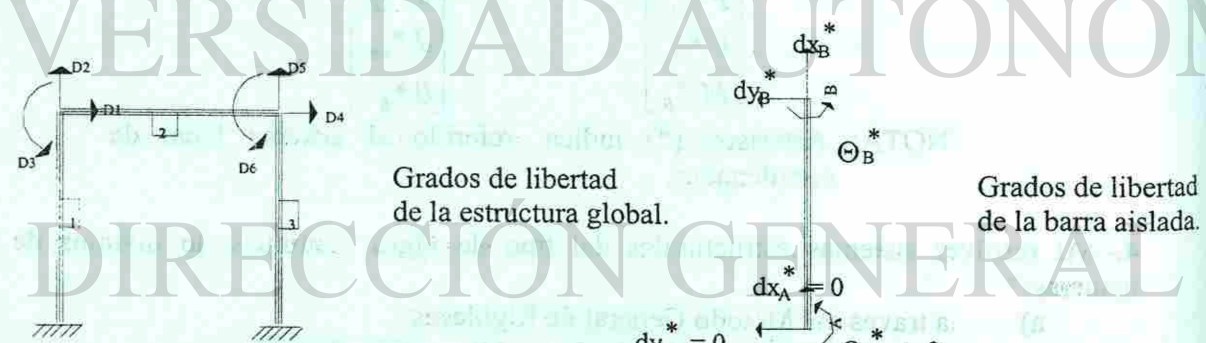


Posteriormente, propusimos el Método de Rigideces Alterno Simplificado. A través de este método llegamos a los mismos resultados, realizando menos trabajo. Descubrimos que si seguíamos ciertas reglas, no teníamos que realizar ningún tipo de transformación de sistemas de coordenadas.

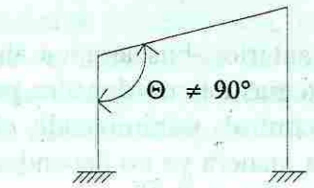
5.- El siguiente tipo de análisis que realizamos fue el de los "marcos planos". Aquí solo utilizamos el método alterno para el análisis.

En estos problemas nos encontramos con que los sistemas de coordenadas local de la barra y el global de toda la estructura ya no coincidían en orientación. Esto nos obligó a realizar transformaciones del sistema de referencia de una manera intuitiva y basándonos en la inspección de los dibujos con la deformada de la estructura para cada grado de libertad.

Ejemplo:

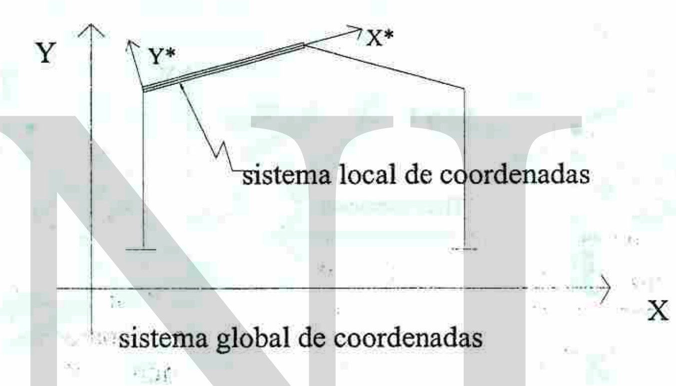


cuando el análisis se extendió al caso de los marcos no-ortogonales, ejemplo:



Las transformaciones que de manera intuitiva habíamos realizado, se volvieron mucho más complejas y laboriosas, debido a que aparecieron de manera explícita los senos y cosenos de ángulos diferentes de 0 y 90 grados.

7.- El sistema de coordenadas globales es el que nos permite definir la posición en el espacio de todas las barras que se interconectan para formar una estructura.

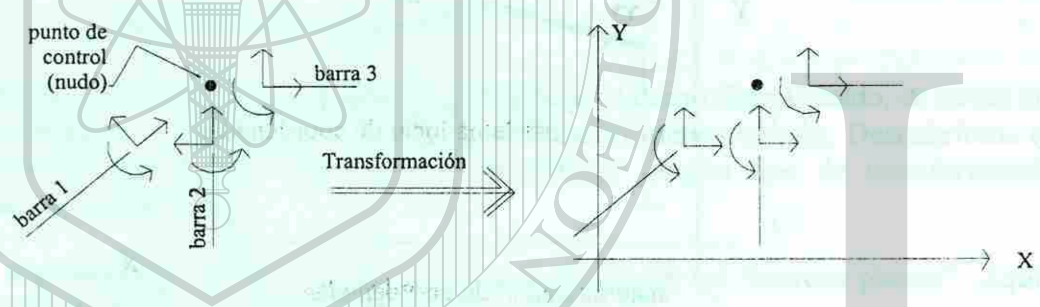


8.- Derivado de los problemas detectados con los marcos planos, y considerando que estos son problemas típicos de la práctica profesional, podemos afirmar que necesitamos un método sistemático y mecánico de realizar las sucesivas transformaciones de sistemas de coordenadas, de manera tal que nuestra labor de inspección de los dibujos pueda ser evitada y decidir la orientación y sentido de cada fuerza que aparece en los extremos de las barras a través del uso de relaciones matemáticas que reduzcan la posibilidad de confusión y que permitan pensar en automatizar el análisis de las estructuras mediante el uso de máquinas computadoras.

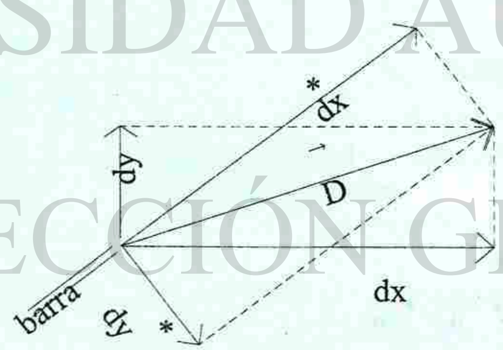
4.3. AMPLIACIÓN FORMAL DEL MÉTODO GENERAL DE RIGIDECES AL CASO GENERAL EN QUE LAS BARRAS NO ESTÁN ALINEADAS

Como se propuso en el artículo anterior, buscaremos ahora la manera de "mecanizar" el proceso de transformación de sistemas de coordenadas para los desplazamientos y fuerzas que aparecen en los puntos de control, minimizando el uso de métodos gráficos en el análisis de las estructuras. De esta manera ya no dependeremos de nuestra intuición para la transformación de estas cantidades vectoriales.

NATURALEZA DEL PROBLEMA
Como hemos aprendido, el proceso de análisis de una estructura involucra el ensamble (suma) de las ecuaciones matriciales de rigidez de todas y cada una de las barras que forman la estructura. Para poder realizar está operación matemática será necesario transformar los vectores de fuerzas y desplazamientos en los extremos de todas las barras, a vectores paralelos a un sistema de ejes de referencia globales.



Como es sabido, el par de vectores ortogonales de desplazamiento en los extremos de cada barra son las componentes del vector de desplazamiento resultante, que por conveniencia matemática hemos definido. Así, el problema se reduce a representar el vector resultante mediante otro par de vectores ortogonales "girados" un ángulo conocido respecto a la orientación del par ortogonal original (componentes paralelas a los ejes globales de referencia). En la figura siguiente se muestra gráficamente este concepto:

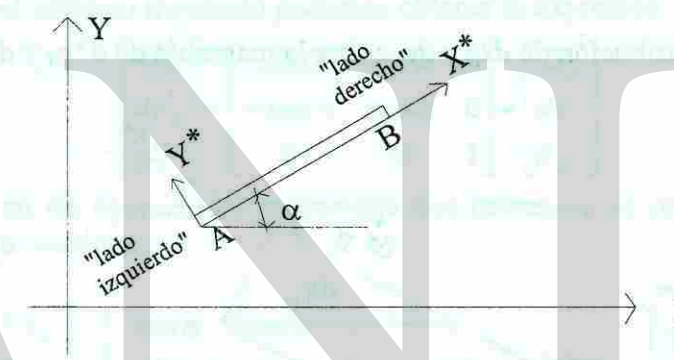


Estrictamente hablando, esta transformación a un mismo sistema de referencia hay que hacerlo en cada punto de control. Esto no implica que en todos los puntos de control se deba utilizar los mismos ejes globales de referencia, es decir, pudieran tener diferentes orientaciones estos ejes comunes en cada punto de control. Claro que hacerlo de esta manera complica el proceso debido a la gran cantidad de sistemas comunes de referencia que tendríamos, uno diferente para cada punto de control.

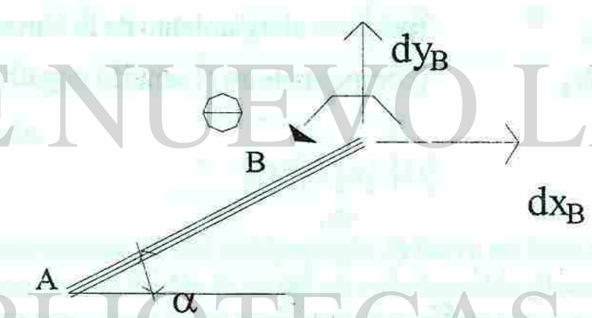
La práctica común es utilizar un mismo sistema común de referencia para todos los puntos de control, el sistema de coordenadas ortogonales globales.

4.3.1. DEDUCCIÓN DE LA MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN DE VECTORES DE DESPLAZAMIENTO DEL SISTEMA GLOBAL AL LOCAL.

En el caso general, una barra presenta un ángulo de inclinación con respecto al eje x positivo (medido positivo en contra de las manecillas del reloj). Observar la siguiente figura:

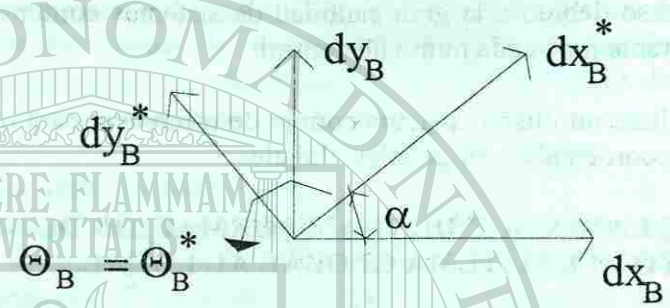


Podemos suponer que, en el caso general, en el extremo B ocurrirán desplazamientos representados por los vectores d_{XB}, d_{YB} y θ_B



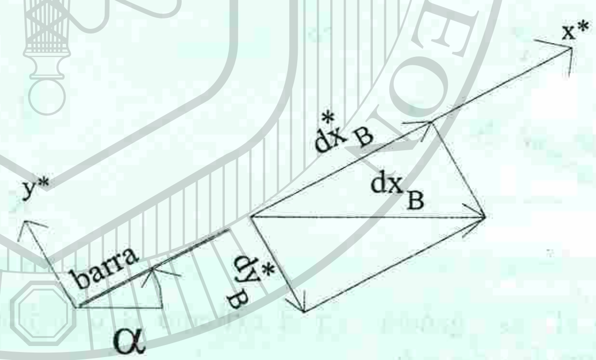
Estos vectores representan el desplazamiento del extremo B de la barra referidos al sistema de coordenadas globales.

Trataremos de referir estos mismos desplazamientos al sistema de coordenadas locales de la barra, de manera de expresar el desplazamiento del extremo B como un desplazamiento paralelo a la barra y un desplazamiento transversal a la misma. Gráficamente:



Donde d^*x_B es el desplazamiento paralelo a la barra que producirá alargamiento o acortamiento en la misma y d^*y_B es el desplazamiento transversal a la barra. El vector de rotación es idéntico en ambos sistemas de coordenadas (global y local)

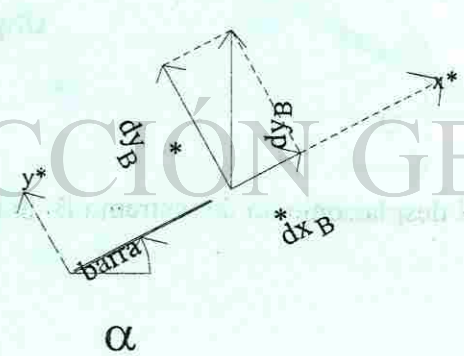
Analizaremos la contribución de dx_B y dy_B sobre la magnitud de d^*x_B y d^*y_B, uno a la vez. Para dx_B tenemos:



de donde :

$$dx_B^* = \cos\alpha \cdot dx_B \qquad \text{(produce alargamiento de la barra)}$$
$$dy_B^* = -\operatorname{sen}\alpha \cdot dx_B \qquad \text{(componente en el sentido negativo de } Y^*\text{)}$$

Para dy_B tenemos:



de donde:

$$dx_B^* = \operatorname{sen}\alpha \cdot dy_B \qquad \text{(produce alargamiento de la barra)}$$
$$dy_B^* = \cos\alpha \cdot dy_B \qquad \text{(componente en el sentido positivo de } Y^*\text{)}$$

sumando las componentes correspondientes, resulta:

$$dx_B^* = \cos\alpha \cdot dx_B + \operatorname{sen}\alpha \cdot dy_B$$
$$dy_B^* = -\operatorname{sen}\alpha \cdot dx_B + \cos\alpha \cdot dy_B$$
$$\Theta_B^* = \Theta_B$$

En notación matricial:

$$\begin{bmatrix} dx_B^* \\ dy_B^* \\ \theta_B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} dx_B \\ dy_B \\ \theta_B \end{bmatrix}$$

análogamente, en el extremo izquierdo podemos obtener la expresión:

$$\begin{bmatrix} dx_A^* \\ dy_A^* \\ \theta_A^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} dx_A \\ dy_A \\ \theta_A \end{bmatrix}$$

por conveniencia en las operaciones matriciales que habremos de realizar, definiremos la siguiente expresión matricial:

$$\begin{bmatrix} d^*x_A \\ d^*y_A \\ \theta^*_A \\ d^*x_B \\ d^*y_B \\ \theta^*_B \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 & & & \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & & [0] & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ & [0] & & -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \bullet \begin{bmatrix} dx_A \\ dy_A \\ \theta_A \\ dx_B \\ dy_B \\ \theta_B \end{bmatrix}$$

de manera condensada:

$$[D^*] = [A] \cdot [D]$$

donde :

D* = desplazamientos de los extremos de la barra en coordenadas locales.
D = desplazamientos de los mismos en coordenadas globales.
A = matriz de transformación geométrica que relaciona a D* con D

El vector obtenido se puede utilizar en la expresión $[F^*] = [K^*] \cdot [D^*]$, deducida para barras aisladas. Con esta relación matemática se puede calcular el valor de las fuerzas de extremo $[F^*]$. Recordar que $[F^*]$ y $[D^*]$ están expresados en coordenadas locales de la barra analizada.

El teorema de contragradiencia, presentado durante el estudio de las armaduras para demostrar que $[B]=[A]^T$ en las expresiones

$$e=[A][D]$$
$$F=[B][p]$$

Es aplicable a este caso y por lo tanto se podría demostrar que se cumple:

$$[D^*]=[A][D] \qquad (1)$$
$$\text{y} \quad [F]=[A]^T[F^*] \qquad (2)$$
$$\text{donde} \quad [F^*]=[K^*]_{6x6}[D^*] \qquad (3)$$

sustituyendo (1) y (3) en (2) resulta:

$$[F]=[A]_{6x6}{}^T[K^*]_{6x6}[A]_{6x6}[D] \quad \text{o}$$
$$[F]_{6x1}=[K]_{6x6}[F]_{6x1} \qquad (4)$$

donde $[K]=[A]^T[K^*][A]$
y a esta matriz se le conoce con el nombre de:

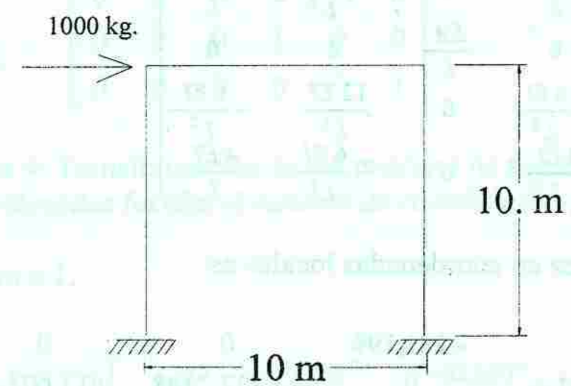
matriz de rigidez de barra en coordenadas globales.

La expresión (4) nos permite calcular las fuerzas en los extremos de la barra $[F]$ necesarias para mantener a la barra en la posición definida por el vector de desplazamientos $[D]$. Debemos recordar que los vectores $[F]$ y $[D]$ están referidos al sistema global de referencia siendo así posible sumar directamente las aportaciones en rigidez de la barra a las aportaciones en rigidez de las demás barras que se conectan en un punto de control. Haciendo así posible tomar en cuenta la interacción de todas las barras que integran la estructura analizada.

A partir de aquí, el procedimiento de: ensamble, partición de la ecuación matricial de rigidez ensamblada de toda la estructura, solución del sistema para encontrar el valor de los desplazamientos no-restringidos y, finalmente, el cálculo de las fuerzas en los extremos de cada barra que deben existir para mantener la configuración deformada definida por las magnitudes calculadas de los grados de libertad, es conceptualmente idéntico al seguido en el caso de las armaduras en el espacio bi y tridimensional.

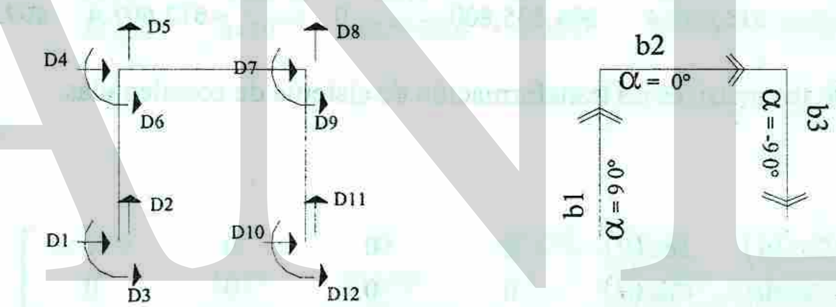
4.3.2 *CASO PARA ESTUDIO*: Marco Con Un Claro, Una Altura

Como una primera aplicación de los conceptos desarrollados en el artículo anterior, analizaremos el mismo marco que utilizamos como primer ejemplo de aplicación del método alterno simplificado al caso de marcos ortogonales. La intención es verificar que ambos procedimientos conducen a los mismos resultados.



Datos:
- Área = 134.19 cm^2
- I = 48,699 cm^4
- E = 2,100,000 kgf/cm^2

Paso 1: Identificar los vectores desplazamiento posibles en todos los puntos de control y asignar sentido a las barras con su ángulo correspondiente.



Paso 2: Calcular las matrices de rigidez de cada una de las barras que forman la estructura.

Usaremos las mismas propiedades geométricas de las barras, iguales a la del primer ejemplo mencionado.

E = 2,100,000 kg./cm^2.
A = 134.19 cm^2.
I = 48,699 cm^4.
L = 1,000 cm.

La matriz de rigidez de barra es idéntica para las tres barras, y se calcula a partir de la formula general para barras prismáticas:

$$K_{b1}=\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12\,EI}{L^3} & \frac{6\,EI}{L^2} & 0 & -\frac{12\,EI}{L^3} & \frac{6\,EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6\,EI}{L^2} & \frac{4\,EI}{L} & 0 & -\frac{6\,EI}{L^2} & \frac{2\,EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12\,EI}{L^3} & -\frac{6\,EI}{L^2} & 0 & \frac{12\,EI}{L^3} & -\frac{6\,EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6\,EI}{L^2} & \frac{2\,EI}{L} & 0 & -\frac{6\,EI}{L^2} & \frac{4\,EI}{L} \end{bmatrix}$$

Así, el valor numérico de la matriz de rigidez en coordenadas locales es:

$$K_{b1}=\begin{bmatrix} 281{,}799 & 0 & 0 & -281{,}799 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}227.2148 & 613{,}607.4 & 0 & -1{,}227.2148 & 613{,}607.4 \\ 0 & 613{,}607.4 & 409{,}071{,}600 & 0 & -613{,}607.4 & 204{,}535{,}800 \\ -281{,}799 & 0 & 0 & 281{,}799 & 0 & 0 \\ 0 & -1{,}227.2148 & -613{,}607.4 & 0 & 1{,}227.2148 & -613{,}607.4 \\ 0 & 613{,}607.4 & 204{,}535{,}800 & 0 & -613{,}607.4 & 409{,}071{,}600 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Cálculo de las matrices de transformación de sistema de coordenadas.

