1.2 PROBLEMA GENERAL DEL ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS

Ya que esta asignatura de la carrera de Ingeniero Civil se denomina análisis de estructuras, parece razonable ponerse de acuerdo en lo que entenderemos de aquí en adelante como ***analizar una estructura.***

Analizar una estructura es cuantificar completamente l siguiente:	
$\{\in\}$	Deformaciones unitarias del medio continuo que la forma.
$\{\sigma\}$	Esfuerzos asociados a las deformaciones sufridas por el medio continuo.
$\{\mathbf{d}\}$	Desplazamientos de los diferentes puntos del medio continuo que forma la estructura.

para realizar el análisis de una estructura, necesitamos conocer la siguiente información:

- $\{F\}$ Las fuerzas externas actuantes sobre la estructura y las fuerzas de cuerpo (peso propio, inercia, cambios de temperatura.)
- $[k]$ La *Rigidez* del medio continuo que forma la estructura.
- Las condiciones de frontera de la estructura. Así denominamos a las restricciones al desplazamiento impuestas por los soportes de la estructura.

Como ya se dijo en el artículo 1.0, el proceso de analizar una estructura es un paso previo al proceso de revisar que en todos los puntos materiales de la misma, se cumpla la ecuación básica del diseño estructural:

Acciones < Resistencias

En esta ecuación hay dos términos:

- El segundo se aprenderá a calcularlo en cursos posteriores de la carrera de Ingeniero Civil, tales como: Diseño de Estructuras de Concreto Reforzado, Diseño de Estructuras de Acero, Diseño de Puentes, etc.
- En cuanto al primer término, es tema de esta asignatura el aprender como cuantificarlas, complementando lo aprendido en cursos previos de: estática, mecánica de materiales (resistencia de materiales) y análisis de estructuras.

Dedicaremos el 100% de este curso al aprendizaje de una técnica matemática eficiente para el cálculo de las acciones (internas) de la estructura. Esta técnica la conoceremos como:

El Método General de Rigideces.

La utilizaremos para el análisis de estructuras que se puedan modelar exclusivamente con barras rectas.

Por supuesto, aparte de calcular las acciones internas en la estructura, tendremos que calcular las deformaciones internas y los desplazamientos de las estructuras, información que será útil cuando tengamos que revisar que los desplazamientos no excedan los máximos permisibles.

Las magnitudes aceptables de acciones internas y de desplazamientos, se obtienen de las recomendaciones de diseño plasmadas en los reglamentos de diseño.

Todo este proceso se puede interpretar de la siguiente forma: Al realizar modelos en nuestros escritorios de trabajo, modelos a partir de los cuales intentamos predecir las magnitudes máximas de esfuerzos y deformaciones, que podría tener la estructura que pretendemos construir, buscamos corregir nuestra idea original de estructura, modificándola como sea necesario, para lograr controlar dichas magnitudes máximas, y , todo esto, sin haber instalado un solo ladrillo de la estructura real.

Una vez realizado el proceso anterior, a satisfacción nuestra y de los reglamentos de construcción aplicables, finalmente, podemos proceder a construir el edificio, puente, bodega, o cualquier otra cosa que nos ocupe; con una razonable confianza en que funcionará correctamente y tendrá un nivel de seguridad estructural aceptable.

1.3 PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DEL ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS Y SU APLICACIÓN

Para poder realizar el análisis racional de las estructuras, debemos recurrir al uso de las herramientas matemáticas disponibles, basando nuestras deducciones en el conocimiento profundo de la "*naturaleza de las cosas*".

Este análisis racional debe basarse en los siguientes:

PRINCIPIOS LÓGICOS FUNDAMENTALES

1. Existe equilibrio estático en los sistemas estructurales estudiados.
2. Todos los sistemas estudiados están formados por un *medio* (material) *continuo*.
3. Sus razonamientos deben ser objetivos.
4. Busca congruencia en sus deducciones.
5. Busca que los resultados calculados coincidan (tanto como sea posible) con mediciones en experimentos controlados.

