fenómenos de flujo plástico en el concreto o la variación del módulo de elasticidad con la velocidad de aplicación de la carga.

2 Hipótesis de Desplazamientos pequeños.

Aceptaremos que nuestras estructuras sufren desplazamientos relativamente pequeños. En la mayoría de las estructuras que diseñaremos, está condición se cumple de manera limitada, es decir, en ocasiones los desplazamientos NO son pequeños y, estrictamente hablando, la teoría matemática presentada aquí, NO es aplicable.

A pesar de este hecho, la práctica profesional admite el uso de esta herramienta, aún en dichas condiciones de no aplicabilidad, buscando compensar, mediante otras consideraciones, estos errores introducidos en nuestras predicciones cuando los desplazamientos NO son tan pequeños como la hipótesis supone.

1.4 TIPOS DE ESTRUCTURAS Y MÉTODOS DE ANÁLISIS

Cuando estudiamos estructuras, podemos clasificarlas en dos grandes tipos, con la finalidad de realizar su análisis: isostáticas e hiperestáticas.

Estructuras isostáticas

Para determinar las "fuerzas internas" en las estructuras isostáticas solo necesitamos el principio del equilibrio estático.

Ya que el análisis completo de una estructura demanda el cálculo de las deformaciones de la misma, inevitablemente debemos recurrir a las relaciones constitutivas de los materiales que la forman y a relaciones geométricas en la estructura deformada, a partir de las cuales podemos calcular las deformaciones. Tales como flechas al centro de vigas y rotaciones de los extremos de las barras.

Estructuras hiperestáticas

En este tipo de estructuras no basta con aplicar el principio de equilibrio estático, también debemos aplicar las relaciones físicas entre esfuerzos y deformaciones del material que forma la estructura. Con esta información es posible calcular las fuerzas internas y las deformaciones en toda la estructura.

En cursos previos se han manejado varias formas de aplicar los principios al análisis de estructuras hiperestáticas, y a estas diversas maneras se les ha bautizado con nombres especiales. Tales como: método de deflexión-pendiente, carga unitaria, teorema de los tres momentos, deformación consistente, etc.

Los diversos métodos de análisis son solo diversas maneras de aplicar los mismos principios y siguen dos posibles estrategias:

Estrategia 1:

- Determinación del "grado de hiperestaticidad" (N)
- "eliminación" de las fuerzas redundantes en la estructura original, dejando una estructura isostática básica.
- Formación de una estructura isostática básica con todas las cargas aplicadas sobre ella.
- Formación de N estructuras isostáticas básicas sobre las que actúa una de las N fuerzas redundantes a la vez.
- Trabajando con las N+1 estructuras isostáticas básicas, calculamos la magnitud de los desplazamientos y rotaciones asociados a cada una de las N fuerzas redundantes. Las expresiones matemáticas obtenidas del cálculo contendrán las N fuerzas redundantes como variables desconocidas en magnitud.
- Aplicación de las condiciones de compatibilidad de deformaciones apropiadas a cada uno de los puntos donde se calcularon los N desplazamientos y rotaciones. Formándose N ecuaciones lineales.
- Solución simultánea de las N ecuaciones lineales, obteniendo como solución la magnitud de las N fuerzas redundantes.
- Conocidas las fuerzas redundantes se pueden calcular los desplazamientos y rotaciones de cualquier parte de la estructura original.

Estrategia 2:

- Discretizamos (Dividimos) toda la estructura en elementos finitos de geometría simple cuyas relaciones entre desplazamientos en sus extremos y las fuerzas inducidas sea conocida. En este curso los elementos finitos tendrán la forma de barras rectas.
- De la discretización realizada surge de manera natural el grado de "indeterminación cinemática" de la estructura. El número de desplazamientos desconocidos es lo que denominamos "grados de libertad" (GL).
- Calculamos la rigidez de cada elemento finito a la ocurrencia de los GL desplazamientos. Generándose tantas ecuaciones de fuerza como grados de libertad estén asociados a cada elemento finito.
- Calculamos la rigidez de la estructura mediante la suma de las rigideces de cada uno de los elementos finitos. En cada grado de libertad debe cumplirse el principio de equilibrio estático, resultando GL ecuaciones lineales que contendrán los GL grados de libertad de la estructura discretizada.
- Solución simultánea de las GL ecuaciones lineales, obteniendo como solución la magnitud de los GL desplazamientos desconocidos.

- Conocidos los desplazamientos desaparece la "indeterminación cinemática" y podemos calcular las fuerzas asociadas a los GL y los desplazamientos y rotaciones de cualquier parte de los elementos finitos.

Al procedimiento esquematizado en la estrategia 1 se le conoce en diversas referencias como: *El Método general de las flexibilidades* (o método de las fuerzas).

A la segunda estrategia se le da el nombre de: *El método general de las rigideces* (o método de los desplazamientos).

En el curso previo de análisis de estructuras, se presentó y se trabajó con el método de deformación consistente (nombre alterno a método general de flexibilidades). En este curso nos concentraremos en demostrar las ecuaciones matemáticas que le dan forma al método general de rigideces y las aplicaremos al análisis de diferentes tipos de estructuras.