Formula general:

$$A(\theta)=\begin{bmatrix} Cos(\theta) & Sen(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Sen(\theta) & Cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Cos(\theta) & Sen(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Sen(\theta) & Cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Barra # 1:

$$A(90)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Barra # 2:

$$A(0)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Barra # 3

$$A(270)=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 4: Transformación de las matrices de rigidez de su proyección sobre *sistema de coordenadas locales* al *sistema de coordenadas globales*:

Barra # 1:

$$A(90)^T\times K_{b1}\times A(90)=\begin{bmatrix} 1{,}227 & 2\times10^{-11} & -613{,}607 & -1{,}227 & -2\times10^{-11} & -613{,}607 \\ 2\times10^{-11} & 281{,}799 & 4\times10^{-11} & -2\times10^{-11} & -281{,}799 & 4\times10^{-11} \\ -613{,}607 & 4\times10^{-11} & 409{,}071{,}600 & 613{,}607 & -4\times10^{-11} & 204{,}535{,}800 \\ -1{,}227 & -2\times10^{-11} & 613{,}607 & 1{,}227 & 2\times10^{-11} & 613{,}607 \\ -2\times10^{-11} & -281{,}799 & -4\times10^{-11} & 2\times10^{-11} & 281{,}799 & -4\times10^{-11} \\ -613{,}607 & 4\times10^{-11} & 204{,}535{,}800 & 613{,}607 & -4\times10^{-11} & 409{,}071{,}600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = K_{b1}\begin{bmatrix} D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}$$

Barra # 2:

$$A(0)^T\times K_{b1}\times A(0)=\begin{bmatrix} 281{,}799 & 0 & 0 & -281{,}799 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}227 & 613{,}607 & 0 & -1{,}227 & 613{,}607 \\ 0 & 613{,}607 & 409{,}071{,}600 & 0 & -613{,}607 & 204{,}535{,}800 \\ -281{,}799 & 0 & 0 & 281{,}799 & 0 & 0 \\ 0 & -1{,}227 & -613{,}607 & 0 & 1{,}227 & -613{,}607 \\ 0 & 613{,}607 & 204{,}535{,}800 & 0 & -613{,}607 & 409{,}071{,}600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = K_{b2}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix}$$

Barra # 3:

$$A(270)^T\times K_{b1}\times A(270)=\begin{bmatrix} 1{,}227 & 5\times10^{-11} & 613{,}607 & -1{,}227 & -5\times10^{-11} & 613{,}607 \\ 5\times10^{-11} & 281{,}799 & -1\times10^{-10} & -5\times10^{-11} & -281{,}799 & -1\times10^{-10} \\ 613{,}607 & -1\times10^{-10} & 409{,}071{,}600 & -613{,}607 & 1\times10^{-10} & 204{,}535{,}800 \\ -1{,}227 & -5\times10^{-11} & -613{,}607 & 1{,}227 & 5\times10^{-11} & -613{,}607 \\ -5\times10^{-11} & -281{,}799 & 1\times10^{-10} & 5\times10^{-11} & 281{,}799 & 1\times10^{-10} \\ 613{,}607 & -1\times10^{-10} & 204{,}535{,}800 & -613{,}607 & 1\times10^{-10} & 409{,}071{,}600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \end{bmatrix} = K_{b3}\begin{bmatrix} D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \end{bmatrix}$$

Paso 5: Resto del procedimiento.

Faltan los siguiente procesos.

1) Ensamble de las tres ecuaciones de rigidez de barra, para formar una única ecuación de rigidez de la estructura.
2) Partición de la ecuación matricial resultante.
3) Formación del vector de fuerzas asociadas a los grados de libertad de la estructura.
4) Cálculo del vector solución de desplazamientos para toda la estructura.
5) Formación de los vectores de desplazamiento, en coordenadas globales, de cada una de las tres barras.
6) Cálculo de los vectores de desplazamiento, en coordenadas locales, de cada una de las tres barras.
7) Cálculo de las fuerzas necesarias, en los dos extremos de cada una de las tres barras, para mantener a la barra en la configuración deformada recién calculada.

En general, este proceso es extremadamente laborioso, y este hecho, es el que ha dado motivo a una serie de discusiones académicas acerca de la pertinencia de aprender esta técnica por parte de los estudiantes de Análisis de Estructuras II.

Por otro lado, si en el dialogo incluimos el ingrediente tecnológico y, reconocemos, que en la fecha actual (Agosto del año 2001) la revolución en el ámbito de las tecnologías de la información tiene alrededor de 60 años, y, las herramientas computacionales han estado al alcance de los ingenieros mexicanos comunes desde hace aproximadamente 22 años (recordar los inicios de las computadoras Apple II a fines de la década de los 70's, y de las IBM -y compatibles- a principios de la década de los 80's), podríamos aceptar que el argumento, acerca de la dificultad de llevar a la práctica profesional estas técnicas de análisis, ya no se puede sostener en un diálogo que sea desapasionado y objetivo.

Congruente con estas ideas, proponemos que todo el proceso numérico y mecánico de análisis de la estructura, se realice con el auxilio de la ***HERRAMIENTA*** computacional.

Los estudiantes de este curso, o quién así lo desee, tienen acceso a un programa de computadora diseñado ex profeso para este curso. A continuación se muestra el archivo de datos requeridos por el programa MARCO1.EXE para la elaboración del modelo matemático y su solución numérica.

ARCHIVO DE DATOS[++]

```
// El archivo contiene la información necesaria para elaborar
// el modelo matemático del marco de un claro y una altura

4 <- numero de nudos que forman la estructura
1  0     0     0 0 0
2  0     1000  1 1 1
3  1000  1000  1 1 1
4  1000  0     0 0 0
```

[++] El programa muestra el orden preciso y el formato que deben tener los datos


```
// Conectividad de las barras

3 <- numero de barras que forman la armadura
1   1   2     2100000     134.19     48699
2   2   3     2100000     134.19     48699
3   3   4     2100000     134.19     48699

// Fuerzas actuantes en puntos de control
// nudo   Fx     Fy    Mz
     2   1000   0.0   0.0
FIN
// Fin del archivo.
```

ARCHIVO CON RESULTADOS

```
RESULTADOS DEL ANALISIS DEL MARCO
archivo : ejemplo1.dat
----------------------------------------------------------------
Matriz de rigidez local de la barra # 1
 2.817990E+05   0.000000E+00   0.000000E+00  -2.817990E+05   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   1.227215E+03   6.136074E+05   0.000000E+00  -1.227215E+03   6.136074E+05
 0.000000E+00   6.136074E+05   4.090716E+08   0.000000E+00  -6.136074E+05   2.045358E+08
-2.817990E+05   0.000000E+00   0.000000E+00   2.817990E+05   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00  -1.227215E+03  -6.136074E+05   0.000000E+00   1.227215E+03  -6.136074E+05
 0.000000E+00   6.136074E+05   2.045358E+08   0.000000E+00  -6.136074E+05   4.090716E+08
----------------------------------------------------------------
Matriz de rigidez global de la barra # 1
 1.227215E+03   0.000000E+00  -6.136074E+05  -1.227215E+03   0.000000E+00  -6.136074E+05
 0.000000E+00   2.817990E+05   0.000000E+00   0.000000E+00  -2.817990E+05   0.000000E+00
-6.136074E+05   0.000000E+00   4.090716E+08   6.136074E+05   0.000000E+00   2.045358E+08
-1.227215E+03   0.000000E+00   6.136074E+05   1.227215E+03   0.000000E+00   6.136074E+05
 0.000000E+00  -2.817990E+05   0.000000E+00   0.000000E+00   2.817990E+05   0.000000E+00
-6.136074E+05   0.000000E+00   2.045358E+08   6.136074E+05   0.000000E+00   4.090716E+08
----------------------------------------------------------------
Matriz de rigidez local de la barra # 2
 2.817990E+05   0.000000E+00   0.000000E+00  -2.817990E+05   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   1.227215E+03   6.136074E+05   0.000000E+00  -1.227215E+03   6.136074E+05
 0.000000E+00   6.136074E+05   4.090716E+08   0.000000E+00  -6.136074E+05   2.045358E+08
-2.817990E+05   0.000000E+00   0.000000E+00   2.817990E+05   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00  -1.227215E+03  -6.136074E+05   0.000000E+00   1.227215E+03  -6.136074E+05
 0.000000E+00   6.136074E+05   2.045358E+08   0.000000E+00  -6.136074E+05   4.090716E+08
----------------------------------------------------------------
Matriz de rigidez global de la barra # 2
 2.817990E+05   0.000000E+00   0.000000E+00  -2.817990E+05   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   1.227215E+03   6.136074E+05   0.000000E+00  -1.227215E+03   6.136074E+05
 0.000000E+00   6.136074E+05   4.090716E+08   0.000000E+00  -6.136074E+05   2.045358E+08
-2.817990E+05   0.000000E+00   0.000000E+00   2.817990E+05   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00  -1.227215E+03  -6.136074E+05   0.000000E+00   1.227215E+03  -6.136074E+05
 0.000000E+00   6.136074E+05   2.045358E+08   0.000000E+00  -6.136074E+05   4.090716E+08
----------------------------------------------------------------
Matriz de rigidez local de la barra # 3
 2.817990E+05   0.000000E+00   0.000000E+00  -2.817990E+05   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   1.227215E+03   6.136074E+05   0.000000E+00  -1.227215E+03   6.136074E+05
 0.000000E+00   6.136074E+05   4.090716E+08   0.000000E+00  -6.136074E+05   2.045358E+08
-2.817990E+05   0.000000E+00   0.000000E+00   2.817990E+05   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00  -1.227215E+03  -6.136074E+05   0.000000E+00   1.227215E+03  -6.136074E+05
 0.000000E+00   6.136074E+05   2.045358E+08   0.000000E+00  -6.136074E+05   4.090716E+08
----------------------------------------------------------------
Matriz de rigidez global de la barra # 3
 1.227215E+03   0.000000E+00   6.136074E+05  -1.227215E+03   0.000000E+00   6.136074E+05
 0.000000E+00   2.817990E+05   0.000000E+00   0.000000E+00  -2.817990E+05   0.000000E+00
 6.136074E+05   0.000000E+00   4.090716E+08  -6.136074E+05   0.000000E+00   2.045358E+08
```

```
-1.227215E+03   0.000000E+00  -6.136074E+05   1.227215E+03   0.000000E+00  -6.136074E+05
 0.000000E+00  -2.817990E+05   0.000000E+00   0.000000E+00   2.817990E+05   0.000000E+00
 6.136074E+05   0.000000E+00   2.045358E+08  -6.136074E+05   0.000000E+00   4.090716E+08
-----------------------------------------------------------------------------------------

Matriz K11
 2.830262E+05   0.000000E+00   6.136074E+05  -2.817990E+05   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   2.830262E+05   6.136074E+05   0.000000E+00  -1.227215E+03   6.136074E+05
 6.136074E+05   6.136074E+05   8.181432E+08   0.000000E+00  -6.136074E+05   2.045358E+08
-2.817990E+05   0.000000E+00   0.000000E+00   2.830262E+05   0.000000E+00   6.136074E+05
 0.000000E+00  -1.227215E+03  -6.136074E+05   0.000000E+00   2.830262E+05  -6.136074E+05
 0.000000E+00   6.136074E+05   2.045358E+08   6.136074E+05  -6.136074E+05   8.181432E+08
-----------------------------------------------------------------------------------------
Vector de desplazamientos  Du
# GL   MAGNITUD
   1      5.842262E-01
   2      1.518951E-03
   3     -3.527129E-04
   4      5.824538E-01
   5     -1.518951E-03
   6     -3.509406E-04
-----------------------------------------------------------------------------------------
VECTORES DE FUERZA INDUCIDOS EN ESTADO II
-----------------------------------------------------------------------------------------
barra # 1
Vector de desplazamientos en coord. locales
 0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   1.518951E-03  -5.842262E-01  -3.527129E-04
Vector de desplazamientos en coord. globales
 0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   5.842262E-01   1.518951E-03  -3.527129E-04
Vector de fuerza en coord. locales de la barra
-4.280388E+02   5.005438E+02   2.863431E+05   4.280388E+02  -5.005438E+02   2.142007E+05
-----------------------------------------------------------------------------------------
barra # 2
Vector de desplazamientos en coord. locales
 5.842262E-01   1.518951E-03  -3.527129E-04   5.824538E-01  -1.518951E-03  -3.509406E-04
Vector de desplazamientos en coord. globales
 5.842262E-01   1.518951E-03  -3.527129E-04   5.824538E-01  -1.518951E-03  -3.509406E-04
Vector de fuerza en coord. locales de la barra
 4.994562E+02  -4.280388E+02  -2.142007E+05  -4.994562E+02   4.280388E+02  -2.138382E+05
-----------------------------------------------------------------------------------------
barra # 3
Vector de desplazamientos en coord. locales
 1.518951E-03   5.824538E-01  -3.509406E-04   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
Vector de desplazamientos en coord. globales
 5.824538E-01  -1.518951E-03  -3.509406E-04   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
Vector de fuerza en coord. locales de la barra
 4.280388E+02   4.994562E+02   2.138382E+05  -4.280388E+02  -4.994562E+02   2.856181E+05
```


Interpretación gráfica de estos resultados:

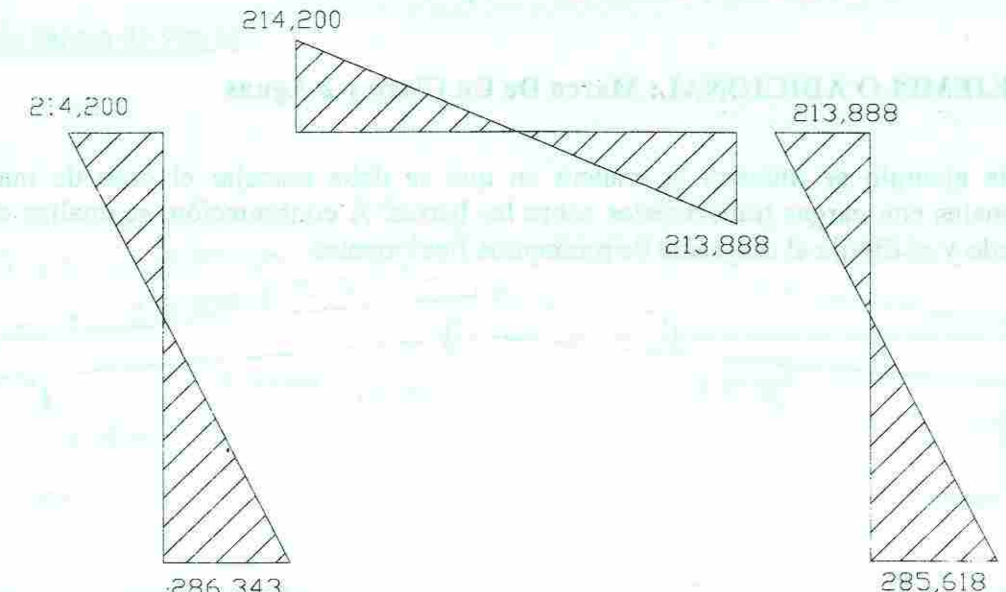


Diagrama de momentos obtenido mediante el uso del programa MARCO1.EXE

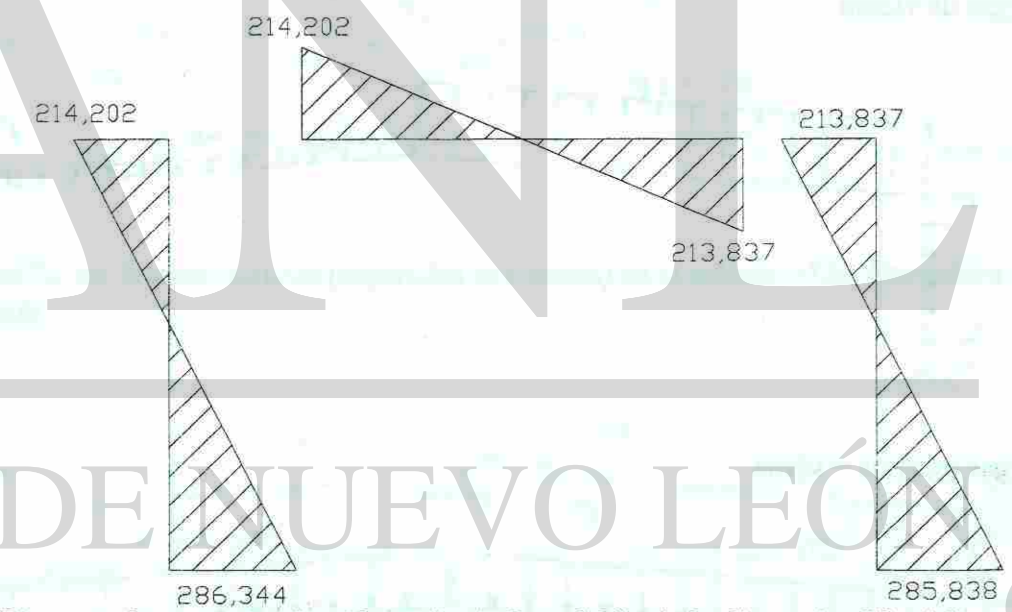


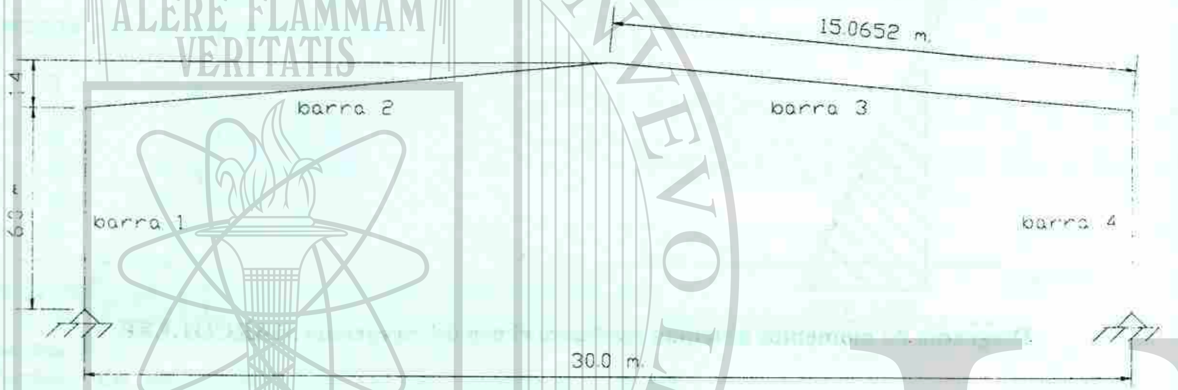
Diagrama de momentos obtenido mediante el uso del "metodo alterno simplificado".

Se puede comprobar en los diagramas mostrados que, las diferencias numéricas son muy pequeñas, y, podemos atribuirlas a la diferente cantidad de cifras significativas manejadas en los dos métodos de solución empleados. (para el método general y el método alterno simplificado).

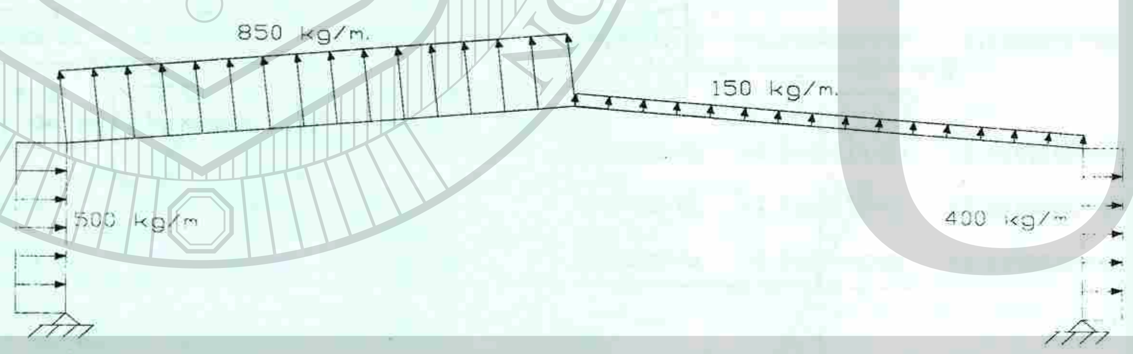
Como es sabido, existe una gran cantidad de programas de computadora que pueden ser adquiridos en los negocios especializados, estos programas son de gran calidad técnica y son aplicables a muchos tipos de problemas de análisis y diseño de estructuras. El programa utilizado en este ejercicio, y puesto a disposición de los estudiantes, tiene la ventaja de que su autor lo hace del dominio público, sin costo para el usuario.