Enseguida explicamos la naturaleza de cada uno de estos principios lógicos:

PRINCIPIOS FÍSICOS

1 Principio de equilibrio estático (de fuerzas).

En realidad, este principio se refiere al equilibrio dinámico, sin embargo, en este curso, nos preocuparemos solo del equilibrio estático, es decir, cuando las fuerzas de inercia son nulas. Por supuesto esto es relativo a un sistema inercial de referencia, es decir, un sistema de referencia que se mueva a la misma velocidad que nuestra estructura. Para fines prácticos, podemos tomar como sistema de referencia el globo terrestre.

Este principio fue expresado por Newton en el año de 1687 en el primer libro de su tratado *Philosophiae Naturalis Principia Matemática*. En terminos matemáticos se puede expresar como:

$$\text{fuerzas externas} + \text{fuerzas internas} = \text{cero}$$

Este principio expresa, matemáticamente, la condición de las estructuras que nos interesa construir: NO SE MUEVEN respecto al sistema inercial de referencia (la tierra).

2 Principio de coincidencia con la realidad sensible.

Por supuesto que la teoría matemática, sus axiomas y sus conclusiones, deben conducirnos a resultados que puedan ser comprobados experimentalmente, buscando que la diferencia entre las magnitudes calculadas *versus* las magnitudes medibles en un experimento controlado, tengan un margen de error tolerable por la práctica profesional de la ingeniería Civil, posiblemente menor del 10%. Este principio de coincidencia está obligado por el uso del método científico, el cual postula la objetividad de nuestras conclusiones.

PRINCIPIOS MATEMÁTICOS

1 Principio del Medio Continuo.

**El ingeniero suele enfrentarse a muchos problemas mecánicos cuya solución no puede obtenerse por medio de la mecánica de los puntos materiales y de los cuerpos rígidos. Ejemplos de tales problemas son los que surgen al analizar flexiones o torsiones de trabes y columnas, consolidación o deslizamiento de masas de suelo, vibración de maquinaria, escurrimiento de líquidos y gases. Todos estos casos se relacionan con medios deformables caracterizados por el hecho de que sus átomos o moléculas están tan próximos unos a otros que el material puede considerarse, macroscópicamente, como una masa homogénea, cuyas deformaciones deben poder preverse sin necesidad de considerar el movimiento de cada una de las partículas que la componen.

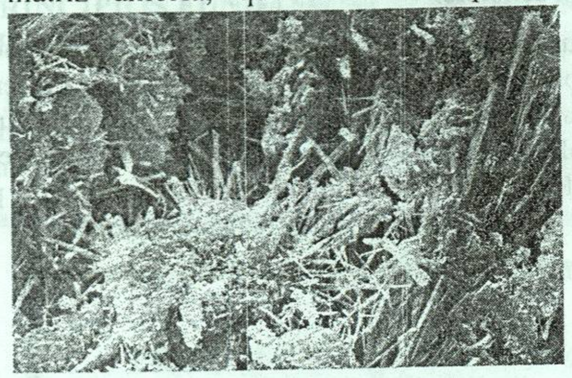
Este resultado, producto de la experiencia, sugiere que dichos materiales pueden idealizarse como *medios continuos,* carentes de huecos o separaciones entre sus partículas. Normalmente se acepta, además, que tales medios sean también *isótropos.* La isotropía supone que la microestructura del material consiste de elementos orientados al azar, y excluye, por consiguiente, la existencia de direcciones "preferenciales" para sus propiedades mecánicas. Así, en un material isótropo conductor, el calor se difunde con igual rapidez en todas las direcciones. También, la isotropía implica que el efecto de deformación producido en el material por determinado sistema de fuerzas no depende de la orientación del material mismo; en otras palabras, que si sujetamos a determinados esfuerzos, por ejemplo, un cubo de cierta sustancia sólida, la deformación resultante no dependerá de la dirección según la cual el cubo ha sido recortado de un pedazo más grande de material.

Estas idealizaciones se justifican debido a que actualmente ofrecen el camino más viable para un enfoque matemático de los problemas de deformaciones y escurrimientos de sólidos y fluidos; sin embargo, no dejan de constituir un modelo fenomenológico que sólo es aceptable bajo un punto de vista macroscópico.

