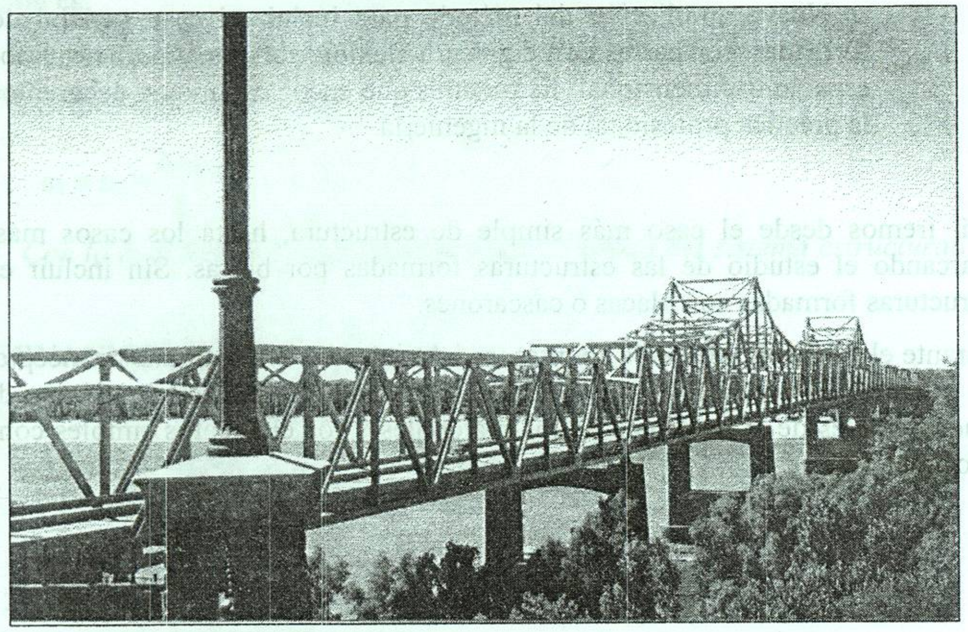
ESTRUCTURAS TIPO ARMADURA EN EL ESPACIO BIDIMENSIONAL



2.1. INTRODUCCIÓN

Iniciaremos la presentación del *Método General de Rigideces* mediante el análisis de estructuras tipo armadura. Como se comprobará a lo largo de este curso, este es el tipo de estructura de más fácil análisis.

> **Definición de armadura convencional**
>
> Es una estructura formada por barras rectas interconectadas en "nudos" que funcionan como una articulación, es decir, no pueden transmitirse momentos flexionantes, torsionantes ni fuerzas cortantes a través de las uniones; además, las barras están interconectadas en arreglos triangulares. Las barras solo trabajan en tensión o compresión.

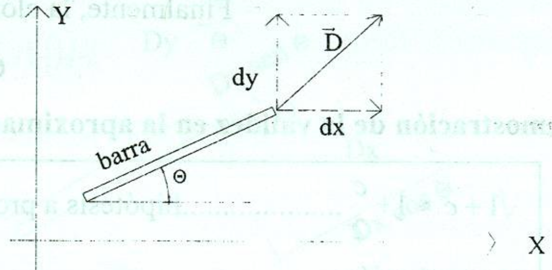
De acuerdo a lo propuesto en la descripción de la estrategia 2 para el análisis de estructuras hiperestáticas, la armadura se "divide" en barras rectas para su análisis. Posteriormente se obtiene para cada "barra" la resistencia (rigidez) que ofrece a ser deformada por los movimientos de sus dos extremos.

Después de calculada la rigidez de cada barra, se procede al cálculo de la rigidez de la armadura a partir de la suma de la aportación individual de cada barra.

El resto del proceso se ejemplifica a través del caso para estudio presentado adelante.

2.2. MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA BARRA AISLADA, INCLINADA UN ÁNGULO TETA

Como primer paso, demostraremos como calcular la resistencia (rigidez) que ofrece una barra cuando sus dos extremos se desplazan respecto a su posición original, antes de la acción que provoca su movimiento.



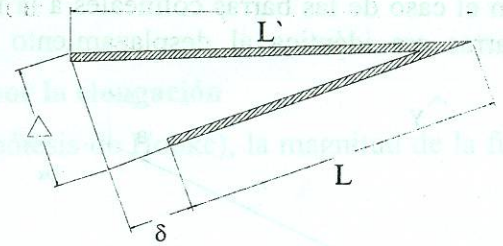
A diferencia del caso para estudio del capítulo 1, en cualquiera de los dos extremos de cada barra podrá existir un vector de desplazamiento orientado con cualquier ángulo o, equivalentemente, 2 vectores de desplazamiento ortogonales entre si.