4.3.3 EJEMPLO ADICIONAL: Marco De Un Claro y 2 Aguas

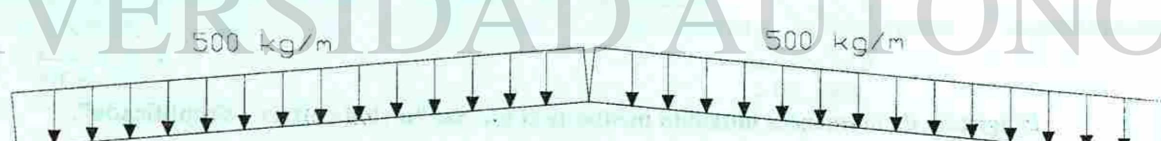
En este ejemplo se muestra la manera en que se debe manejar el caso de marcos no ortogonales con cargas transversales sobre las barras. A continuación, se analiza el marco mostrado y se dibuja el diagrama de momentos flexionantes.



Cargas de viento:

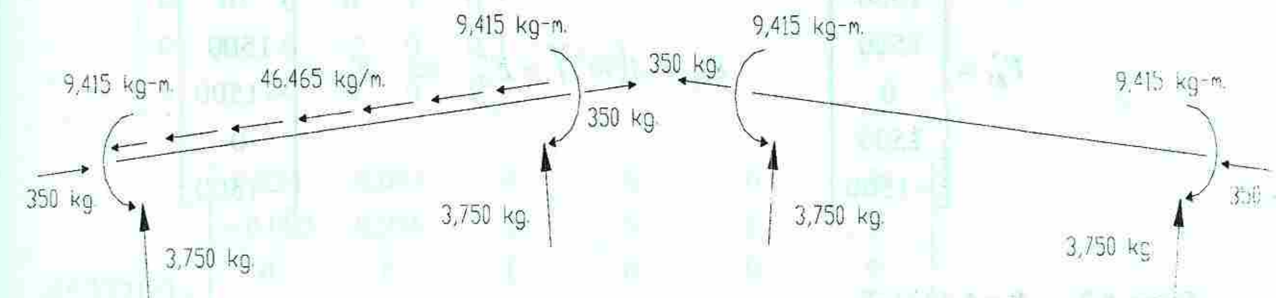


Cargas muertas + vivas:

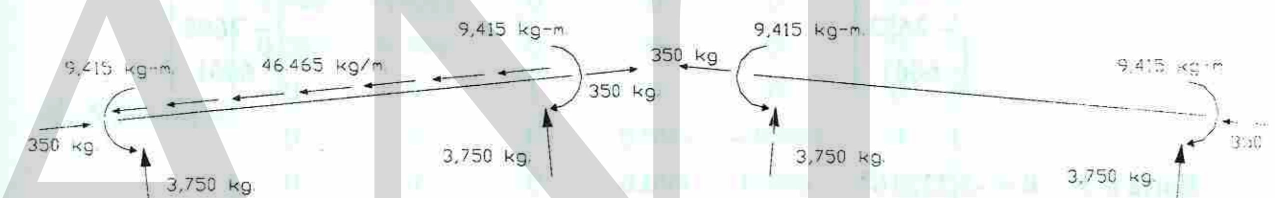


Fuerzas en estado # 1 *"La Estructura Restringida"*: "Fuerzas de empotramiento".

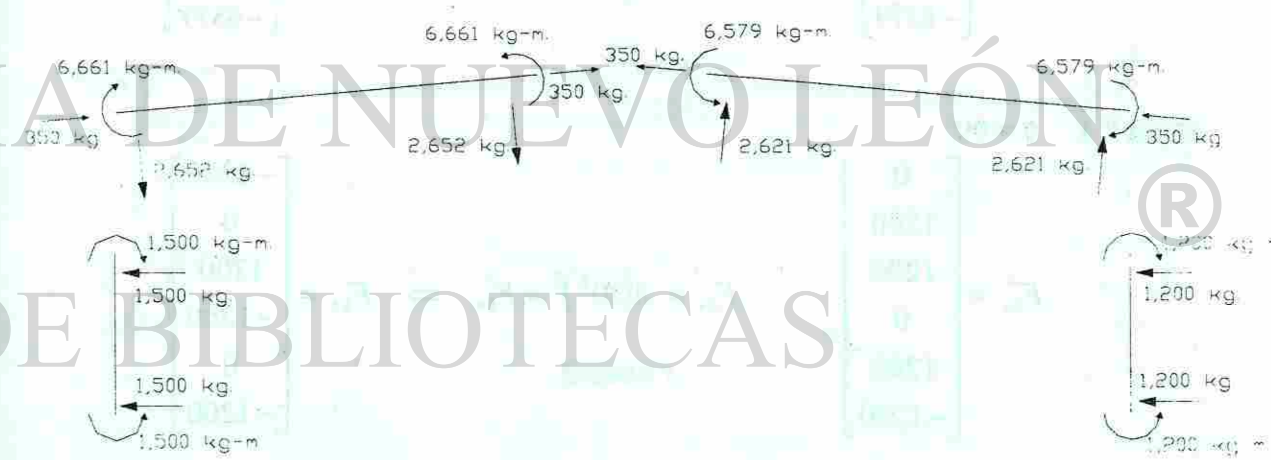
Caso de cargas de viento



Caso de cargas gravitacionales



Resultante de las fuerzas ficticias (separadas por barras) en el estado 1 *"La Estructura Restringida"*



Transformación de vectores de fuerzas de barra en coordenadas locales a vectores de fuerzas en coordenadas globales. Operación realizada mediante la ecuación: $F_b = A_b^T \cdot F_b^*$

Barra # 1: $\theta = 90^\circ$

$$F_{b1}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1500 \\ 1500 \\ 0 \\ 1500 \\ -1500 \end{bmatrix} \qquad F_{b1} = A(90^\circ)^T \times F_{b1}^* \quad \Rightarrow \quad F_{b1} = \begin{bmatrix} -1500 \\ 0 \\ 1500 \\ -1500 \\ 0 \\ -1500 \end{bmatrix}$$

Barra # 2: $\theta = 5.33216^\circ$

$$F_{b2}^* = \begin{bmatrix} 350 \\ -2652 \\ -6661 \\ 350 \\ -2652 \\ 6661 \end{bmatrix} \qquad F_{b2} = A(5.33216^\circ)^T \times F_{b2}^* \quad \Rightarrow \quad F_{b2} = \begin{bmatrix} 595 \\ -2608 \\ -6661 \\ 595 \\ -2608 \\ 6661 \end{bmatrix}$$

Barra # 3: $\theta = -5.33216^\circ$

$$F_{B3}^* = \begin{bmatrix} -350 \\ 2621 \\ 6579 \\ -350 \\ 2621 \\ -6579 \end{bmatrix} \qquad F_{b3} = A(-5.33216^\circ)^T \times F_{b3}^* \quad \Rightarrow \quad F_{b3} = \begin{bmatrix} -105 \\ 2642 \\ 6579 \\ -105 \\ 2642 \\ -6579 \end{bmatrix}$$

Barra # 4: $\theta = 90^\circ$

$$F_{b4}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1200 \\ 1200 \\ 0 \\ 1200 \\ -1200 \end{bmatrix} \qquad F_{b4} = A(90^\circ)^T \times F_{b4}^* \quad \Rightarrow \quad F_{b4} = \begin{bmatrix} -1200 \\ 0 \\ 1200 \\ -1200 \\ 0 \\ -1200 \end{bmatrix}$$

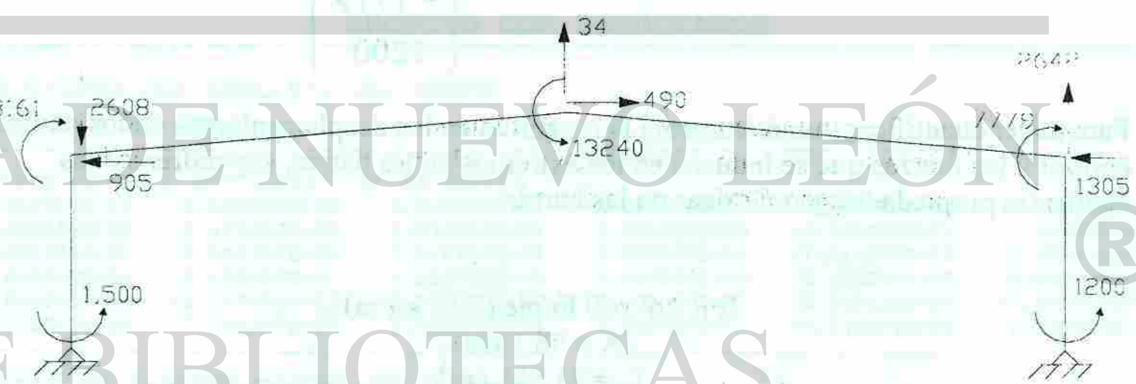
Y los valores numéricos de cada una de las tres diferentes matrices de transformación, son:

$$A(90) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A(5.33216) = \begin{bmatrix} 0.996 & 0.093 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.093 & 0.996 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.996 & 0.093 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.093 & 0.996 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

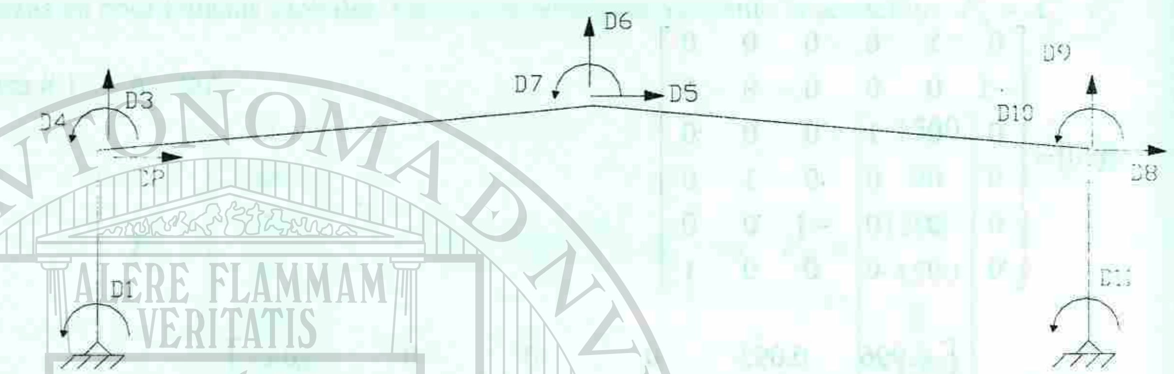
$$A(-5.33216) = \begin{bmatrix} 0.996 & -0.093 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.093 & 0.996 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.996 & -0.093 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.093 & 0.996 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora, podemos calcular la resultante de fuerzas ficticias en cada punto de control, partiendo de los vectores de fuerza en coordenadas globales.



Estado 1.

Análisis del estado 2



Grados de Libertad del Estado 2 *"La Estructura Liberada"*

El vector de fuerzas actuantes en el estado 2, se calcula como el valor negativo del vector de fuerzas ficticias del estado 1.

$$Fu = -F_{ficticias} = -\begin{Bmatrix} 1500 \\ -905 \\ -2608 \\ -8161 \\ 490 \\ 34 \\ 13240 \\ -1305 \\ 2642 \\ -7779 \\ 1200 \end{Bmatrix}$$

Para poder cuantificar numéricamente la magnitud de los desplazamientos de los puntos de control y las fuerzas que se inducen en los extremos de las barras, supondremos las siguientes propiedades geométricas de las barras:

IPR 16"x40 lb/pie (59.8 kg/m).
$A = 76.1\ cm^2$
$I_{xx} = 21{,}561\ cm^4$.

Análisis utilizando el programa MARCO1.EXE:

ARCHIVO DE DATOS

```
//
//  El archivo contiene la información necesaria para elaborar el
//  modelo matemático del marco de un claro y dos aguas utilizado
//  en clase para demostrar método general con marcos NO ortogonales
//    4 de mayo 2000

5<- numero de nudos que forman la estructura
1  0        0       0 0 1
2  0        600     1 1 1
3  1500     740     1 1 1
4  3000     600     1 1 1
5  3000     0       0 0 1

// CONECTIVIDAD DE LAS BARRAS
4 <- numero de barras que forman la armadura
1   1 2    2100000     76.1      21561
2   2 3    2100000     76.1      21561
3   3 4    2100000     76.1      21561
4   5 4    2100000     76.1      21561

// Fuerzas actuantes en "puntos de control"
// NUDO        Fx          Fy          Mz
1           0       0       -150000
2           905     2608    816100
3           -490    -34     -1324000
4           1305    -2642   777900
5           0       0       -120000
FIN
//  FIN DEL ARCHIVO
```

ARCHIVO CON RESULTADOS

```
RESULTADOS DEL ANALISIS DEL MARCO
archivo : m2.dat
--------------------------------------------------------------------
Matriz de rigidez local de la barra # 1
 2.663500E+05   0.000000E+00   0.000000E+00  -2.663500E+05   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   2.515450E+03   7.546350E+05   0.000000E+00  -2.515450E+03   7.546350E+05
 0.000000E+00   7.546350E+05   3.018540E+08   0.000000E+00  -7.546350E+05   1.509270E+08
-2.663500E+05   0.000000E+00   0.000000E+00   2.663500E+05   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00  -2.515450E+03  -7.546350E+05   0.000000E+00   2.515450E+03  -7.546350E+05
 0.000000E+00   7.546350E+05   1.509270E+08   0.000000E+00  -7.546350E+05   3.018540E+08
--------------------------------------------------------------------
Matriz de rigidez global de la barra # 1
 2.515450E+03   0.000000E+00  -7.546350E+05  -2.515450E+03   0.000000E+00  -7.546350E+05
 0.000000E+00   2.663500E+05   0.000000E+00   0.000000E+00  -2.663500E+05   0.000000E+00
-7.546350E+05   0.000000E+00   3.018540E+08   7.546350E+05   0.000000E+00   1.509270E+08
-2.515450E+03   0.000000E+00   7.546350E+05   2.515450E+03   0.000000E+00   7.546350E+05
 0.000000E+00  -2.663500E+05   0.000000E+00   0.000000E+00   2.663500E+05   0.000000E+00
-7.546350E+05   0.000000E+00   1.509270E+08   7.546350E+05   0.000000E+00   3.018540E+08
--------------------------------------------------------------------
```

```
Matriz de rigidez local de la barra # 2
 1.060790E+05   0.000000E+00   0.000000E+00  -1.060790E+05   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   1.589079E+02   1.196989E+05   0.000000E+00  -1.589079E+02   1.196989E+05
 0.000000E+00   1.196989E+05   1.202191E+08   0.000000E+00  -1.196989E+05   6.010956E+07
-1.060790E+05   0.000000E+00   0.000000E+00   1.060790E+05   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00  -1.589079E+02  -1.196989E+05   0.000000E+00   1.589079E+02  -1.196989E+05
 0.000000E+00   1.196989E+05   6.010956E+07   0.000000E+00  -1.196989E+05   1.202191E+08
-------------------------------------------------------------------------
Matriz de rigidez global de la barra # 2
 1.051643E+05   9.800499E+03  -1.112355E+04  -1.051643E+05  -9.800499E+03  -1.112355E+04
 9.800499E+03   1.073621E+03   1.191809E+05  -9.800499E+03  -1.073621E+03   1.191809E+05
-1.112355E+04   1.191809E+05   1.202191E+08   1.112355E+04  -1.191809E+05   6.010956E+07
-1.051643E+05  -9.800499E+03   1.112355E+04   1.051643E+05   9.800499E+03   1.112355E+04
-9.800499E+03  -1.073621E+03  -1.191809E+05   9.800499E+03   1.073621E+03  -1.191809E+05
-1.112355E+04   1.191809E+05   6.010956E+07   1.112355E+04  -1.191809E+05   1.202191E+08
-------------------------------------------------------------------------
Matriz de rigidez local de la barra # 3
 1.060790E+05   0.000000E+00   0.000000E+00  -1.060790E+05   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   1.589079E+02   1.196989E+05   0.000000E+00  -1.589079E+02   1.196989E+05
 0.000000E+00   1.196989E+05   1.202191E+08   0.000000E+00  -1.196989E+05   6.010956E+07
-1.060790E+05   0.000000E+00   0.000000E+00   1.060790E+05   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00  -1.589079E+02  -1.196989E+05   0.000000E+00   1.589079E+02  -1.196989E+05
 0.000000E+00   1.196989E+05   6.010956E+07   0.000000E+00  -1.196989E+05   1.202191E+08
-------------------------------------------------------------------------
Matriz de rigidez global de la barra # 3
 1.051643E+05  -9.800499E+03   1.112355E+04  -1.051643E+05   9.800499E+03   1.112355E+04
-9.800499E+03   1.073621E+03   1.191809E+05   9.800499E+03  -1.073621E+03   1.191809E+05
 1.112355E+04   1.191809E+05   1.202191E+08  -1.112355E+04  -1.191809E+05   6.010956E+07
-1.051643E+05   9.800499E+03  -1.112355E+04   1.051643E+05  -9.800499E+03  -1.112355E+04
 9.800499E+03  -1.073621E+03  -1.191809E+05  -9.800499E+03   1.073621E+03  -1.191809E+05
 1.112355E+04   1.191809E+05   6.010956E+07  -1.112355E+04  -1.191809E+05   1.202191E+08
-------------------------------------------------------------------------
Matriz de rigidez local de la barra # 4
 2.663500E+05   0.000000E+00   0.000000E+00  -2.663500E+05   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   2.515450E+03   7.546350E+05   0.000000E+00  -2.515450E+03   7.546350E+05
 0.000000E+00   7.546350E+05   3.018540E+08   0.000000E+00  -7.546350E+05   1.509270E+08
-2.663500E+05   0.000000E+00   0.000000E+00   2.663500E+05   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00  -2.515450E+03  -7.546350E+05   0.000000E+00   2.515450E+03  -7.546350E+05
 0.000000E+00   7.546350E+05   1.509270E+08   0.000000E+00  -7.546350E+05   3.018540E+08
-------------------------------------------------------------------------
Matriz de rigidez global de la barra # 4
 2.515450E+03   0.000000E+00  -7.546350E+05  -2.515450E+03   0.000000E+00  -7.546350E+05
 0.000000E+00   2.663500E+05   0.000000E+00   0.000000E+00  -2.663500E+05   0.000000E+00
-7.546350E+05   0.000000E+00   3.018540E+08   7.546350E+05   0.000000E+00   1.509270E+08
-2.515450E+03   0.000000E+00   7.546350E+05   2.515450E+03   0.000000E+00   7.546350E+05
 0.000000E+00  -2.663500E+05   0.000000E+00   0.000000E+00   2.663500E+05   0.000000E+00
-7.546350E+05   0.000000E+00   1.509270E+08   7.546350E+05   0.000000E+00   3.018540E+08
-------------------------------------------------------------------------
Matriz K11
 3.018540E+08   7.546350E+05   0.000000E+00   1.509270E+08   0.000000E+00   0.000000E+00
0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
 7.546350E+05   1.076797E+05   9.800499E+03   7.435114E+05  -1.051643E+05  -9.800499E+03  -
1.112355E+04   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00   9.800499E+03   2.674236E+05   1.191809E+05  -9.800499E+03  -1.073621E+03
1.191809E+05   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
 1.509270E+08   7.435114E+05   1.191809E+05   4.220731E+08   1.112355E+04  -1.191809E+05
6.010956E+07   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
 0.000000E+00  -1.051643E+05  -9.800499E+03   1.112355E+04   2.103285E+05   0.000000E+00
2.224710E+04  -1.051643E+05   9.800499E+03   1.112355E+04   0.000000E+00
 0.000000E+00  -9.800499E+03  -1.073621E+03  -1.191809E+05   0.000000E+00   2.147242E+03
0.000000E+00   9.800499E+03  -1.073621E+03   1.191809E+05   0.000000E+00
 0.000000E+00  -1.112355E+04   1.191809E+05   6.010956E+07   2.224710E+04   0.000000E+00
2.404382E+08  -1.112355E+04  -1.191809E+05   6.010956E+07   0.000000E+00
 0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00  -1.051643E+05   9.800499E+03  -
1.112355E+04   1.076797E+05  -9.800499E+03   7.435114E+05   7.546350E+05
 0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   9.800499E+03  -1.073621E+03  -
1.191809E+05  -9.800499E+03   2.674236E+05  -1.191809E+05   0.000000E+00
```



```
 0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   1.112355E+04   1.191809E+05
6.010956E+07   7.435114E+05  -1.191809E+05   4.220731E+08   1.509270E+08
 0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00   0.000000E+00
0.000000E+00   7.546350E+05   0.000000E+00   1.509270E+08   3.018540E+08
-------------------------------------------------------------------------
Vector de desplazamientos  Du
# GL   MAGNITUD
   1      5.260779E-05
   2     -1.283513E+00
   3      1.093348E-02
   4      5.318489E-03
   5     -1.266617E+00
   6     -1.753384E-01
   7     -8.159031E-03
   8     -1.247733E+00
   9     -1.118879E-02
  10      5.247693E-03
  11      9.794288E-05
-------------------------------------------------------------------------
VECTORES DE FUERZA INDUCIDOS EN ESTADO II
-------------------------------------------------------------------------
barra # 1
Vector de desplazamientos en coord. locales
 0.000000E+00   0.000000E+00   5.260779E-05   1.093348E-02   1.283513E+00   5.318489E-03
Vector de desplazamientos en coord. globales
 0.000000E+00   0.000000E+00   5.260779E-05  -1.283513E+00   1.093348E-02   5.318489E-03
Vector de fuerza en coord. locales de la barra
-2.912133E+03   8.246061E+02  -1.500000E+05   2.912133E+03  -8.246061E+02   6.447637E+05
-------------------------------------------------------------------------
barra # 2
Vector de desplazamientos en coord. locales
-1.276942E+00   1.301623E-01   5.318489E-03  -1.277431E+00  -5.687360E-02  -8.159031E-03
Vector de desplazamientos en coord. globales
-1.283513E+00   1.093348E-02   5.318489E-03  -1.266617E+00  -1.753384E-01  -8.159031E-03
Vector de fuerza en coord. locales de la barra
 5.178303E+01  -3.102882E+02   1.713363E+05  -5.178303E+01   3.102882E+02  -6.387915E+05
-------------------------------------------------------------------------
barra # 3
Vector de desplazamientos en coord. locales
-1.244842E+00  -2.922857E-01  -8.159031E-03  -1.241294E+00  -1.270915E-01   5.247693E-03
Vector de desplazamientos en coord. globales
-1.266617E+00  -1.753384E-01  -8.159031E-03  -1.247733E+00  -1.118879E-02   5.247693E-03
Vector de fuerza en coord. locales de la barra
-3.764111E+02  -3.747346E+02  -6.852085E+05   3.764111E+02   3.747346E+02   1.206637E+05
-------------------------------------------------------------------------
barra # 4
Vector de desplazamientos en coord. locales
 0.000000E+00   0.000000E+00   9.794288E-05  -1.118879E-02   1.247733E+00   5.247693E-03
Vector de desplazamientos en coord. globales
 0.000000E+00   0.000000E+00   9.794288E-05  -1.247733E+00  -1.118879E-02   5.247693E-03
Vector de fuerza en coord. locales de la barra
 2.980133E+03  -8.953939E+02  -1.200000E+05  -2.980133E+03  -8.953939E+02   6.572363E+05
```