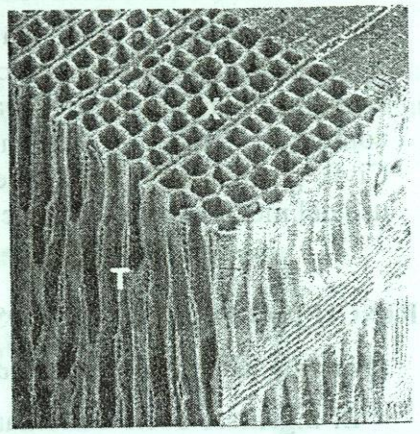
Si observamos al microscopio los sólidos utilizados por el ingeniero, vemos que la mayoría posee una estructura cristalina y que esos cristales constituyen granos separados entre sí. Dentro de cada grano se observa el mismo arreglo cristalográfico, aunque el arreglo pueda variar de un *cristal* a otro. Los *cristales* a veces están sumergidos en una

** Encerrado entre estos símbolos, se encuentra la cita textual de la explicación que da el Dr. Enzo Levi en su libro de elementos de MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO.

matriz amorfa, que llena el espacio intergranular (fotografías siguientes). Estas



Cristales en etapas tempranas del concreto



Estructura de la madera

características estructurales pueden, en determinados casos, provocar efectos que la hipótesis del medio continuo no está naturalmente capacitada para justificar.

Latón (X 100 aumentos)

Para aclarar las ideas, supongamos que sobre un material cristalino (por ejemplo, un metal) actúen ciertas fuerzas que tienden a deformarlo. Esto significa que los cristales tenderán a desplazarse, relativamente unos a otros, y cambiar de posición. Sin embargo, si las fuerzas no son de gran magnitud y se aplican durante un tiempo corto, es probable que al eliminarse tales fuerzas, los granos, que deben haberse movido poco con respecto a su posición original, vuelvan a recuperarla porque ésta constituye el acomodo más compacto y estable. Pero si las fuerzas son *intensas,* es probable que provoquen "dislocaciones" progresivas que desalojen los granos y los alejen demasiado de su *posición* original dando por resultado que, al cesar las fuerzas, el material se encuentre deformado permanentemente. En el primer caso, nos enfrentamos a un *comportamiento elástico,* y, en el segundo caso, a un *flujo.* Así que el hecho de que un mismo material se comporte o no elásticamente, depende de la magnitud de los esfuerzos a los cuales está sometido. Se llama *punto de fluencia* la condición en la cual un material deja de comportarse de una manera y empieza a comportarse de otra debido a un desarreglo importante en la frontera de los granos.

La mecánica del medio continuo idealiza el material por medio de un modelo matemático que, sin tener en cuenta de manera explícita su estructura microscópica y sin considerar, a escala mucho más pequeña, las acciones entre moléculas, permite, en la mayoría de los casos, predecir su comportamiento, con exactitud suficiente para la práctica. Conviene

subrayar, sin embargo, que, si los esfuerzos a que se somete el material aumentan excesivamente, acabarán produciéndose agrietamientos microscópicos, los cuales eventualmente podrán crecer hasta transformarse en verdaderas fracturas. Una grieta, por pequeña que sea, impide la trasmisión isotrópica de los esfuerzos; así que, desde el momento en que aparece, el medio pierde su continuidad, y, estrictamente hablando, los métodos de análisis que vamos a estudiar dejan de ser aplicables.

El *modelo matemático* que deseamos construir tiene que basarse esencialmente sobre *conceptos diferenciales.* Imaginemos que un material, sólido o fluido. se subdivide idealmente en elementos pequeños, por ejemplo, de forma cúbica, por medio de planos que lo crucen, y luego se prosigue la subdivisión agregando siempre más planos secantes, y reduciendo progresivamente el tamaño de los cubos resultantes. Cada elemento posee ciertas *propiedades extensivas* (es decir, propiedades *cuyos valores dependen de la cantidad de sustancia presente),* así como masa, peso, cantidad de calor, etc., y es natural pensar en una masa media, un peso medio, una cantidad de calor media, que se obtienen dividiendo masa, peso y cantidad de calor totales de cada cubo entre el volumen del mismo. Si el cubo tiene volumen ΔV, masa Δm, peso ΔP, hallaremos una *masa media* $\Delta m/\Delta V$ y un *peso medio* $\Delta P/\Delta V$. Ahora, consideremos un punto fijo dentro del material y una sucesión de cubos cada vez más pequeños que encierren al punto. Si la sustancia es homogénea, las características medias serán constantes al reducirse el cubo, e iguales a sus valores límites cuando tiendan a cero los volúmenes :