1.5 PRESENTACIÓN DEL MÉTODO GENERAL DE LAS RIGIDECES**

A este método se le conoce con este nombre porque en la formación de los modelos matemáticos se maneja extensamente el concepto de rigidez.

Como se mencionó en el artículo anterior, un paso fundamental en la aplicación del método consiste en dividir a la estructura en segmentos más pequeños que deben cumplir con la condición de tener geometría simple, cuyas relaciones entre desplazamientos en sus extremos y las fuerzas inducidas sea conocida.

De la teoría de la resistencia de materiales obtuvimos modelos matemáticos que nos permiten predecir los esfuerzos y deformaciones en barras rectas. Por ejemplo, se dedujo la conocida ecuación diferencial de equilibrio estático para vigas en flexión.

A continuación presentamos un caso para estudio en el que se utilizan los pasos generales esquematizados en la descripción de la estrategia 2 para el análisis de estructuras.

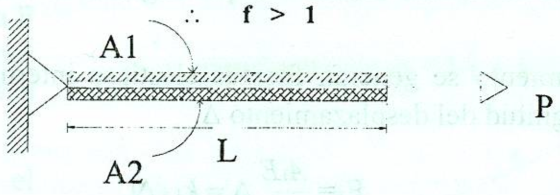
1.5.1 *CASO PARA ESTUDIO*: DOS BARRAS PARALELAS SOMETIDAS A TENSIÓN

Para ilustrar el método, se analiza el caso de una estructura que podemos discretizar en dos barras rectas prismáticas.

$E_1 = E_2$

$A_2 > A_1 \Rightarrow A_2 = f \cdot A_1$

$\therefore \quad f > 1$



Restricciones del problema:

1. La fuerza **P** está aplicada de manera de producir solo tensiones en las dos barras
2. El desplazamiento Δ producido por la acción **P** es igual para las dos barras.

Objetivo del problema.- *Analizar* completamente el sistema.

<u>Primer intento de análisis(intuitivo)</u>

Siguiendo un primer impulso, podemos imaginar lo siguiente

** Aclaración pertinente: En opinión del autor, existe la tendencia a confiar en los modelos matemáticos que son relativamente complejos y que en su deducción requieren del uso de matemáticas superiores. Creemos que lo que le da validez a un modelo matemático es la cercanía de sus predicciones con lo que se puede observar y medir en el mundo físico y no la "elegancia" matemática empleada en su deducción.

Hipótesis: cada barra soporta la mitad de la carga **P.**

En consecuencia, las deformaciones de cada una de las barras son:

$$\Delta_1=\left(\frac{p}{2}\right)\cdot\frac{L}{A_1E} \qquad \Delta_2=\left(\frac{p}{2}\right)\cdot\frac{L}{A_2E}$$

Nota: Estas expresiones matemáticas fueron tomadas de la teoría elemental de la resistencia de materiales, para el caso de barras en tensión simple.

La restricción 2 señala que: $\Delta_1=\Delta_2$

$$\therefore \quad \left(\frac{p}{2}\right)\cdot\frac{L}{A_1E}=\left(\frac{p}{2}\right)\cdot\frac{L}{A_2E}$$

$$\Rightarrow \quad 1=\frac{1}{f} \qquad f=1$$

Pero el factor f debe ser mayor de 1 por ser una característica del problema.

$\therefore$ La hipótesis realizada conduce a resultados inconsistentes y no puede ser verdadera.

Segundo intento para realizar el análisis

Parece evidente que si conocemos la magnitud del desplazamiento Δ, podremos conocer el estado de deformaciones de las dos barras. Así que el *grado de indeterminación cinemática* es 1 (uno).

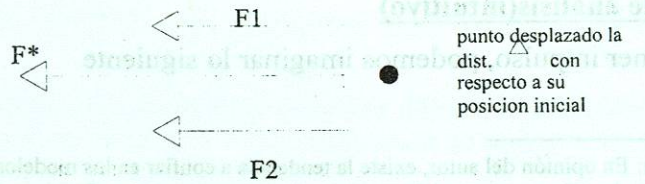
Al ocurrir el desplazamiento se generan fuerzas elásticas internas de tensión, directamente proporcionales a la magnitud del desplazamiento Δ.

$$F_1=\frac{A_1E}{L}\Delta=k_1\cdot\Delta$$

$$F_2=\frac{A_2E}{L}\Delta=k_2\cdot\Delta$$

Así, en el extremo donde está aplicada la fuerza **P** se generan las fuerzas elásticas F_1 y F_2 que tienden a restaurar la geometría original de la barra (Δ= 0).