Observar que las unidades utilizadas en este ejercicio son:

para fuerza -> kg

para longitud -> cm

Se recomienda al lector realizar las siguientes actividades:

- Dibujar la curva elástica del marco.
- Verificar el cálculo de una de las cuatro matrices de rigidez de barra en coordenadas globales.
- Dibujar los diagramas de momentos flexionantes, fuerzas cortantes y fuerzas axiales.

Nota: el programa MARCO1.EXE etiqueta a los grados de libertad en el mismo orden que se muestra en el croquis de Grados de Libertad.

4.3.4 OBSERVACIONES ACERCA DE LA SISTEMATIZACIÓN Y MECANIZACIÓN DEL PROCESO DE ANÁLISIS.

1) Antes de mostrar al lector la manera más general de transformar las componentes de los vectores de fuerza y desplazamiento de cada barra, quisimos mostrarle el *Método Alterno Equivalente*, con la finalidad didáctica de permitirle observar gráficamente, las diferentes formas que adquiere una estructura cuando alguno de sus puntos de control sufre un desplazamiento.

   Y esa es la principal razón para justificar la ruta seguida en la presentación del *Método General de Rigideces,* para el caso hipotético de estructuras en el espacio bidimensional.

   Otra buena razón, es que en los diferentes libros, artículos de revistas y congresos, relativos al análisis estructural o ingeniería sísmica, se encontrará el lector con referencias al método de análisis denominado por nosotros como el *Método Alterno Simplificado*. Con esta idea en mente, y, buscando facilitarle la comprensión de dichas publicaciones, fue que presentamos con tanta amplitud dicho método de análisis.

2) Después del camino recorrido hasta aquí, resultan perfectamente entendibles las razones prácticas que impidieron que el *Método General de Rigideces* fuera utilizado con todo su poder de análisis desde los tiempos en que fue desarrollado teóricamente (fines del siglo XIX y en las primeras décadas del siglo XX). Afortunadamente, nos ha tocado vivir esta época, en la cual las *limitaciones tecnológicas* de hace casi un siglo, ya no nos atan, siendo así posible, el analizar cualquier estructura formada por barras, sin necesidad de incluir en nuestro estudio hipótesis de dudosa validez, utilizando la teoría matemática a todo su potencial.

   En el capítulo 5 eliminaremos la última atadura del *Método General*: eliminaremos la restricción artificial del espacio bidimensional.

3) Una vez eliminadas las limitaciones prácticas de cálculo, gracias a las computadoras, queda abierta la puerta hacia un nuevo escenario, en el cual los ingenieros civiles podrán intentar la implementación de *modelos Reológicos* más realistas, eliminando las imprecisiones introducidas voluntariamente, al suponer que los materiales tienen un

comportamiento elástico-lineal. También podrán implementar modelos que incluyan el efecto de desplazamientos NO pequeños, con todas sus consecuencias.

4) Como es sabido, el problema de la ingeniería sísmica se ha atacado con éxito gracias a la utilización de *modelos reológicos* que permiten modelar el *comportamiento elasto-plástico* o modelos que incluyen el efecto de *degradación de rigidez* y de *resistencia* de los materiales. El ingeniero civil promedio debería tener acceso práctico a programas de computadora que permitan realizar análisis de estructuras con modelos reológicos diferentes al del resorte de Hooke.

4.4. SIMPLIFICACIONES Y APROXIMACIONES DEL MÉTODO GENERAL DE RIGIDECES.

4.4.1. ANTECEDENTES HISTÓRICOS.

La teoría manejada en este curso fue establecida por diversos investigadores desde el siglo XIX, aunque debido al gran trabajo numérico involucrado en el análisis de estructuras no triviales, no pudo ser utilizado en la práctica de la ingeniería hasta la época en que surgieron las computadoras y en que estas estuvieron al alcance de los ingenieros civiles (a partir de la década de los 60's del siglo XX).

Es así que los ingenieros de fines del siglo XIX y principios del XX, hasta los 60's, se vieron forzados a realizar aproximaciones y simplificaciones a la teoría físico-matemática para el análisis de estructuras. Recordemos que de por si la teoría se ve obligada a aceptar aproximaciones tales como: comportamiento elástico lineal de los materiales y la hipótesis de desplazamientos pequeños.

Estas simplificaciones obligadas por las limitaciones en las herramientas de cálculo disponibles en su época, dio origen a diversos métodos de análisis. Métodos que hicieron simplificaciones leves hasta simplificaciones burdas. Ejemplo de los primeros es el *"método de deflexión-pendiente"* y de los segundos podemos mencionar a el *"método del Portal"*.

En el año de 1932, Hardy Cross introdujo su método simplificado de análisis al cual denominó *"Método de Distribución de Momentos"*. Comúnmente se conoce a este método con el nombre corto de *"Método de Cross"* en recuerdo a su creador.

Como demostraremos en el siguiente artículo, su método es en esencia una simplificación del método general de rigideces. Una diferencia notable entre el método general y este método particular consiste en que Cross eludió la formación de la matriz de rigidez K_{11u} y su posterior solución a través del método de eliminación Gaussiana.

Desde el punto de vista matemático, Cross utiliza un método de solución análogo al método conocido en el campo del álgebra de matrices como método de Gauss-Seidel. Gracias a esta estrategia de solución, se reduce considerablemente el trabajo numérico necesario para resolver una estructura común y en esto estriba el gran éxito que tuvo dentro de la práctica profesional desde su aparición en la década de los 30's.

Aunque las condiciones tecnológicas han cambiado radicalmente respecto al año de 1932, sigue siendo importante dentro de la formación de un ingeniero civil el conocimiento de este método de análisis, debido a que gran cantidad de trabajos que se realizaron y publicaron en fechas posteriores en diversos campos de la ingeniería utilizan las ideas de Cross. Debido a esta situación, es conveniente que un ingeniero sea capaz de entender este método para así poder aprovechar estos trabajos que son fuente de información válida en nuestra época.

4.4.2. MÉTODO DE CROSS O DE DISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS

Cuando aplicamos el método general de rigideces, formamos un sistema de ecuaciones lineales simultáneas representadas mediante el álgebra de matrices. Este sistema lo resolvemos a través de un método matricial tal como el de Eliminación Gaussiana, obteniendo así la magnitud de **todos** los desplazamientos de los puntos de control en una sola operación matemática.

Cross propone en su método que en lugar de obtener el valor numérico de todos los desplazamientos en una sola operación matemática, obtengamos gradualmente esos valores numéricos. Para lograr esto propone que, partiendo de la estructura en su **estado 1** en la que introdujimos fuerzas restrictoras artificiales, liberemos gradualmente los diferentes grados de libertad hasta que las fuerzas introducidas artificialmente desaparezcan.

El proceso de liberación de grados de libertad es como sigue: Libera completamente el primero de los grados de libertad, estando el resto completamente restringidos y calcula las fuerzas que se inducen en todas las barras que se unen en el punto de control en que se liberó el grado de libertad. Se repite este proceso para el segundo hasta el n-esimo grado de libertad. Cuando se libera el segundo grado de libertad, se tiene que restringir completamente el primero. Esto equivale a inmovilizar el primer grado de libertad en la posición en que quedó después de su liberación.

Al terminar el ciclo completo (para los n grados de libertad) las fuerzas restrictoras artificiales probablemente habrán disminuido de magnitud. El ingeniero deberá verificar si la magnitud de la mayor de estas fuerzas es menor que un cierto límite de error, de ser así, las fuerzas internas calculadas son razonablemente cercanas a las que se obtendrían del cálculo a través del uso del método general de rigideces.

En caso de ser mayor al límite de error, deberá repetirse el proceso de liberación gradual de los n grados de libertad hasta que la fuerza restrictora mayor sea menor al límite de error aceptable.

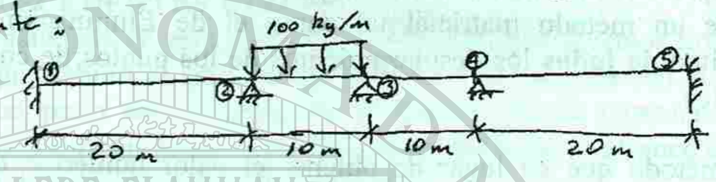
El proceso planteado en los párrafos anteriores se comprende mejor a través de ejemplos numéricos. Enseguida se presenta el método de Cross con su justificación matemática.

Hipótesis simplificatorias propuestas por Cross

Adicionalmente a las hipótesis simplificatorias introducidas en el método general de rigideces, Cross introduce las siguientes:

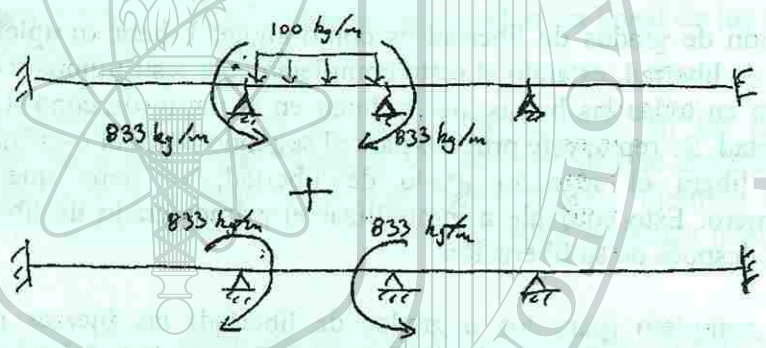
1.- No hay deformaciones axiales en las barras. Lo cual es una aproximación que para ciertas estructuras, es razonable y permite eliminar varios grados de libertad.
2.- No hay desplazamientos horizontales ni verticales en los puntos de control. En parte es consecuencia de la primer hipótesis.
3.- Los puntos de control solo pueden girar. En la primer versión del método que veremos, solo pueden existir los giros en los puntos de control.

Utilizando el método de Cross, analizaremos la estructura siguiente:



EI = cte.

Siguiendo el método general desarrollado en este curso, definimos a la estructura en sus estados 1 y 2.



Enseguida, deberíamos analizar la estructura en estado 2, obteniendo los momentos flexionantes y fuerzas cortantes en los 2 extremos de cada una de las 4 barras.

El método general nos pide formar la matriz de rigidez K_{uu} y el vector de fuerzas F_u.

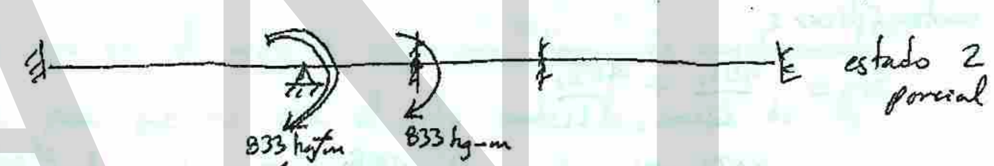
A partir de estas dos matrices, calculamos en una sola operación matemática el vector de desplazamientos solución (D_u). Con estos desplazamientos D_u, calculamos los momentos y cortantes correspondientes a la estructura en estado 2, los cuales se deberán sumar a los de la estructura en estado 1 para obtener las fuerzas internas reales en la estructura original.

El proceso matemático relatado en el párrafo anterior, es manejado por Cross de una manera diferente.

Cross propone calcular los valores solución de D_u (4 giros en esta estructura) gradualmente.

SOLUCIÓN DE ESTRUCTURA EN ESTADO 2, UTILIZANDO LA LIBERACIÓN GRADUAL DE LOS GRADOS DE LIBERTAD ARTIFICIALMENTE RESTRINGIDOS EN EL ESTADO 1.

Paso 1. Liberamos completamente el grado de libertad 1 (nudo interior izquierdo) y analizamos la estructura resultante como si estuviera en ~~es~~ estado 2 parcial.



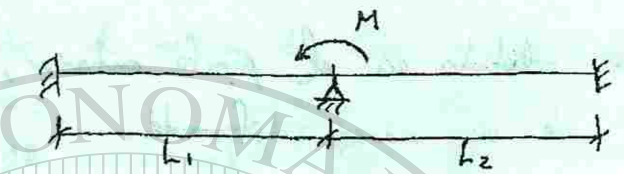
Única fuerza capaz de deformar la estructura

Después de liberar el nudo, la fuerza ficticia en el nudo 2 se cambia de signo y actúa sobre la estructura deformándola.

Así, hemos convertido el problema de análisis en el de una viga continua de dos claros con sus extremos empotrados.

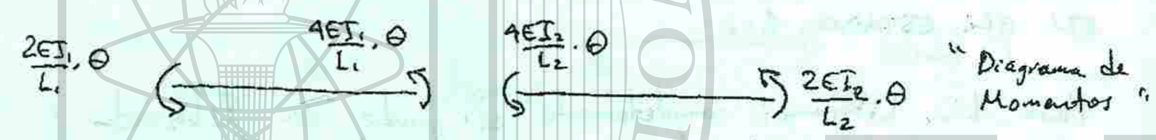
Para poder calcular la magnitud del giro θ y las fuerzas de empotramiento inducidas, haremos las siguientes observaciones:

Solución de subestructura



Esta estructura ya fué resuelta en este curso y los resultados del análisis son:

$$\theta = \frac{M}{\frac{4EI_1}{L_1}+\frac{4EI_2}{L_2}}$$



El método de Cross propone las siguientes relaciones matemáticas:

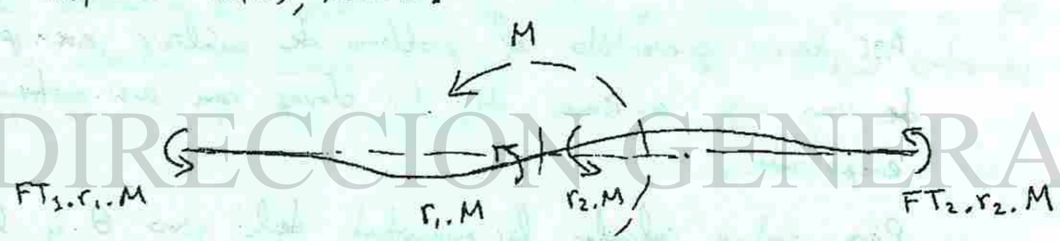
$$S_r = \frac{4EI_1}{L_1} + \frac{4EI_2}{L_2}$$

$$r_1 = \frac{\frac{4EI_1}{L_1}}{S_r} \qquad r_2 = \frac{\frac{4EI_2}{L_2}}{S_r}$$

$$FT_1 = \frac{2EI_1/L_1}{4EI_1/L_1} = 0.5 \qquad FT_2 = \frac{2EI_2/L_2}{4EI_2/L_2} = 0.5$$

NOTA: PARA BARRAS PRISMÁTICAS, LOS COCIENTES FT SIEMPRE SERÁN IGUALES A 0.5

Aplicando estas relaciones al diagrama de momentos en los extremos de las 2 barras, resulta:

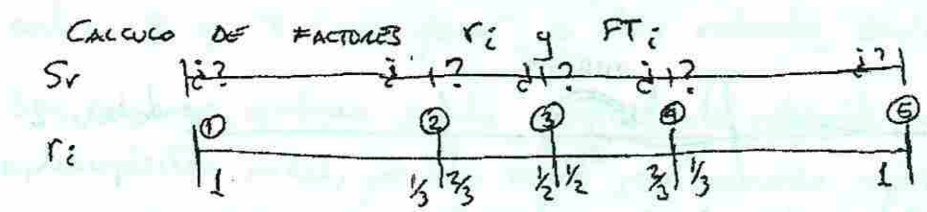


comprobación: $r_1 M = \frac{4EI_1/L_1}{S_r}\cdot M = \frac{4EI_1}{L_1}\cdot\frac{M}{\frac{4EI_1}{L_1}+\frac{4EI_2}{L_2}} = \frac{4EI_1}{L_1}\cdot\theta$

6

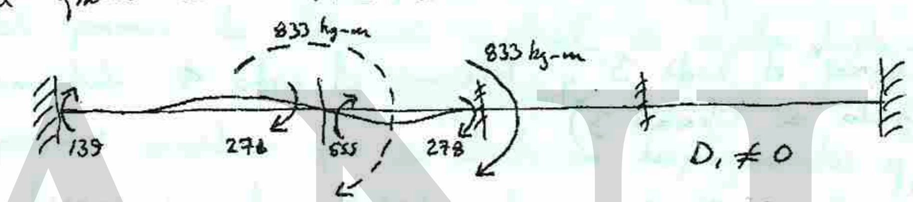
Aplicando estas observaciones a la solución de nuestro problema, tenemos:

CALCULO DE FACTORES r_i y FT_i



$FT_i = 0.5$ (según se demostró)

Finalmente, calculamos las fuerzas inducidas al liberar el grado de libertad 1.



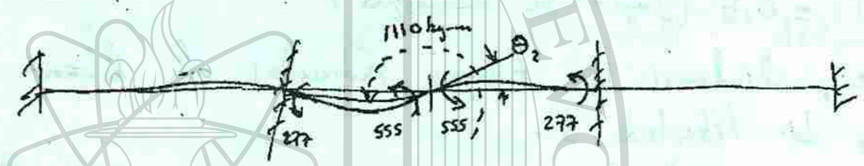
Observar que en el nodo 3 surge una "fuerza de empotramiento" necesaria para que no gire el nudo ante la acción de la fuerza liberada en el nudo 2. Esta fuerza de 278 kg-m se suma con la fuerza ficticia de 833 kg-m introducida en la estructura en estado 1.