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta V}=\frac{dm}{dV},\qquad \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta V}=\frac{dp}{dV}\qquad (1.1)$$

Pero si el material no es homogéneo, como por ejemplo la atmósfera, cuya masa media se reduce con la altura, masa media y peso medio variarán de un elemento a otro. Ahora bien, nuestra idealización implica que dichas propiedades medias *varíen con continuidad* al reducirse el tamaño de los cubos, y permite admitir la existencia, *en cada punto* del material, de una *masa específica (o densidad)* ρ y de un *peso específico* γ locales, definidos por (1.1) como

$$\rho=\frac{dm}{dV},\qquad \gamma=\frac{dP}{dV}\qquad (1.2)$$

En términos matemáticos, aceptaremos que masa y peso, así como otras *propiedades extensivas,* por ejemplo, la cantidad de calor contenida, sean *funciones continuas y derivables de los puntos del espacio ocupado por el medio.* Si se ha establecido un sistema de coordenadas, por ejemplo cartesianas *x, y, z,* se podrá decir "funciones continuas y derivables de *x, y, z";* pero evidentemente el concepto tiene un significado independiente del tipo de coordenadas escogido, de su posición y hasta de la existencia de un sistema de referencia.

Es interesante observar que las propiedades (1.2) ya no son extensivas: son *propiedades intensivas* (o de punto), es decir que *su valor no depende de la cantidad de sustancia presente.* Así son todas las demás propiedades que se conocen como *específicas,* y además la presión, la temperatura, la velocidad del sonido en el medio, y muchas otras.

Analicemos las variaciones con el tiempo de tales propiedades. Supongamos, por ejemplo, que se está calentando una pieza metálica, y se controla la temperatura T *en un punto fijo.* A un intervalo de tiempo Δt corresponderá una variación de temperatura ΔT. Consideremos el valor medio $\Delta T\ /\ \Delta t$ en un instante determinado (por ejemplo, exactamente una hora después de haber empezado a calentarse), para intervalos de tiempo cada vez más pequeños. Para que la pieza metálica pueda idealizarse como un medio continuo, es necesario que la razón $\Delta T\ /\ \Delta t$ varíe con continuidad al reducirse el intervalo temporal, de modo que exista y sea finito el límite

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{dT}{dt} = \dot{T}$$

que mide la *rapidez de variación local de la temperatura.* En general, supondremos que todas *las propiedades intensivas de un medio continuo son funciones continuas y derivables del tiempo, en cada punto del medio.*

Es importante recordar aquí la siguiente fórmula, que permite calcular la derivada total de una función cualquiera, escalar o vectorial $f(x,y,z,t)$ con respecto al tiempo t:

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}v_x + \frac{\partial f}{\partial y}v_y + \frac{\partial f}{\partial z}v_z$$

siendo v_x, v_y, v_z las componentes de la velocidad.

La hipótesis cuyo significado físico acabamos de explicar, de que las propiedades del medio continuo son funciones continuas y derivables del tiempo y del espacio, permite aprovechar, para el estudio de su comportamiento, todos los recursos del cálculo diferencial, y operar por medio de ellos sobre los campos escalares y vectoriales (de desplazamientos, velocidades, fuerzas, etc.), ligados al medio. Además, podremos aplicar *teoremas del valor medio* para calcular el valor que cierta función f adquiere en un punto B, conociendo el valor que ella y sus derivadas toman en otro punto A y la posición relativa de B con respecto a A. En particular, si A y B están muy próximos entre sí; es decir, si, siendo las coordenadas de A x_0, y_0, z_0, las de B son $x_0+\Delta x$, $y_0+\Delta y$, $z_0+\Delta z$ con Δx, Δy, Δz muy pequeños, consideraremos lícito escribir

$$f(B) = f(A) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_A \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_A \Delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_A \Delta z$$

calculándose las derivadas en el punto A. Esto resulta por utilizar la *fórmula de Taylor,* en que se desprecian, por su pequeñez, las potencias de Δx, Δy, Δz de grado superior al primero.**