La resistencia ofrecida por las dos barras trabajando en conjunto se calcula sumando la resistencia de cada una de las dos barras: $F^* = F_1 + F_2$

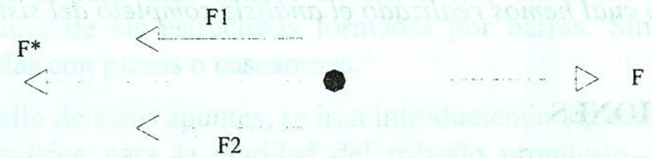


Si hacemos un diagrama de cuerpo libre del extremo derecho de la barra tenemos que, bajo estas condiciones, el punto se moverá hacia la izquierda, de acuerdo a la ley de Newton

$$aceleración=\frac{F^*}{masa}$$

Entonces, para lograr que el punto se mantenga en la posición desplazada Δ, deberá aparecer una fuerza F que equilibre a F* , es decir:

$$F - F^* = 0 \qquad \therefore \text{ la resultante es nula}$$



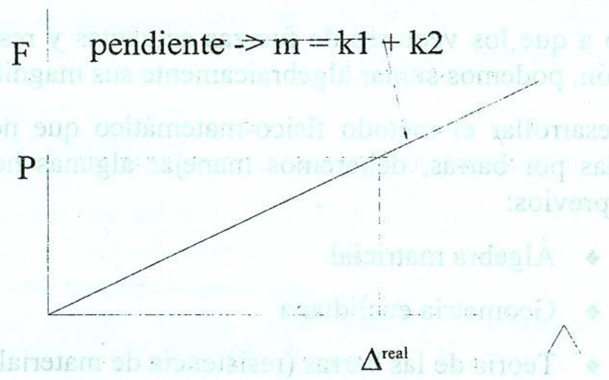
Sustituyendo a F*, F1 y F2, tenemos:

$$F = F^*$$

$$F = F1+F2$$

$$F = (k_1+k_2)\Delta$$

Con esta ultima expresión podemos calcular la carga F necesaria para mantener deformadas a ambas barras la distancia Δ.



Pero solo nos interesa el valor de Δ compatible con la fuerza P que está actuando en el sistema estructural bajo análisis.

Sustituyendo el valor de **P** en el modelo matemático encontrado ($F = (k_1+k_2)\Delta$) tendremos:

$$F=P$$

$$\therefore \quad P=(k_1+k_2)\Delta \qquad \text{expresión de la cual solo } \Delta \text{ es desconocido}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_{real}=\frac{P}{(k_1+k_2)}$$

una vez conocida la magnitud de desplazamiento, podemos terminar el análisis calculando las fuerzas y deformaciones que se inducen en cada una de las dos barras que forman la estructura.

La fuerza en cada barra es:

$$F_1 = k_1 \cdot \Delta_{real} \quad \text{y} \quad F_2 = k_2 \cdot \Delta_{real}$$

y la elongación es:

$$e_1 = e_2 = \Delta_{real}$$

finalmente, la deformación unitaria es:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\Delta_{real}}{L}$$

Con lo cual hemos realizado el análisis completo del sistema estructural.

1.5.2 OBSERVACIONES

- A k_1 y k_2 los podemos interpretar como la rigidez axial de cada barra, es decir:

  A mayor rigidez axial, se requiere mayor fuerza para producir un desplazamiento unitario

  Y a la suma la llamaremos rigidez total del sistema.
- Si $A_2 = 2A_1$, la fuerza que toma la barra 2 será el doble de la barra1.
- El elemento de mayor rigidez deberá soportar la mayor parte de la fuerza actuante.
- La fuerza elástica restauradora total que actúa sobre el extremo derecho de las barras se obtuvo ***sumando*** las ***contribuciones*** de cada una de las barras.
- Debido a que los vectores de fuerzas actuantes y resistentes están actuando en la misma dirección, podemos sumar algebraicamente sus magnitudes.
- Para desarrollar el método físico-matemático que nos permitirá analizar las estructuras formadas por barras, deberemos manejar algunas herramientas analíticas aprendidas en cursos previos:
  - Álgebra matricial
  - Geometría euclidiana
  - Teoría de las barras (resistencia de materiales)

  A lo largo de estos apuntes, haremos la presentación de la teoría y el método propuesto para el análisis de las estructuras. La secuencia elegida por el autor en la presentación y demostración del método es la siguiente:

  - ❑ Análisis de estructuras tipo armadura clásica, definida en el espacio bidimensional.
  - ❑ Análisis de estructuras tipo armadura clásica, definida en el espacio tridimensional.

- ❑ Ampliación del método planteado para incluir el caso más general de estructuras formadas por barras con rigidez a flexión y cortante trabajando en el hipotético espacio bidimensional.
- ❑ Nueva ampliación del método para incluir el caso general de estructuras formadas por barras con rigidez a flexión, torsión y cortante trabajando en el espacio tridimensional. Estructuras que encontraremos y deberemos resolver en la práctica profesional de la ingeniería.

Así, iremos desde el caso más simple de estructura, hasta los casos más complejos; abarcando el estudio de las estructuras formadas por barras. Sin incluir el estudio de estructuras formadas con placas o cascarones.

Durante el desarrollo de estos apuntes, se irán introduciendo algunos conceptos de álgebra de matrices, necesarios para la claridad del método propuesto, además de conceptos fundamentales de la mecánica de los materiales y los elementos simples construidos con estos materiales.