Además, la fuerza ficticia en el nudo 3 ha actuado deformando a la viga y ya no podrá deformarla posteriormente.

Sin embargo la fuerza (278+833) aún está siendo "contenida" de manera artificial a través de la fijación del nudo 3.

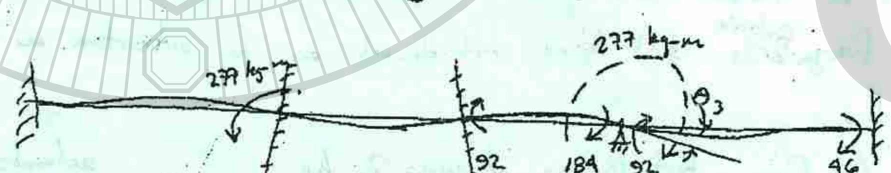
Paso 2. "Fijamos" el nodo 2 y liberamos el nodo 3 (grado de libertad 2)

despues de actuar la fuerza liberada:

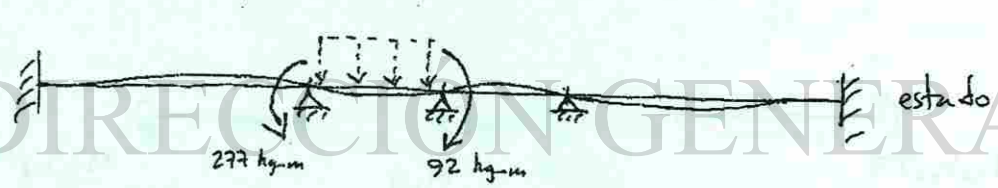


Paso 3. "Fijamos" el nodo 3 y liberamos el nodo 4 (grado de libertad 3).

despues de actuar la fuerza liberada:



Así, después de este proceso de liberación no simultanea de los 3 grados de libertad, la estructura en estado 1 resultante es:



En este nuevo estado 1, la viga continua se encuentra deformada y las fuerzas ficticias necesarias para que sus nudos 2 y 3 no giren, se han reducido considerablemente.

Sin embargo, continua siendo artificialmente restringida al giro en dichos nudos, por esta razón, será necesario repetir el proceso de liberación gradual de los grados de libertad. Obteniendo una curva elástica diferente y fuerzas ficticias posiblemente menores.

El proceso de liberación gradual se repite hasta que la magnitud de la fuerza ficticia mayor sea tan pequeña que podamos considerar que su efecto en desplazamientos y fuerzas internas sea lo suficientemente pequeño para poder ser ignorado.

El proceso cíclico de 3 pasos descrito, se puede "mecanizar" y replantear de la siguiente forma:

MÉTODO DE CROSS (forma mecanizada)

Paso 1. Suponemos empotrados todos los grados de libertad y calculamos los momentos de empotramiento necesarios. (fuerzas ficticias en estado 1)

Paso 2. En un primer ciclo ("pasada") recorremos uno a uno los grados de libertad de la estructura y en cada uno realizamos las siguientes operaciones:

operación #1. Calcular el momento resultante en el grado de libertad. A este momento M_R lo denominaremos "Momento de desequilibrio" (Fuerza ficticia resultante)

Si $M_R = 0$ continuar con la operación #3.

operación #2. Calcular el momento actuante $M_a = -M_R$ y "permitir" que el grado de libertad exista. (dejar girar libremente el nudo)

De esta manera, se generan momentos internos a las barras que se unen en el nudo en que existe el grado de libertad "liberado".

Para el cálculo de los momentos internos, utilizamos las observaciones realizadas en el paso 1 de la primer versión del método de Cross.

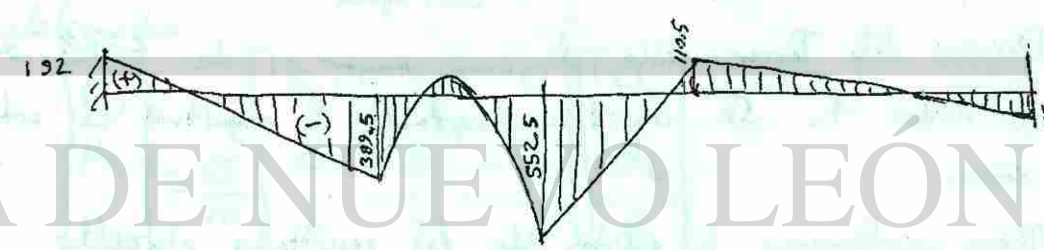
operación #3. Pasar al siguiente nudo en turno dentro de este primer ciclo:

NOTA: El siguiente nudo podría tener adicionado un momento "transportado" desde los nudos a los cuales se conecta y que ya han sido liberados.

operación #4. Al terminar un ciclo completo, verificaremos la magnitud máxima absoluta del momento M_R en cada nudo. Si esta magnitud es menor al error máximo admisible, podremos detener el procedimiento de cálculo, en caso contrario, deberemos iniciar un nuevo ciclo.

FORMA TABULADA DEL MÉTODO DE CROSS "MECANIZADO"

	NUDO 1	NUDO 2		NUDO 3		NUDO 4		NUDO 5
factor r_i	NO ES NECESARIO	1/3	2/3	1/2	1/2	2/3	1/3	NO ES NECESARIO
Fuerzas de empotramiento (FEM)	0 kg-m	0	833 kg-m	-833 kg-m	0	0	0	0
CICLO #1	-139	-278	-555	-278				
			277	555	555	277		
	FUERZAS FICTICIAS REMANENTES				-92	-184	-92	-46
CICLO #2	-46	-92	-184	-92				
			46	92	92	46		
					-15	-31	-15	-8
CICLO #3	-7	-15	-30	-15				
			7	15	15	7		
					-1	-3	-3	-1
Sumatoria de Momentos	-192	-385	394	-556	549	113	-108	-55
	kg-m		kg-m		kg-m		kg-m	
error		1.8%	1.8%		0.18%		2.78%	



En este ejemplo, podemos observar que al terminar el tercer ciclo de liberación de grados de libertad, la fuerza ficticia mayor remanente es de 7 kg-cm en el nudo 2.

El momento final en la estructura real (no la del estado 1 o la del estado 2) se calcula sumando las F.E.M. en los extremos de cada una de las 4 barras con los correspondientes momentos inducidos durante el proceso de liberación de los nudos.

Por ejemplo en el extremo izquierdo de la barra 2:

$$M_{real} = \underbrace{833 \text{ kg-m}}_{\text{estado } 1} + \underbrace{(-555+277-184+46-30+7) \text{ kg-m}}_{\text{¡estados 2 parciales!}}$$

$$M_{real} = 394 \text{ kg-m}$$

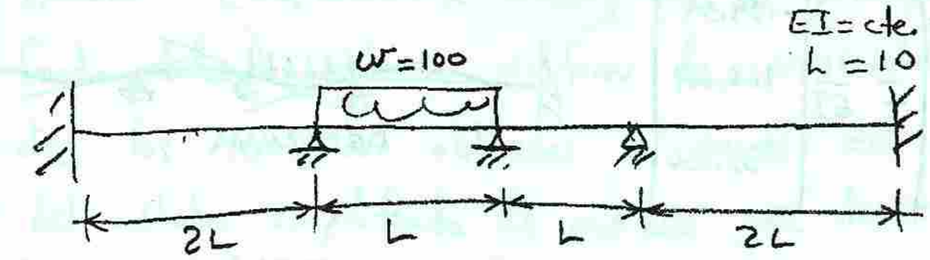
Si calculamos el error introducido por la fuerza ficticia no "absorbida" por desplazamientos en la viga:

$$\text{error en nudo } 2 \Rightarrow \frac{7 \text{ kg-m}}{394 \text{ kg-m}} \times 100 = 1.8\%$$

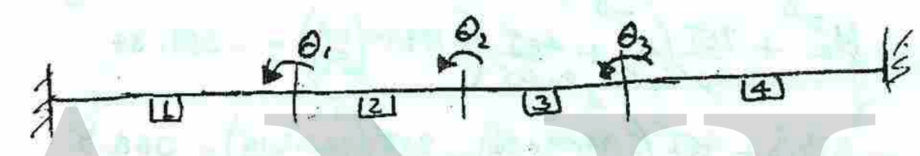
Despues del Tercer ciclo, el error mayor es de 2.78% en el nudo 4. Se considera aceptable la magnitud de este error.

Ahora, verificaremos la validez de los resultados obtenidos mediante el método de Cross. Compararemos estos resultados contra los obtenidos mediante la aplicación del método general de rigideces que hemos desarrollado en este mismo curso.

EJEMPLO RESUELTO CON LOS TEOREMAS EN SU FORMA GENERAL



PASO 1 IDENTIFICAR GRADOS DE LIBERTAD



PASO 2 FORMAR MATRIZ DE RIGIDEZ

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{2L}+\frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L}+\frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L}+\frac{4EI}{2L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

simplificando

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \frac{EI}{10} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

PASO 3 FORMAR VECTOR DE FUERZAS SOBRE NUDO

$$\begin{bmatrix} M_a \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} M_r \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} +\frac{wL^2}{12} \\ -\frac{wL^2}{12} \\ 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} +833.\dot{3} \\ -833.\dot{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

6

PASO 4 CALCULAR $[\theta] = K^{-1}[M_a]$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \frac{10}{EI} \begin{bmatrix} -194.44 \\ 166.667 \\ -55.556 \end{bmatrix}$$

PASO 5 CALCULAR FUERZAS EN EXTREMOS DE BARRAS

$$M_{i1} = \cancel{M_e}^{\,0} + \frac{4EI}{2\times 10}\cancel{(0)}^{\,0} + \frac{2EI}{2\times 10}\left(-\frac{194.44(10)}{EI}\right) = -194.44$$

$$M_{d1} = \cancel{M_e}^{\,0} + \frac{2EI}{2\times 10}\cancel{(0)}^{\,0} + \frac{4EI}{2\times 10}\left(-194.44\left(\frac{10}{EI}\right)\right) = -388.88$$

$$M_{i2} = 833.\dot{3} + \frac{4EI}{10}\left(-194.44\times\frac{10}{EI}\right) + \frac{2EI}{10}\left(166.667\times\frac{10}{EI}\right) = 388.9$$

$$M_{d2} = -833.\dot{3} + \frac{2EI}{10}\left(-194.44\times\frac{10}{EI}\right) + \frac{4EI}{10}\left(166.667\times\frac{10}{EI}\right) = -555.55$$

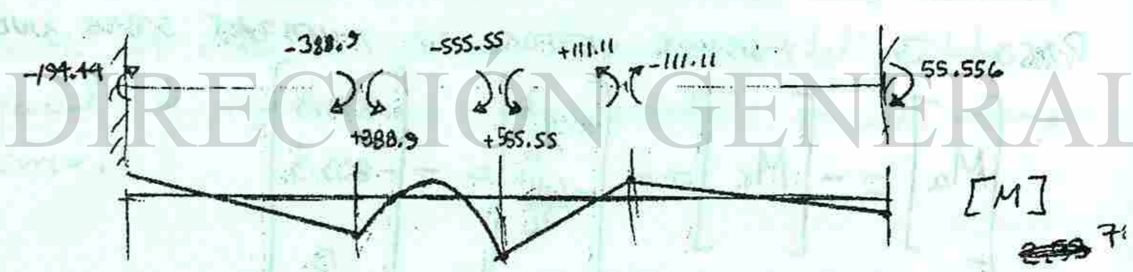
$$M_{i3} = \cancel{M_e}^{\,0} + \frac{4EI}{10}\left(166.667\times\frac{10}{EI}\right) + \frac{2EI}{10}\left(-55.556\times\frac{10}{EI}\right) = 555.55$$

$$M_{d3} = \cancel{M_e}^{\,0} + \frac{2EI}{10}\left(166.667\times\frac{10}{EI}\right) + \frac{4EI}{10}\left(-55.556\times\frac{10}{EI}\right) = 111.11$$

$$M_{i4} = \cancel{M_e}^{\,0} + \frac{4EI}{2\times 10}\left(-55.556\times\frac{10}{EI}\right) + \frac{2EI}{2\times 10}\cancel{(0)}^{\,0} = -111.11$$

$$M_{d4} = \cancel{M_e}^{\,0} + \frac{2EI}{2\times 10}\left(-55.556\times\frac{10}{EI}\right) + \frac{4EI}{2\times 10}\cancel{(0)}^{\,0} = -55.556$$

GRÁFICAMENTE:



Con los resultados obtenidos de este análisis "exacto" (aceptando la validez de los principios fundamentales) podemos verificar la presición de los resultados obtenidos a través del uso del método simplificado de análisis que hemos planteado en esta sección del curso.

Magnitud calculada de los errores:

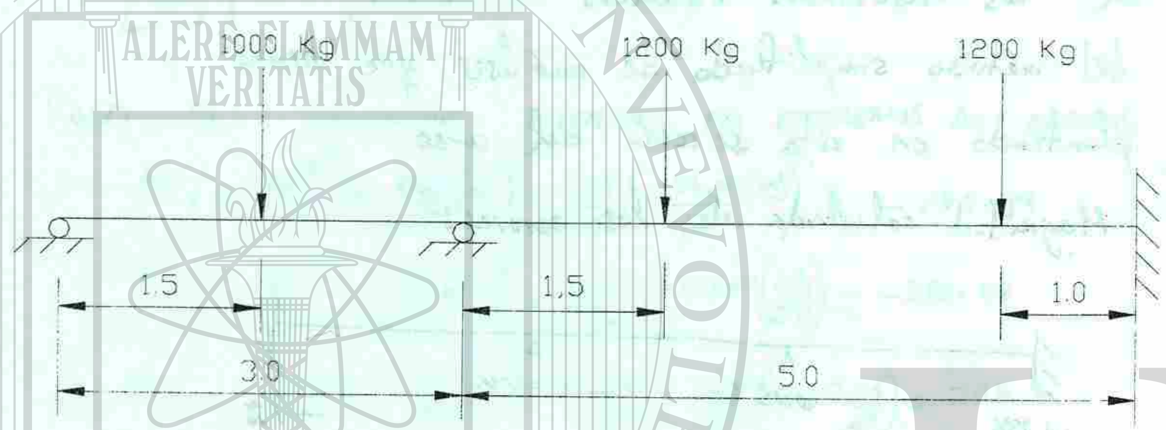
$$\frac{(3895-388.9)}{388.9}\times 100 = 0.15\,\%$$

ejemplo de cálculo del error

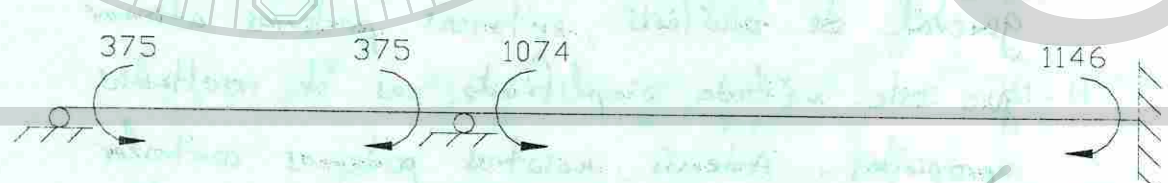
CONCLUSION: Si aceptamos la validez del método general de análisis, entonces podemos afirmar que este método simplificado nos da resultados apropiados. Además, nosotros podemos controlar la magnitud del error a través del uso del número de decimales suficientes.

4.4.4 EJEMPLO ADICIONAL: Viga Continua de dos claros.

Análisis de la viga continua mostrada. Se obtienen las reacciones en los apoyos, y los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes.



Momentos de empotramiento:

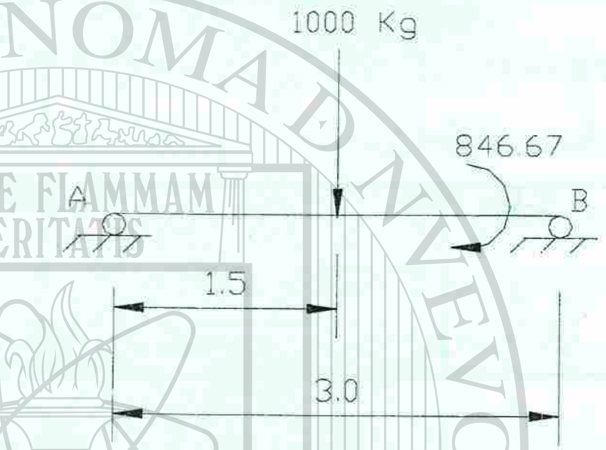


$$r=\frac{\frac{4EI}{3}}{\frac{4EI}{3}}=1.0 \qquad r=\frac{\frac{4EI}{3}}{\frac{4EI}{3}+\frac{4EI}{5}}=0.625 \qquad r=\frac{\frac{4EI}{5}}{\frac{4EI}{3}+\frac{4EI}{5}}=0.375 \qquad r=\frac{\frac{2EI}{5}}{\frac{4EI}{5}}=0.5$$

Análisis en forma tabular:

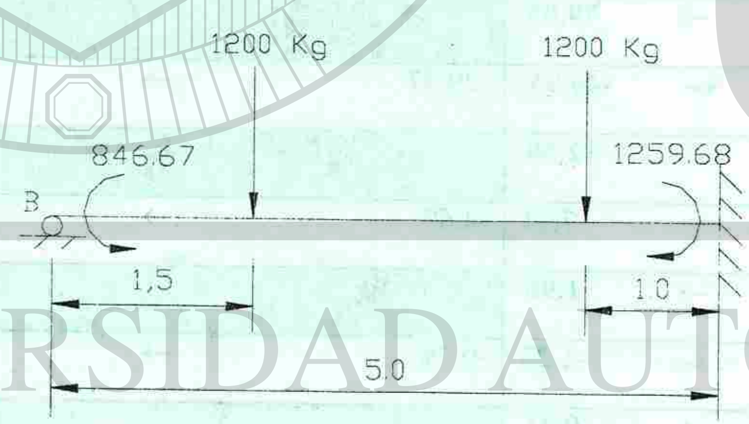
r	1.0		0.625	0.375		0.5
FEM	**375**		**-375**	**1074**		-1146
	-375	→	**-187.5**			
	-159.86	←	-319.69	-191.81	→	-95.91
	159.86	→	**79.93**			
	-24.98	←	-49.96	-29.97	→	-14.99
	24.98	→	**12.49**			
	-3.91	←	-7.81	-4.69	→	-2.35
	3.91	→	**1.96**			
	-0.615	←	-1.23	-0.74	→	-0.37
	0.615	→	**0.31**			
	-0.09	←	-0.19	-0.12	→	-0.06
Σ	≈ 0		-846.69	846.67		-1259.68

Calculo de las reacciones:



$$\Sigma M_A = 0$$
$$(1.5 \times 1000) + 846.67 - 3R_B = 0$$
$$3R_B = 2346.67$$
$$R_B = 782.2$$

$$\Sigma F_y = 0$$
$$-1000 + 782.2 + R_A = 0$$
$$R_A = 217.8$$



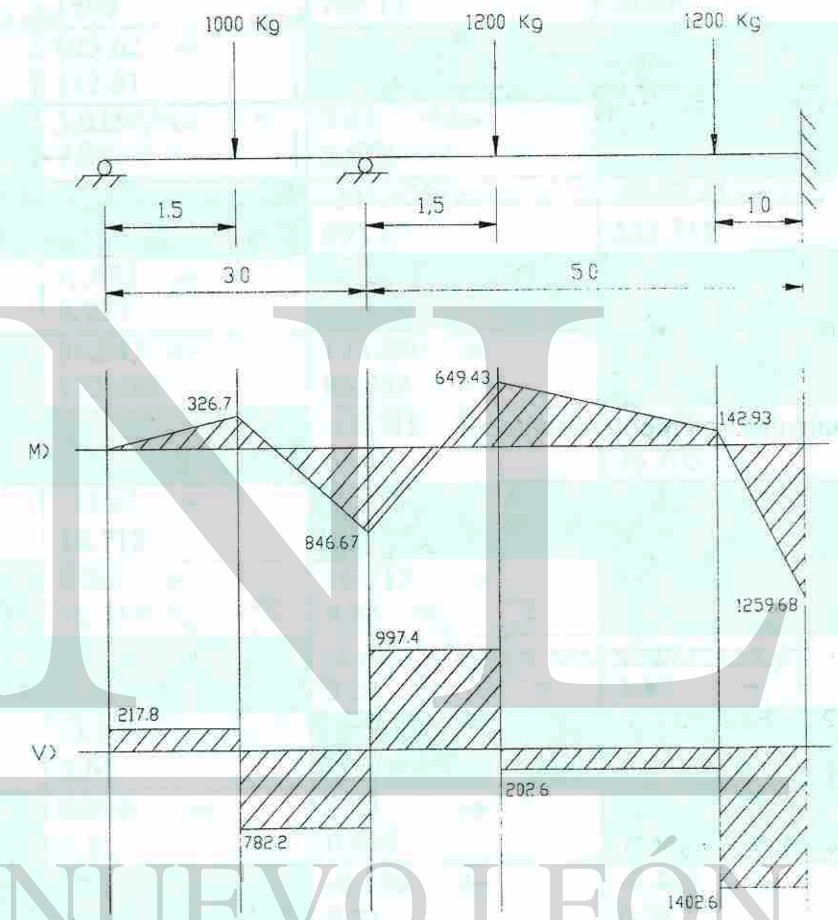
$$\Sigma M_B = 0$$
$$-846.67 + 1.5 \times 1200 + 4 \times 1200 + 1259.68 - 5R_C = 0$$
$$5R_C = 7013.01$$
$$R_C = 1402.6$$

R_A= 217.8 Kg.

$$\Sigma F_y = 0$$
$$-1200 \times 2 + 1402.6 + R_B = 0$$
$$R_B = 997.4$$

R_B= 782.2 + 997.4 = 1,779.6 Kg.
R_C= 1,402.6 Kg.