** Fin de la cita textual del libro del Dr. Enzo Levi

LOS PRINCIPIOS LÓGICOS 3 Y 4 se refieren a la consistencia que debe haber en la realización de nuestras deducciones, es decir, debemos aplicar los principios de la lógica simbólica en nuestros razonamientos.

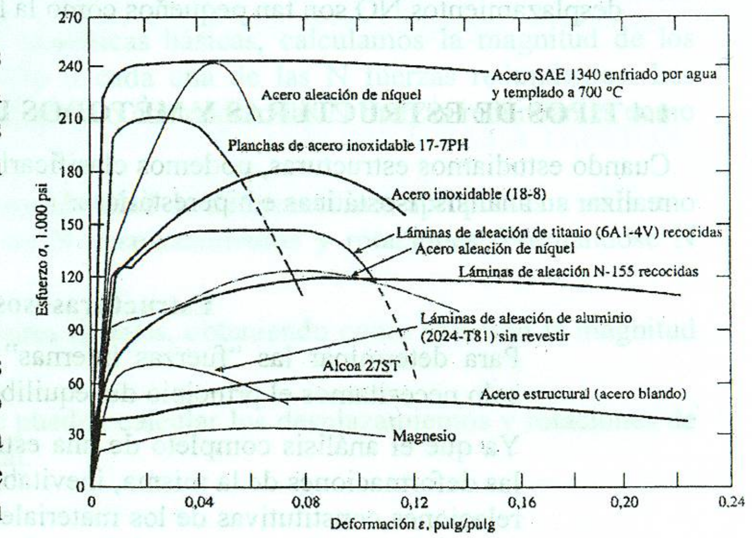
Aunque no es indispensable, por conveniencia, haremos las siguientes hipótesis adicionales que nos permitirán simplificar nuestro intento de analizar los fenómenos mecánicos que ocurren en las estructuras.

HIPÓTESIS ADICIONALES

1 *Hipótesis de Hooke.*

Se propone que la relación entre las deformaciones unitarias de un material y los esfuerzos inducidos es lineal, es decir, el material tiene un *comportamiento elástico lineal.*

$$\{s\} = [k]\{\in\}$$



Modelo Reológico de Hooke.

Como es sabido, los materiales reales (ver figura al lado) no tienen dicho comportamiento, más bien, para deformaciones menores del límite de proporcionalidad, se aproxima su comportamiento al supuesto elástico lineal.

El argumento de más peso que se puede usar para justificar esta hipótesis, es que las matemáticas empleadas se "linealizan" y vuelven alcanzable la meta de modelar matemáticamente las estructuras.

Otro argumento de gran importancia, es que, si mantenemos a los materiales que forman una estructura con deformaciones menores a la correspondiente al límite de elasticidad lineal (aproximadamente 0.002 para el caso del acero estructural A-36) el comportamiento será bastante parecido al hipotético comportamiento elástico-lineal. Paradójicamente, la filosofía de diseño sísmico actual (a nivel mundial) establece que las estructuras deben deformarse más allá del límite elástico, para que así, tengan la capacidad de "disipar" las grandes cantidades de energía que se presentan durante un evento sísmico de magnitud extrema. Esta manera de diseñar entra en conflicto directo con la suposición de que los materiales trabajarán dentro de su límite elástico.

Finalmente, debe quedar claro que, si las complicaciones matemáticas no importaran, sería mucho más realista utilizar modelos Reológicos del tipo Kelviniano o, mejor aún, modelos reológicos de Burgers. Los cuales son modelos que permiten modelar, por ejemplo,