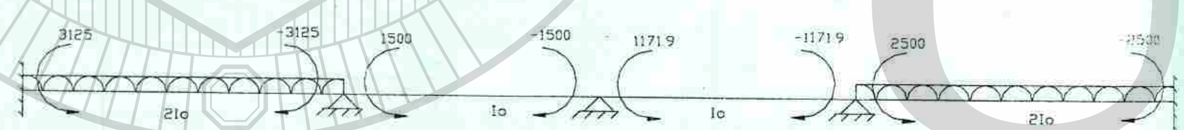
Diagramas de cortante y momento:



4.4.5 EJEMPLO ADICIONAL: Viga Continua de cuatro claros, con cargas concentradas.

Análisis de la viga continua mostrada. Se obtienen las reacciones en los apoyos, y los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes.

Momentos de empotramiento:



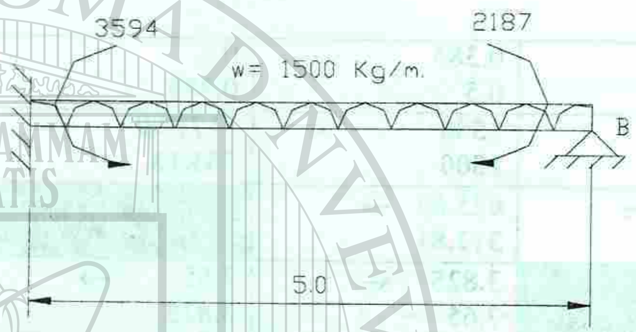
Calculo del factor "r".

$$r=\frac{\frac{4E(2Io)}{5}}{\frac{4E(2Io)}{5}+\frac{4EIo}{4}}=0.615 \qquad r=\frac{\frac{4EIo}{4}}{\frac{4E(2Io)}{5}+\frac{4EIo}{4}}=0.385 \qquad r=\frac{\frac{4EIo}{4}}{\frac{4EIo}{4}+\frac{4EIo}{4}}=0.5$$

Análisis en forma tabular:

r FEM	- 0.615	0.385 0.5	0.5 0.385	0.615 -
	3125 - **3125**	**1500** - **1500**	**1171.89** - **703.13**	**2500** - 2500
	499.69 ← 999.38	625.62 → **312.81**		
		3.825 ← 7.65	7.65 → **3.825**	
			-346.635 ← - 693.27	-1107.43 → - 553.715
	-1.176 ← - 2.352	-1.473 → - **0.733**		
		86.843 ← 173.686	173.686 → **86.843**	
			-16.715 ← - 33.43	-53.41 → - 26.705
	-26.7 ← - 53.41	-33.43 → - **16.715**		
		8.36 ← 16.715	16.715 → **8.36**	
Σ			**-1.61** ← - 3.22	-5.14 → - 2.57
	-2.57 ← - 5.14	-3.22 ← - **1.61**		
		0.805 → 1.61	1.61 → **0.805**	
			-0.155 ← - 0.31	-0.495 → - 0.25
	-0.248 ← - 0.495	-0.31 ← - **0.155**		
		0.078 → 0.155	0.155 ← **0.078**	
			-0.015 → - 0.03	-0.05 → - 0.025
	3594 - 2187	2187.1 - 1006.6	1006.6 - 1333.5	1333.5 - 3083.3

Calculo de las reacciones:



$\sum M_A = 0$

$-3{,}594 + 2{,}187 + 1{,}500 \times 5 \times 2.5 - 5R_B = 0$

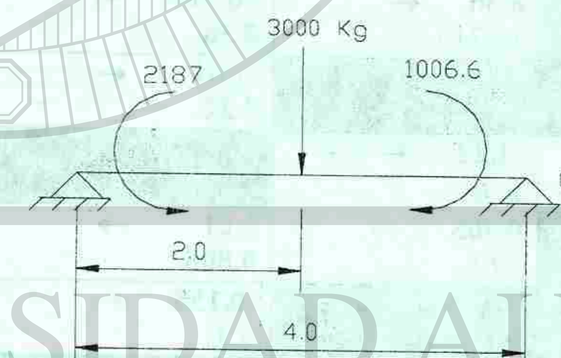
$5R_B = 17{,}343$

$R_B = 3{,}468.6$

$\sum F_y = 0$

$R_A - 5 \times 1{,}500 + 3{,}468.6 = 0$

$R_A = 4{,}031.4$



$\sum M_B = 0$

$-2{,}187 + 3{,}000 \times 2 + 1{,}006.6 - 4R_C = 0$

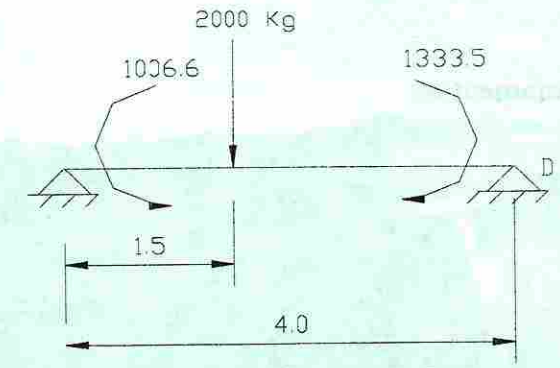
$4R_C = 4{,}819.6$

$R_C = 1{,}204.9$

$\sum F_y = 0$

$R_B - 3{,}000 + 1{,}204.9 = 0$

$R_B = 1{,}795.1$



$\sum M_C = 0$

$-1{,}006.6 + 2{,}000 \times 1.5 + 1{,}333.5 - 4R_D = 0$

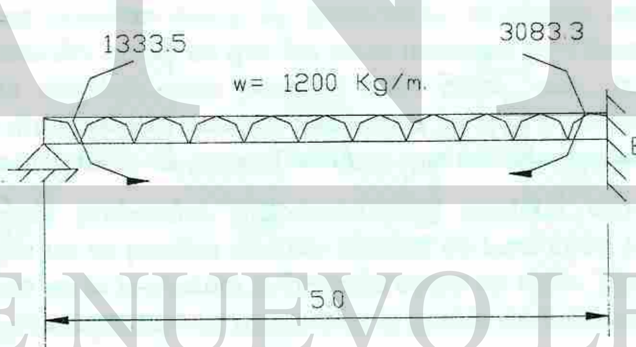
$4R_D = 3{,}326.9$

$R_D = 831.73$

$\sum F_y = 0$

$R_C - 2{,}000 + 831.73 = 0$

$R_C = 1{,}168.3$



$\sum M_D = 0$

$-1{,}333.5 + 1{,}200 \times 5 \times 2.5 + 3{,}083.3 - 5R_E = 0$

$5R_E = 16{,}749.8$

$R_E = 3{,}349.96$

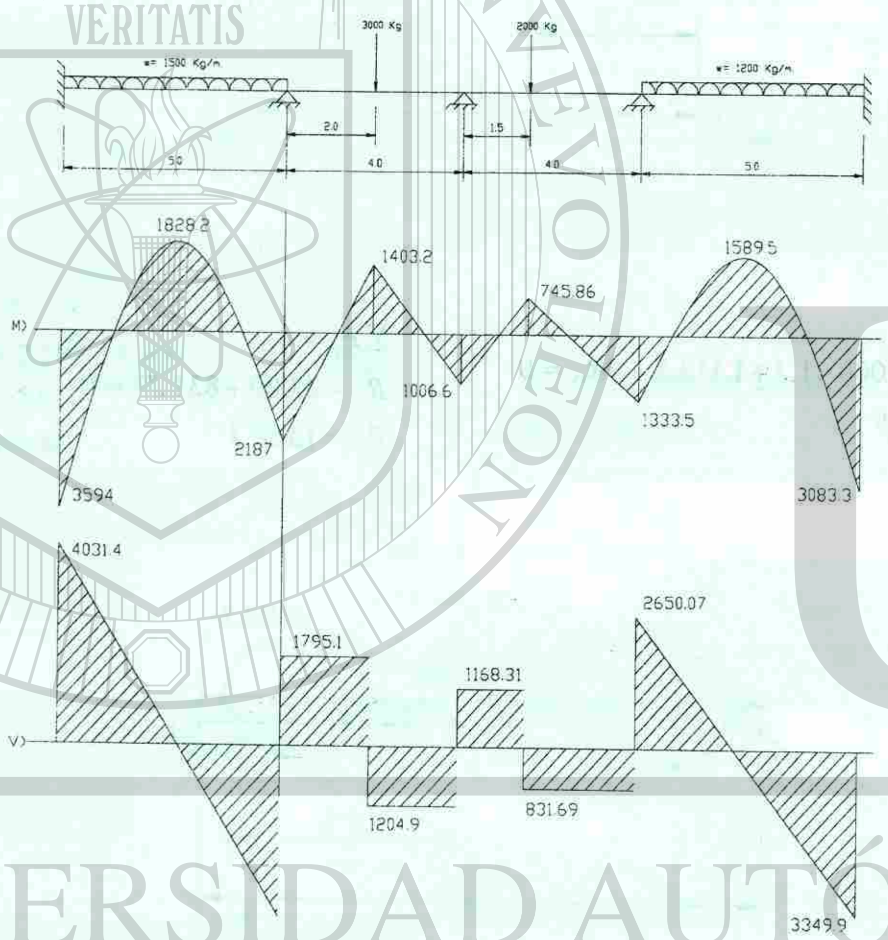
$\sum F_y = 0$

$R_D - 5 \times 1{,}200 + 3{,}349.96 = 0$

$R_D = 2{,}650.04$

R_A = 4,031.4 Kg.
R_B = 3,468.6 + 1,795.1 = 5,263.7 Kg.
R_C = 1,204.9 + 1,168.3 = 2,373.2 Kg.
R_D = 831.73 + 2650.04 = 3,481.77 Kg.
R_E = 3,349.96 Kg.

Diagramas de corte y momentos:



ESTRUCTURAS TIPO MARCO RÍGIDO EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

5.0 INTRODUCCIÓN

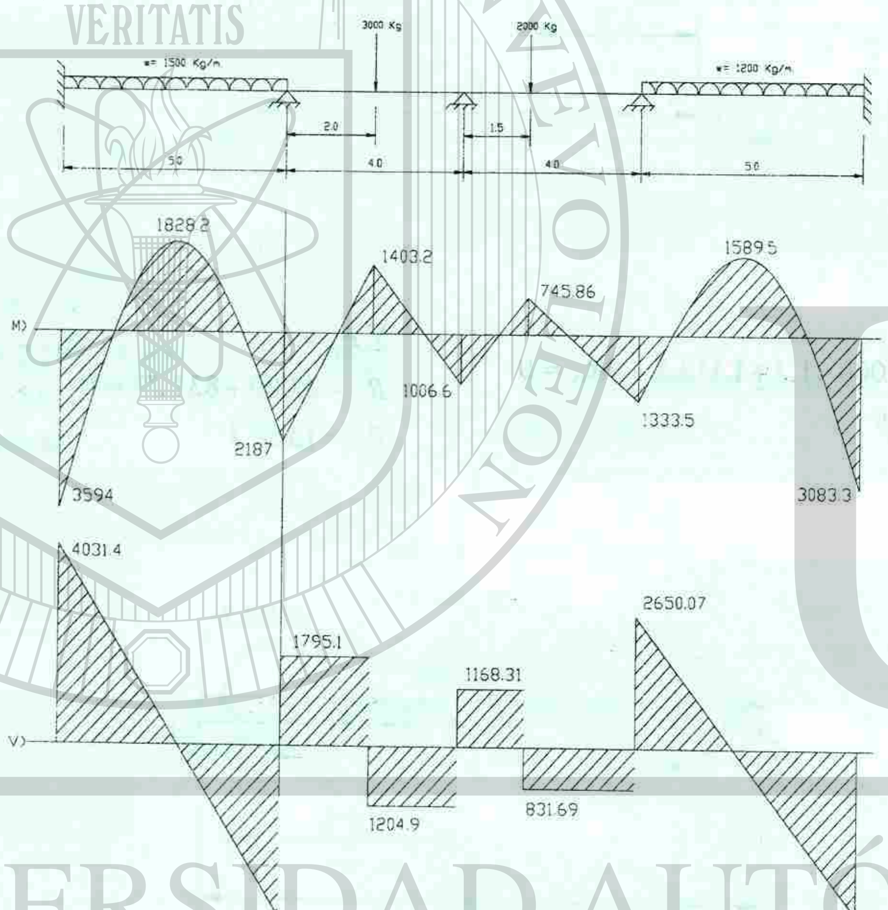
Para facilitar el aprendizaje por parte del lector iniciamos la presentación del método general de rigideces con los casos de estructuras existentes en el hipotético espacio bidimensional, a pesar del hecho de que los seres humanos percibimos y vivimos el espacio tridimensional. Esta simplificación permitió entre otras cosas, trabajar con matrices de rigidez de barra de dimensiones bastante menores a las que hubiéramos tenido que manejar en el espacio tridimensional y en general tuvimos que manejar menos números.

Uno de los mayores problemas introducidos al modelar estructuras en el espacio bidimensional es que no se pueden simular efectos de torsión en las barras que forman la estructura ni tampoco en la estructura trabajando como un todo. Típicamente en el caso que se presenta cuando una estructura es sometida a la acción de un sismo.

Otro problema importante que introdujimos fue el de tener que determinar cual es el "marco representativo" del comportamiento de la estructura completa, además de tener que calcular las fuerzas actuantes sobre este "marco típico". En el caso de naves industriales en que sus "marcos" están ligeramente acoplados, resulta menor el error introducido al modelar toda la estructura con un "marco representativo" en la dirección del marco. En estructuras con "marcos" fuertemente acoplados tales como los edificios de oficinas, este error se vuelve fuertemente significativo, tal como ha sido demostrado en diversos estudios realizados por investigadores del comportamiento de estructuras sometidas a acciones sísmicas.

$R_A = 4{,}031.4$ Kg.
$R_B = 3{,}468.6 + 1{,}795.1 = 5{,}263.7$ Kg.
$R_C = 1{,}204.9 + 1{,}168.3 = 2{,}373.2$ Kg.
$R_D = 831.73 + 2650.04 = 3{,}481.77$ Kg.
$R_E = 3{,}349.96$ Kg.

Diagramas de corte y momentos:



ESTRUCTURAS TIPO MARCO RÍGIDO EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

5.0 INTRODUCCIÓN

Para facilitar el aprendizaje por parte del lector iniciamos la presentación del método general de rigideces con los casos de estructuras existentes en el hipotético espacio bidimensional, a pesar del hecho de que los seres humanos percibimos y vivimos el espacio tridimensional. Esta simplificación permitió entre otras cosas, trabajar con matrices de rigidez de barra de dimensiones bastante menores a las que hubiéramos tenido que manejar en el espacio tridimensional y en general tuvimos que manejar menos números.

Uno de los mayores problemas introducidos al modelar estructuras en el espacio bidimensional es que no se pueden simular efectos de torsión en las barras que forman la estructura ni tampoco en la estructura trabajando como un todo. Típicamente en el caso que se presenta cuando una estructura es sometida a la acción de un sismo.

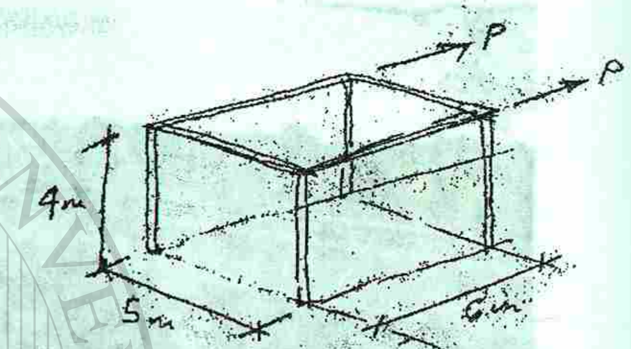
Otro problema importante que introdujimos fue el de tener que determinar cual es el "marco representativo" del comportamiento de la estructura completa, además de tener que calcular las fuerzas actuantes sobre este "marco típico". En el caso de naves industriales en que sus "marcos" están ligeramente acoplados, resulta menor el error introducido al modelar toda la estructura con un "marco representativo" en la dirección del marco. En estructuras con "marcos" fuertemente acoplados tales como los edificios de oficinas, este error se vuelve fuertemente significativo, tal como ha sido demostrado en diversos estudios realizados por investigadores del comportamiento de estructuras sometidas a acciones sísmicas.

En este capítulo se presenta la teoría completa sin la restricción artificial del espacio bidimensional.

5.1 *CASO PARA ESTUDIO:* MESA

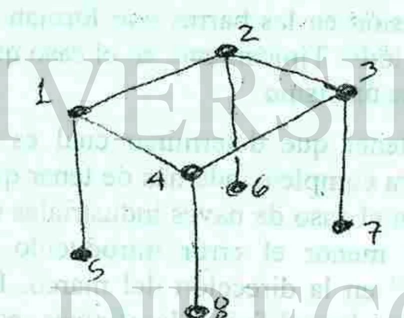
La estructura a analizar tiene la geometría indicada:

Si aplicamos las ideas del Método General de Rigideces, seguiremos el siguiente procedimiento para analizarla:



PASO 1. Identificamos los grados de libertad

Aquí nos encontramos la primera diferencia respecto a las estructuras tipo marco rígido en el espacio bidimensional. Antes necesitamos 3 vectores-desplazamiento (2 de traslación y uno de rotación) para definir el cambio de posición de un punto material cualquiera de nuestra estructura. Ahora necesitaremos 6 vectores-desplazamiento para el mismo fin.



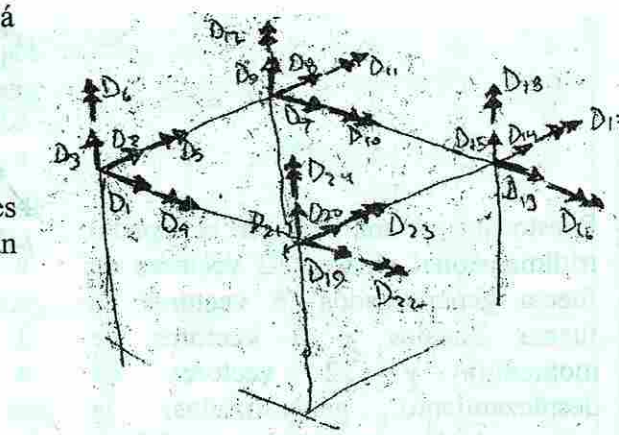
Así, si definimos los puntos de control indicados, tendremos un total de:

8 puntos X 6 vectores posibles = 48 vectores posibles

De estos 48 vectores, algunos deberán estar restringidos, de manera que el sistema sea estable.

Si la base de las cuatro columnas está empotrada, los grados de libertad serán:

24 grados de libertad



y los 24 vectores-desplazamiento posibles en los puntos de control 5, 6, 7 y 8, estarán restringidos, con magnitud cero.

PASO 2. Formar las matrices de rigidez de barra para cada una de las 8 barras que componen la estructura.

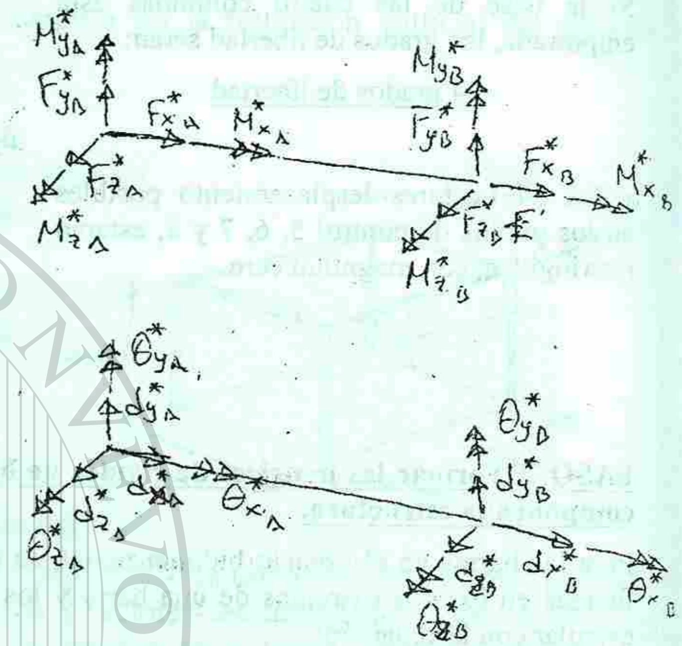
Para las barras en el espacio bidimensional, se encontró que la relación constitutiva entre fuerzas en los dos extremos de una barra y los desplazamientos en los mismos se puede calcular con la ecuación:

$$\begin{Bmatrix} Fx_A^* \\ Fy_A^* \\ Mz_A^* \\ Fx_B^* \\ Fy_B^* \\ Mz_B^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} dx_A^* \\ dy_A^* \\ \Theta z_A^* \\ dx_B^* \\ dy_B^* \\ \Theta z_B^* \end{Bmatrix}$$

o, en notación compacta $\Rightarrow$ $F_b^* = k_b^* \cdot D_b^*$

Para las barras en el espacio tridimensional, esta ecuación es insuficiente, ya que no toma en cuenta a: $dz_A, \Theta x_A, \Theta y_A, dz_B, \Theta x_B, \Theta y_B$.

Así, deberemos encontrar una nueva relación constitutiva entre fuerzas y desplazamientos.



Puesto que en una barra en el espacio tridimensional existen 12 vectores de fuerza generalizados (6 vectores de fuerza lineales y 6 vectores de momento) y 12 vectores de desplazamiento generalizados, la nueva relación constitutiva se deberá expresar mediante una ecuación matricial del siguiente tipo:

$$\begin{Bmatrix} Fx_A^* \\ Fy_A^* \\ Fz_A^* \\ Mx_A^* \\ My_A^* \\ Mz_A^* \\ Fx_B^* \\ Fy_B^* \\ Fz_B^* \\ Mx_B^* \\ My_B^* \\ Mz_B^* \end{Bmatrix} = \Big[\text{Nueva Matriz De Rigidez De Barra} \Big] \bullet \begin{Bmatrix} dx_A^* \\ dy_A^* \\ dz_A^* \\ \Theta x_A^* \\ \Theta y_A^* \\ \Theta z_A^* \\ dx_B^* \\ dy_B^* \\ dz_B^* \\ \Theta x_B^* \\ \Theta y_B^* \\ \Theta z_B^* \end{Bmatrix}$$

La matriz de rigidez de barra contiene 144 elementos, de los cuales, 36 son los que ya conocemos para el caso de la matriz de rigidez de barra del espacio bidimensional.

La tarea siguiente es calcular los 108 elementos restantes. Siguiendo un procedimiento análogo al empleado al inicio del capítulo 4, se puede demostrar que la nueva matriz contiene los siguientes elementos:

$$\begin{Bmatrix} Fx_A^* \\ Fy_A^* \\ Fz_A^* \\ Mx_A^* \\ My_A^* \\ Mz_A^* \\ Fx_B^* \\ Fy_B^* \\ Fz_B^* \\ Mx_B^* \\ My_B^* \\ Mz_B^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_Z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_Z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_Z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_Z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_Y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_Y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_Z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_Z}{L} & 0 & -\frac{6EI_Z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_Z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_Z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_Z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_Z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_Z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_Y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_Y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_Y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_Z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_Z}{L} & 0 & -\frac{6EI_Z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_Z}{L} \end{bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} dx_A^* \\ dy_A^* \\ dz_A^* \\ \Theta x_A^* \\ \Theta y_A^* \\ \Theta z_A^* \\ dx_B^* \\ dy_B^* \\ dz_B^* \\ \Theta x_B^* \\ \Theta y_B^* \\ \Theta z_B^* \end{Bmatrix}$$

Usando la relación constitutiva para barras en el espacio tridimensional, manejaremos la siguiente ecuación para cada barra:

$$F_{b12x1}^* = k_{b12x12}^* \cdot D_{b12x1}^*$$

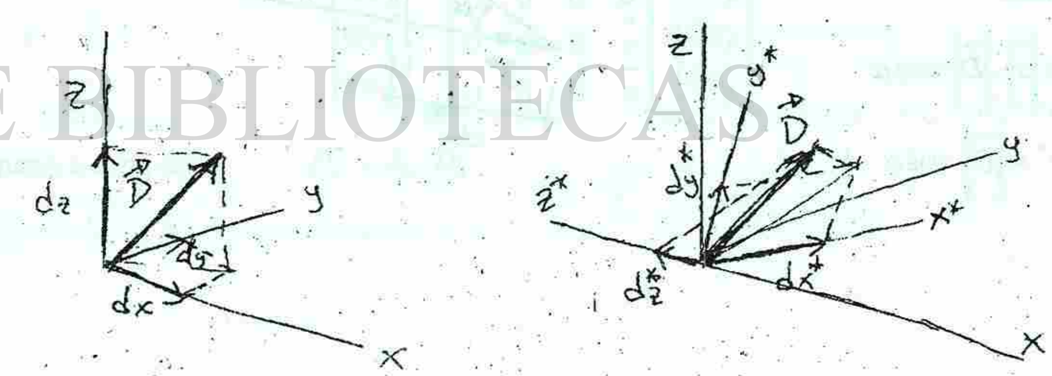
Así, calculamos 8 ecuaciones matriciales, una por cada barra que compone la estructura estudiada.

PASO 3. Ensamble de las rigideces de cada barra para formar la matriz de rigidez ensamblada.

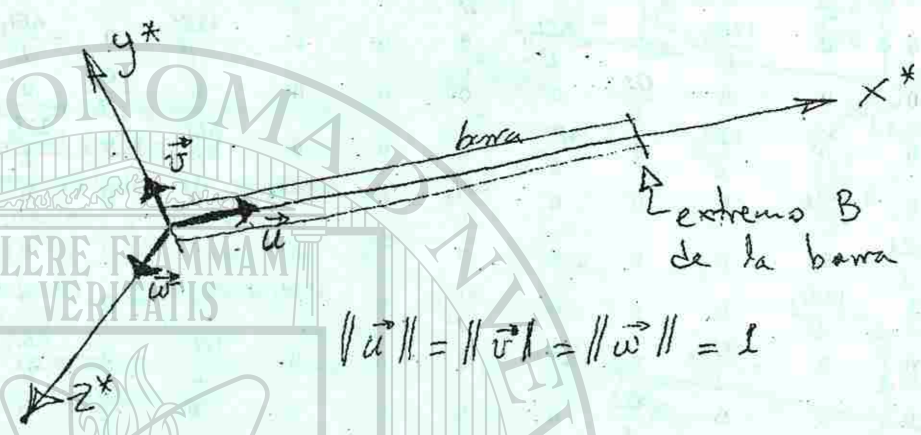
Análogamente al espacio bidimensional, en general, necesitamos transformar los vectores de fuerza y desplazamiento a un sistema común de referencia para así poder sumar directamente los vectores de cada una de las 8 barras.

Manejaremos el concepto de matriz "A" de transformación, el cual nos permitirá "transformar" el vector de desplazamientos generalizado, de su representación en coordenadas globales a locales de la barra:

$$\vec{D} = dx \cdot i + dy \cdot j + dz \cdot k \qquad \Rightarrow \qquad \vec{D} = dx^* \cdot u + dy^* \cdot v + dz^* \cdot w$$



Para realizar esta operación, primero definiremos un sistema de 3 vectores ortogonales unitarios, alineados con los ejes de coordenadas locales de cada barra:



$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1$

El vector $\vec{u}$ es el vector $\vec{b}$ unitario de barra que definimos en el capítulo 3 para las armaduras en el espacio tridimensional:

$$\vec{u} = \vec{b} = \frac{\Delta x}{L}\cdot i + \frac{\Delta y}{L}\cdot j + \frac{\Delta z}{L}\cdot k$$

el vector $\vec{w}$ se obtiene fácilmente, realizando el producto cruz:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$$

Así, el verdadero problema es encontrar el vector $\vec{v}$.

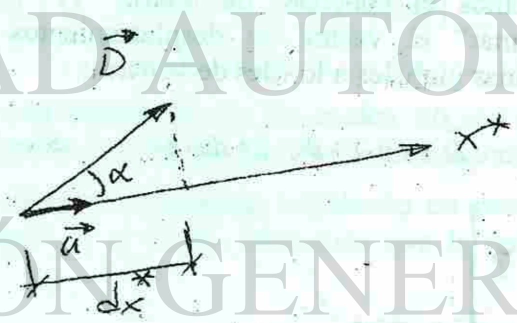
Por lo pronto, dejaremos pendiente este problema, y supondremos que lo podemos calcular.

Ahora, podemos realizar la transformación del vector $\vec{D}$ de la siguiente forma (este mismo camino seguimos en el capítulo 3):

La componente de $\vec{D}$ sobre el eje local x^* es:

$$dx^* = \vec{u}\cdot\vec{D}$$

$$si \quad \left|\vec{u}\right| = 1$$



entonces:

$$dx^* = \left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{D}\right|\cdot\cos\alpha$$

$$¡\quad dx^* = \left|\vec{D}\right|\cdot\cos\alpha \quad !$$

las otras dos componentes son:

$$dy^* = \vec{v}\cdot\vec{D}$$

$$dz^* = \vec{w}\cdot\vec{D}$$

En notación matricial:

$$\begin{Bmatrix} dx^* \\ dy^* \\ dz^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} \qquad (en\ notación\ compacta) \quad \Rightarrow \quad \vec{D}^* = \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix}\cdot\vec{D}$$

$$o \quad D^* = A\cdot D$$

$$donde \quad A = \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix}$$

así, una vez conocidos los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, la transformación de vectores desplazamiento es inmediata.

Considerando que la barra tiene dos extremos y en cada uno tiene 3 vectores de desplazamiento de traslación y 3 vectores de rotación, podemos definir la siguiente relación:

$$\begin{Bmatrix} dx_A^* \\ dy_A^* \\ dz_A^* \\ \Theta x_A^* \\ \Theta y_A^* \\ \Theta z_A^* \\ dx_B^* \\ dy_B^* \\ dz_B^* \\ \Theta x_B^* \\ \Theta y_B^* \\ \Theta z_B^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{u} & 0 & 0 & 0 \\ \vec{v} & 0 & 0 & 0 \\ \vec{w} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vec{u} & 0 & 0 \\ 0 & \vec{v} & 0 & 0 \\ 0 & \vec{w} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vec{u} & 0 \\ 0 & 0 & \vec{v} & 0 \\ 0 & 0 & \vec{w} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vec{u} \\ 0 & 0 & 0 & \vec{v} \\ 0 & 0 & 0 & \vec{w} \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} dx_A \\ dy_A \\ dz_A \\ \Theta x_A \\ \Theta y_A \\ \Theta z_A \\ dx_B \\ dy_B \\ dz_B \\ \Theta x_B \\ \Theta y_B \\ \Theta z_B \end{Bmatrix}$$

de manera compacta: $\quad D_b^* = A_b\cdot D_b$

donde: $D_b^* =$ desplazamientos de los extremos de la barra, en coordenadas locales.

$D_b =$ desplazamientos de los extremos de la barra, en coordenadas globales.

Se puede demostrar que:

$$F_b = A_b^T \cdot F_b^*$$

Finalmente podemos expresar la oposición que ofrece cada barra a ser deformada, componentes de fuerza referidas a un mismo sistema de referencia, el sistema x, y, z de ejes de coordenadas globales.

Para una barra cualquiera, sustituyendo $F_b^* = k_b^* \cdot D^*$ y $D^* = A_b \cdot D_b$ en la ecuación anterior, resulta:

$$F_b = \left[A_b^T \cdot k_b^* \cdot A_b\right] \cdot D_b$$

si denominamos a $k_b = A_b^T \cdot k_b^* \cdot A_b$ como la matriz de rigidez global de la barra, entonces:

$$F_b = k_b \cdot D_b$$

ecuación que define a un conjunto de 12 vectores de fuerza paralelos a los ejes globales x, y, z.

Ahora estamos listos para formar la matriz de rigidez ensamblada, sumando las *oposiciones* de todas las barras, calculadas con la ecuación anterior.

PASO 4. Cálculo de la magnitud de los grados de libertad.

A partir de aquí, se sigue el mismo procedimiento para manipular la ecuación matricial resultante del ensamble del paso anterior.

Así obtendremos: $F_U = K_{11U} \cdot D_U + K_{12R} \cdot D_R$,

de donde podremos calcular: $D_U = K_{11U}^{-1}(F_U - K_{12R} \cdot D_R)$,

conocido D_U, se podrán calcular las reacciones mediante la ecuación:

$$F_R = K_{21U} \cdot D_U + K_{22R} \cdot D_R$$

PASO 5. Cálculo de las fuerzas en los extremos de cada una de las barras.

Las fuerzas en los 2 extremos de cada barra, se podrá calcular a partir de la ecuación:

$$F_b^* = k_b^* \cdot D_b^* = k_b^* \cdot A_b \cdot D_b$$

Donde los componentes del vector D_b se obtienen directamente del vector D_U, calculado en el paso anterior.

Obtención de vectores unitarios $\vec{v}$ y $\vec{w}$

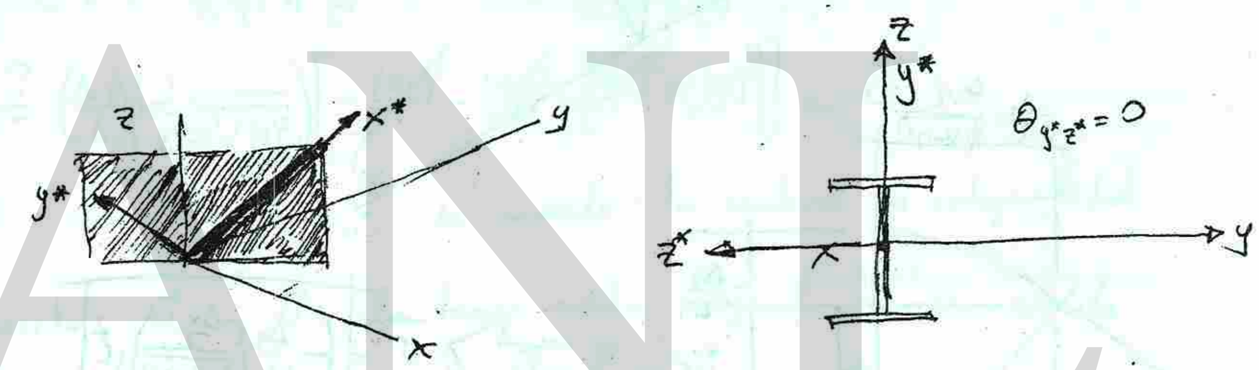
Antes de aplicar el procedimiento descrito, terminaremos el asunto pendiente del cálculo de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

Los componentes del vector $\vec{v}$ están determinados por el giro de la barra alrededor de su eje longitudinal, X^*, respecto a algún origen convencional.

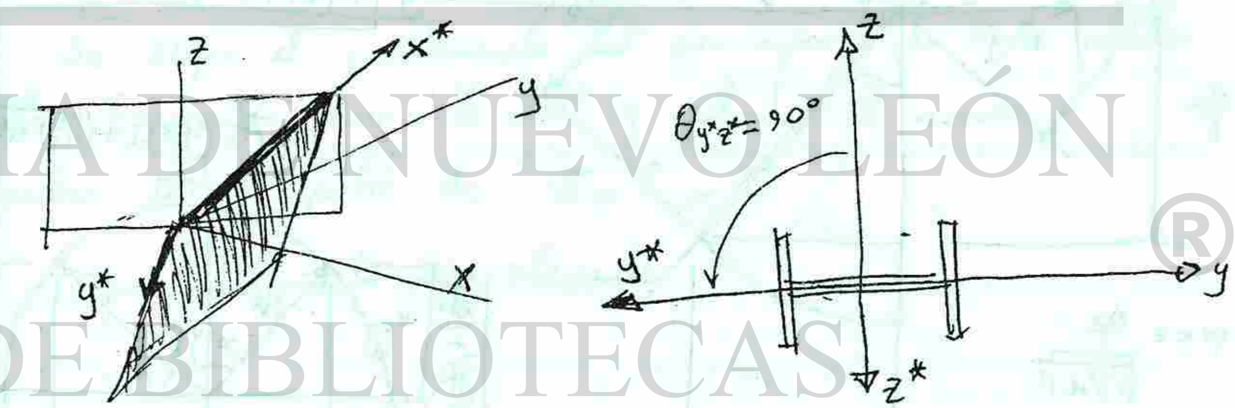
Cálculo del vector $\vec{v}$

Se calculará el vector $\vec{v}$ para dos casos especiales:

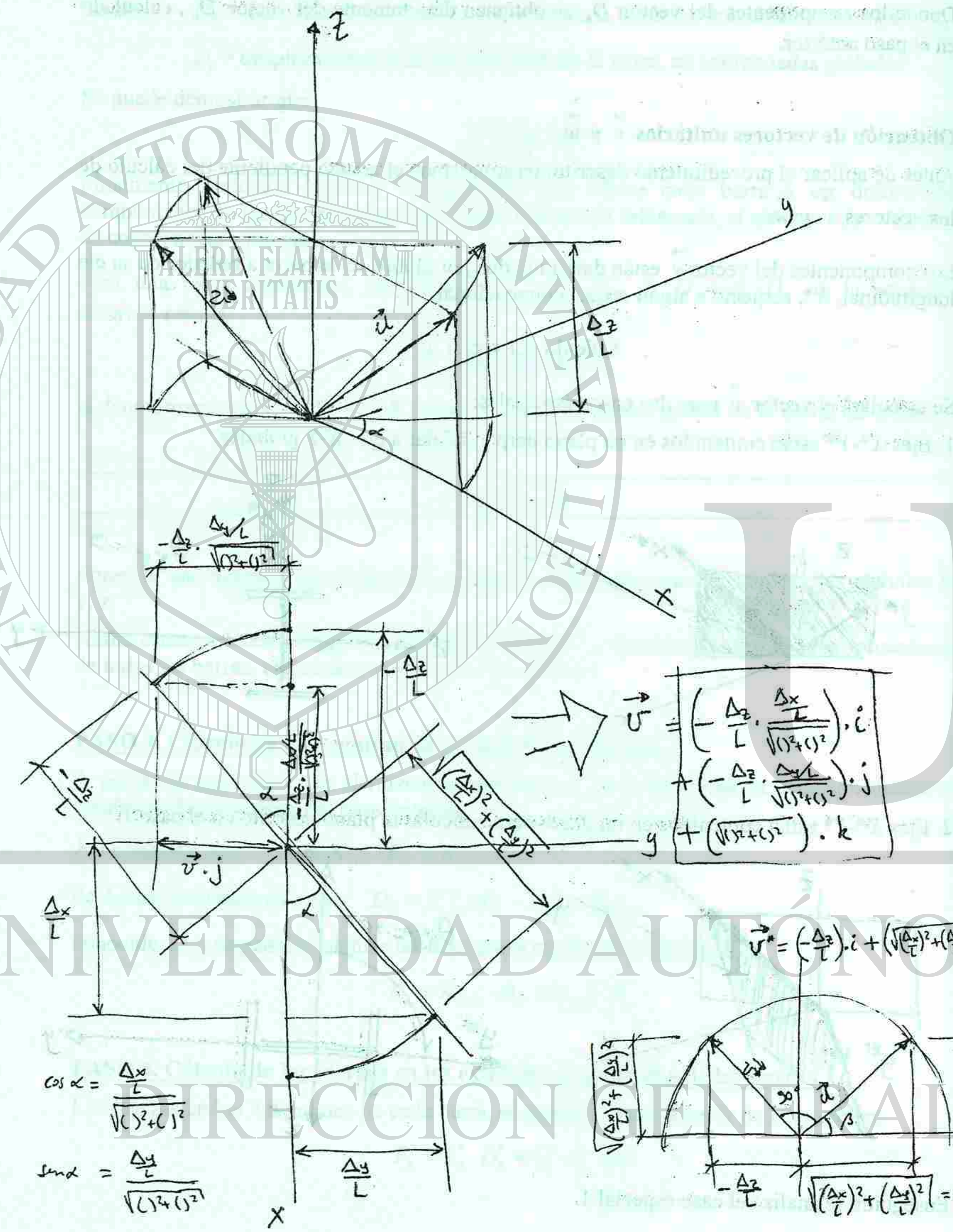
1. Ejes X^*-Y^* están contenidos en un plano perpendicular a ejes X-Y globales.



2. Ejes X^*-Y^* están contenidos en un plano perpendicular al plano descrito en el caso 1.



Enseguida se analiza el caso especial 1.



condición especial: barra es colineal con eje Z.

$$\Rightarrow \vec{v} = -1 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k$$

Prueba de ortogonalidad entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff$ son ortogonales

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(\frac{\Delta x}{L} i + \frac{\Delta y}{L}\cdot j + \frac{\Delta z}{L} k\right)\cdot\left(-\frac{\Delta z}{L}\frac{\Delta x/L}{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{L}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{L}\right)^2}}\cdot i - \frac{\Delta z}{L}\frac{\Delta y/L}{\sqrt{\quad}}\cdot j + \sqrt{\quad}\cdot k\right)$$

$$0 \stackrel{?}{=} \left(-\frac{\Delta z}{L}\right)\left(\frac{\Delta x}{L}\right)^2\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{L}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{L}\right)^2}} - \left(\frac{\Delta z}{L}\right)\left(\frac{\Delta y}{L}\right)^2\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{L}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{L}\right)^2}} + \left(\frac{\Delta z}{L}\right)\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{L}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{L}\right)^2}$$

$$0 \stackrel{?}{=} \left(\frac{\Delta z}{L}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{L}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{L}\right)^2}}\right)\left[\cancel{-\left(\frac{\Delta x}{L}\right)^2}\cancel{-\left(\frac{\Delta y}{L}\right)^2}+\cancel{\left(\frac{\Delta x}{L}\right)^2}+\cancel{\left(\frac{\Delta y}{L}\right)^2}\right] = 0$$

$\therefore$ se cumple la condición de ortogonalidad

Conocidos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ el tercer vector ortogonal, $\vec{w}$, se calcula a través del producto cruz: $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{w}$

CASO ESPECIAL 2

Se sigue el procedimiento del caso especial 1 hasta calcular $\vec{w}^*$. Enseguida hacer $\vec{v} = \vec{w}^*$ y calcular el nuevo vector $\vec{w}$ a partir de $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{w}$

Otro procedimiento mas eficiente

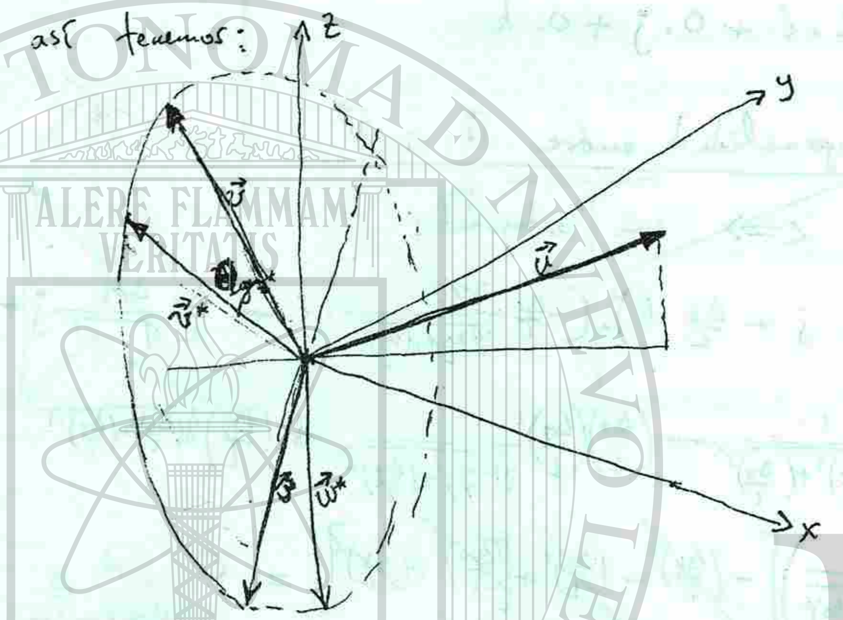
$$\vec{v} = \vec{w}^*$$

$$\vec{w} = -\vec{v}^*$$

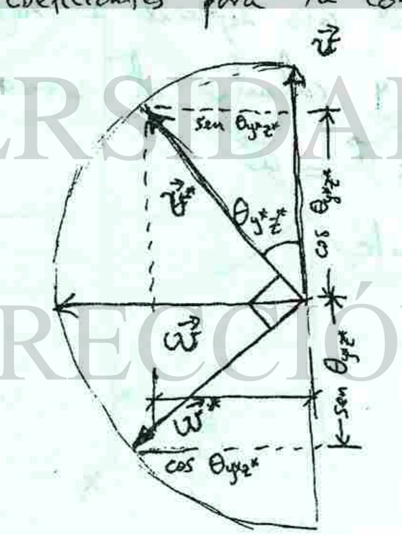
Caso General de Giro $\theta_{yz^*} \neq 0°$ y $\theta_{yz^*} \neq 90°$

Primero calculamos $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ considerando que $\theta_{yz^*} = 0$

así tenemos:



Ahora rotamos los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ el ángulo θ_{yz} especificado para la barra. De esta rotación surgen los vectores $\vec{v}^*$ y $\vec{w}^*$. Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ definen un subespacio en el que tienen que estar contenidos los vectores $\vec{v}^*$ y $\vec{w}^*$, así que estos se pueden calcular mediante una combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Los coeficientes para la combinación se calculan así:



$$\vec{v}^* = \cos\theta \cdot \vec{v} + \operatorname{sen}\theta \cdot \vec{w}$$

$$\vec{w}^* = -\operatorname{sen}\theta \cdot \vec{v} + \cos\theta \cdot \vec{w}$$

GLOSARIO DE TERMINOS TECNICOS

Acción (ver reacción): Se le llama así al fenómeno físico que ocurre cuando interactúan dos cuerpos. Esta interacción puede ser del tipo gravitatorio, inercial, electromagnético.

Ejemplo de acciones gravitatorias es la "atracción"de los cuerpos hacia el centro de gravedad de nuestro planeta.

Ejemplo de acción inercial puede ser la acción del viento (masas de aire en movimiento) sobre la superficie expuesta de los edificios.

Barra: Elemento estructural en que una de sus tres dimensiones es 5 veces mayor que cualquiera de las otras dos. La barra puede ser recta o curva, prismática o no prismática. Durante los cursos previos de mecánica de materiales se ha estudiado intensamente este tipo de elementos, demostrándose la validez de modelos matemáticos que permiten cuantificar las deformaciones y esfuerzos que se originan en el, o los, materiales que la componen cuando es sometida a la acción de diversos tipos de fuerzas.

Barra recta: Barra en que su dimensión mayor es rectilínea. En éste curso analizaremos únicamente barras rectas, aunque debe notarse que la teoría presentada es aplicable a barras no rectas.

Barra recta Prismática: Barra recta en que sus dos dimensiones menores son constantes a lo largo de su dimensión mayor, es decir, su sección transversal no cambia de tamaño.

Barra recta No prismática: Barra recta en que una o sus dos dimensiones menores varían a lo largo de su dimensión mayor, es decir, su sección transversal es variable.

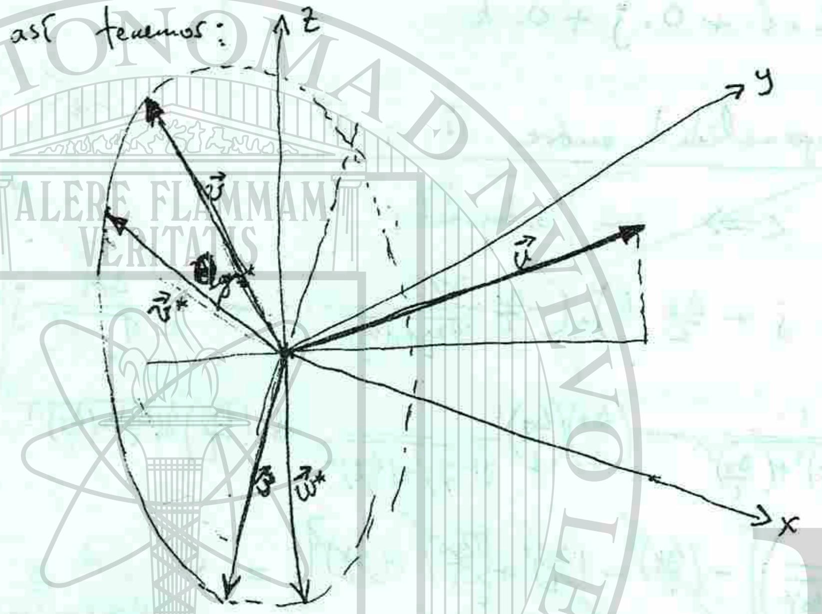
Comportamiento: En el contexto del análisis estructural, se utiliza este término para describir la manera en que reacciona un cuerpo deformable, hecho con cualquier material, cuando es sometido a la acción de fuerzas. Ejemplo: es el modo característico de deformarse y agrietarse de un material tal como el concreto cuando se utiliza para formar una viga en flexión.

Comportamiento elástico lineal: Es el *comportamiento* observado en un material cuando la deformación es directamente proporcional a la fuerza aplicada, y, al desaparecer la fuerza, el material recupera completamente su forma original, sin deformación permanente o residual. Para algunos materiales son casi idénticos los valores numéricos del límite elástico y del límite de proporcionalidad, por lo que a veces son considerados sinónimos.

Caso General de Giro $\theta_{yz^*} \neq 0°$ y $\theta_{yz^*} \neq 90°$

Primero calculamos $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ considerando que $\theta_{yz^*} = 0$

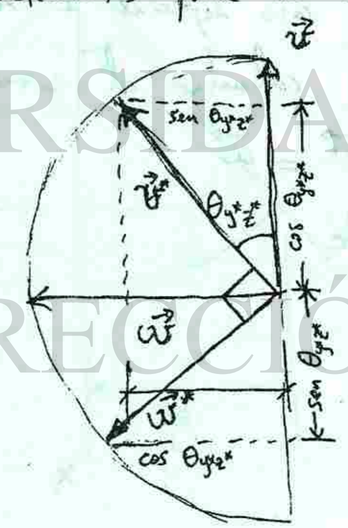
así tenemos:



Ahora rotamos los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ el ángulo θ_{yz} especificado para la barra. De esta rotación surgen los vectores $\vec{v}^*$ y $\vec{w}^*$.

Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ definen un subespacio en el que tienen que estar contenidos los vectores $\vec{v}^*$ y $\vec{w}^*$, así que estos se pueden calcular mediante una combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

Los coeficientes para la combinación se calculan así:



$$\vec{v}^* = \cos\theta \cdot \vec{v} + \sin\theta \cdot \vec{w}$$

$$\vec{w}^* = -\sin\theta \cdot \vec{v} + \cos\theta \cdot \vec{w}$$

GLOSARIO DE TERMINOS TECNICOS

Acción (ver reacción): Se le llama así al fenómeno físico que ocurre cuando interactúan dos cuerpos. Esta interacción puede ser del tipo gravitatorio, inercial, electromagnético.

Ejemplo de acciones gravitatorias es la "atracción" de los cuerpos hacia el centro de gravedad de nuestro planeta.

Ejemplo de acción inercial puede ser la acción del viento (masas de aire en movimiento) sobre la superficie expuesta de los edificios.

Barra: Elemento estructural en que una de sus tres dimensiones es 5 veces mayor que cualquiera de las otras dos. La barra puede ser recta o curva, prismática o no prismática. Durante los cursos previos de mecánica de materiales se ha estudiado intensamente este tipo de elementos, demostrándose la validez de modelos matemáticos que permiten cuantificar las deformaciones y esfuerzos que se originan en el, o los, materiales que la componen cuando es sometida a la acción de diversos tipos de fuerzas.

Barra recta: Barra en que su dimensión mayor es rectilínea. En éste curso analizaremos únicamente barras rectas, aunque debe notarse que la teoría presentada es aplicable a barras no rectas.

Barra recta Prismática: Barra recta en que sus dos dimensiones menores son constantes a lo largo de su dimensión mayor, es decir, su sección transversal no cambia de tamaño.

Barra recta No prismática: Barra recta en que una o sus dos dimensiones menores varían a lo largo de su dimensión mayor, es decir, su sección transversal es variable.

Comportamiento: En el contexto del análisis estructural, se utiliza este término para describir la manera en que reacciona un cuerpo deformable, hecho con cualquier material, cuando es sometido a la acción de fuerzas. Ejemplo: es el modo característico de deformarse y agrietarse de un material tal como el concreto cuando se utiliza para formar una viga en flexión.

Comportamiento elástico lineal: Es el *comportamiento* observado en un material cuando la deformación es directamente proporcional a la fuerza aplicada, y, al desaparecer la fuerza, el material recupera completamente su forma original, sin deformación permanente o residual. Para algunos materiales son casi idénticos los valores numéricos del límite elástico y del límite de proporcionalidad, por lo que a veces son considerados sinónimos.

Comportamiento elasto-plástico: Es el *comportamiento* hipotético que se presenta en un material cuando, para una fuerza actuante menor de la correspondiente al límite de proporcionalidad, el material tiene un *comportamiento elástico lineal*, y, para una fuerza ligeramente mayor a la del límite de proporcionalidad, el material *fluye*, aumentando su deformación hasta alcanzar la deformación correspondiente a la de falla. Los materiales reales tal como el acero estructural no tienen un comportamiento elasto-plástico perfecto, sin embargo, se suele modelar al material como si lo fuera. i.e. en el diseño de estructuras de concreto reforzado con acero.

Cuerpo deformable: Se dice de los cuerpos formados por materiales reales, y, su capacidad de deformarse, es una propiedad de todos los cuerpos formados con cualquier material imaginable en el Universo. Al menos desde el punto de vista científico y objetivo.

Cuerpo rígido: Se dice de los cuerpos formados por un material que no se deforma cuando sobre él actúan fuerzas. En el mundo natural NO existe este tipo de material, sin embargo, durante el modelado matemático del mundo físico, en ocasiones, es conveniente modelarlo así, para lograr un modelo matemático simple.

Deformación unitaria: Es el alargamiento o contracción de un material a lo largo de una línea recta por cada unidad de longitud del material. Es un parámetro adimensional.

Degradación de resistencia: Es la disminución gradual, sin recuperar nunca su magnitud original, de la magnitud de la fuerza a la que se inicia la cedencia del material sometido a la acción de fuerzas cíclicas reversibles. Típicamente se observa en las estructuras que sufren la acción de un sismo intenso.

Degradación de rigidez: Es la disminución gradual, sin recuperar nunca su magnitud original, del módulo de elasticidad en un material sometido a la acción de fuerzas cíclicas reversibles. Típicamente se observa en las estructuras que sufren la acción de un sismo intenso.

Desplazamiento axial: Es una magnitud vectorial que se usa para medir el movimiento de una partícula o punto respecto a su posición original, a lo largo del eje más largo del elemento. Típicamente, en una barra recta.

Desplazamiento al giro (rotación): Es una magnitud vectorial que se usa para medir el movimiento de rotación de una partícula o punto respecto a su posición original.

Energía: Se define como, la capacidad que tiene un cuerpo material de realizar trabajo.

Energía Cinética: Es la energía que posee una partícula debido a su movimiento. Se calcula como un medio del producto de la masa del objeto por el cuadrado de su velocidad.

Energía Elástica: Se dice de la energía que se "almacena" en un material de comportamiento elástico, completo o parcial.

Energía Potencial: Energía de un cuerpo respecto a algún sistema inercial de referencia, se mide en virtud de su posición relativa a dicho sistema inercial.

Estructura: Para los fines de este curso, una estructura es un conjunto interconectado de barras que, trabajando en conjunto, resisten la acción de las fuerzas que actúan sobre ella.

Fluencia: Es cuando un material sometido a algún tipo de acción, sufre deformaciones de tal magnitud que hay un corrimiento relativo entre los cristales que forman el material, y, este corrimiento no desaparece cuando cesa la acción.

Fuerza: Representa la acción de un cuerpo sobre otro y puede ejercerse por "contacto real" o a distancia, como en el caso de las fuerzas gravitacionales y magnéticas. Una fuerza se caracteriza por su punto de aplicación, su magnitud, dirección, y sentido, y, matemáticamente, se representa por un vector.

Hiperestática: Estructura estáticamente indeterminada. No se puede conocer su estado de esfuerzos internos o reacciones en los apoyos solo con las leyes de la estática.

Isostática: Estructura estáticamente determinada. Se puede conocer su estado de esfuerzos internos o reacciones en los apoyos solo con las leyes de la estática.

Ley de Hooke: Es la constante de proporcionalidad entre esfuerzos y deformaciones en materiales de comportamiento elástico lineal. $\varepsilon=\sigma/E$

Matriz: Es un ente matemático representado como un arreglo rectangular de números formado por "m" hileras y "n" columnas.

Matriz de transformación: Es la matriz introducida en el análisis de estructuras formadas por barras, la cual nos posibilita cambiar la representación de un conjunto de vectores ortogonales de su representación en un sistema de coordenadas global a uno local, y viceversa.

Matriz vector columna: Es una matriz con elementos dispuestos en una sola columna.

Matriz vector renglón: Es una matriz con elementos dispuestos en un solo renglón.

Medio continuo: Es la materia que le da forma a una estructura y en la teoría del análisis estructural cumple con la condición matemática de continuidad. Es decir, se pueden definir funciones matemáticas que cuantifiquen sus deformaciones y esfuerzos en cualquier punto del material y que simultáneamente cumplan con las condiciones matemáticas necesarias para una función continua.

Se supondrá que la materia de un cuerpo es homogénea y está distribuida continuamente sobre su volumen, de manera tal que el mas pequeño elemento cortado de la misma, posee las mismas propiedades físicas que el resto de la estructura. Además se supondrá que el material es isotrópico, es decir, que las propiedades mecánicas son las mismas en cualquier dirección.

Modelo matemático: Es una ecuación matemática que intenta predecir la magnitud de una variable física, cuando un conjunto de condiciones físicas se cumplen. Como ingenieros tenemos la responsabilidad y necesidad de verificar la validez de los modelos matemáticos que utilizamos en la práctica diaria de la ingeniería.

El "juez" que decide esta validez es el trabajo experimental durante el cual se realiza la comparación de lo calculado, con estos modelos, contra lo medido en estructuras reales o prototipos de laboratorio. Solo así podemos estar razonablemente seguros de que nuestros modelos matemáticos son válidos y representativos de lo que ocurre en la naturaleza.

Reacción: Es la fuerza inducida en los apoyos de una estructura cuando sobre ella actúan fuerzas externas o de cuerpo.

Rigidez: Es la oposición (resistencia) que ofrece una estructura a ser deformada cuando sobre ella actúan fuerzas. Esta rigidez la calculamos a partir de las propiedades geométricas de la estructura y de las propiedades mecánicas del material que la forma, y se mide en unidades de fuerza/desplazamiento o momento/giro.

Rigidez Axial: En el caso de las barras rectas, es la oposición que ofrece la barra a ser deformada a lo largo de su eje longitudinal cuando sobre ella actúa una fuerza longitudinal.

Rigidez Al giro: En el caso de las barras, es la oposición que ofrece un extremo de la barra a ser rotado debido a la acción de un momento flexionante en dicho extremo.

Rigidez al Cortante: En el caso de las barras, es la oposición que ofrece un extremo de la barra a ser desplazado transversalmente a su eje longitudinal debido a la acción de una fuerza transversal en dicho extremo.

FACULTAD DE INGENIERIA
CIVIL