> **Observación importante:** Por una cuestión de conveniencia matemática, a partir de aquí siempre que manejemos magnitudes vectoriales (fuerzas, desplazamientos) las manejaremos con sus dos componentes obtenidas de la proyección sobre dos ejes ortogonales (eje x, eje y).

2.2.1. APLICACIÓN DE LA HIPÓTESIS DE LOS DESPLAZAMIENTOS PEQUEÑOS

En este artículo demostramos una consecuencia de adoptar la hipótesis de los desplazamientos pequeños en el cálculo del alargamiento o acortamiento de una barra recta.

Es posible que una barra cualquiera sufra movimientos en uno de sus extremos respecto al otro, como los representados en la figura.



Donde : δ= desplazamiento longitudinal

Δ= desplazamiento transversal

entonces $$L' = \left[(L+\delta)^2 + \Delta^2\right]^{\frac{1}{2}} = L\left[1 + 2\cdot\frac{\delta}{L} + \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 + \left(\frac{\Delta}{L}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

e=L'-L (alargamiento de la barra)

como hemos asumido la hipótesis de que los desplazamientos son pequeños, las fracciones

$\left(\frac{\delta}{L}\right)^2$ y $\left(\frac{\Delta}{L}\right)^2$ se consideran ≅ 0, en consecuencia, podemos afirmar que cuando $\delta \cong 0$, aunque ≠ 0, resulta :

$$L' = L(1+2\frac{\delta}{L})^{1/2} \cong L+\delta$$

Finalmente, la elongación de la barra es:

$$e = \delta$$

Demostración de la validez en la aproximación anterior:

$\sqrt{1+c} \approx 1+\frac{c}{2}$ ....hipótesis a probar cuando $c \approx 0$ pero mayor de 0

comprobación:

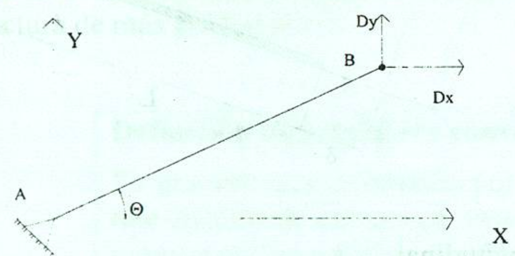
$$1+c = \left(1+\frac{c}{2}\right)^2 = 1+c+\left(\frac{c}{2}\right)^2 \quad \text{pero} \quad \left(\frac{c}{2}\right)^2 \approx 0$$

elevando al cuadrado

entonces: $1+c=1+c$ lo que prueba nuestra hipótesis.

2.2.2. OBTENCIÓN DE MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS GLOBALES A LOCALES

En el caso de las barras colineales a la fuerza actuante (ver artículo 1.3), la elongación de las barras era idéntica al desplazamiento de sus extremos. En las armaduras, el obtener la elongacion de la barra en función del desplazamiento requerirá un poco mas de trabajo.



La figura muestra la relación geométrica entre dx y dy *versus* la elongación de la barra.

Primero consideraremos que en el extremo B ocurren dx y dy asociados al alargamiento **e** de la barra. Si aplicamos el teorema demostrado en el artículo anterior, podemos calcular la contribución de cada uno de los dos vectores d_x y d_y al valor total de **e**:

$$e = \cos\theta . dx + \text{sen}\,\theta . dy$$

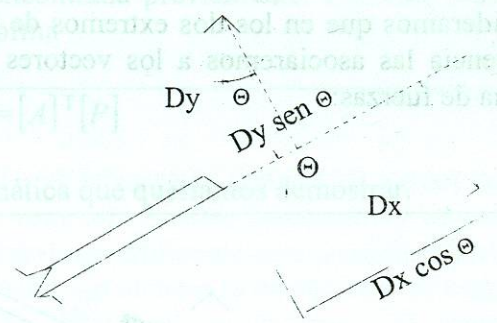
O en representación matricial $\{e\} = [\cos\theta \quad \text{sen}\,\theta] \bullet \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix}$

Y en forma abreviada: $\{e\} = [A] \cdot \{D\}$

En esta última expresión, la *matriz renglón* A es la matriz de transformación de coordenadas globales a coordenadas locales. Es decir, expresa matemáticamente la relación geométrica entre los desplazamientos d_x y d_y versus la elongación.

Demostración geométrica.

Aplicando la hipótesis de los desplazamientos pequeños resulta claro que las proyecciones de dx y dy sobre el eje longitudinal de la barra, corresponden al efecto del desplazamiento del extremo B sobre la elongación total de la barra.



En el caso general en que pueden existir desplazamientos de los dos extremos de la barra, la matriz [A] que relaciona a {e} con {D} será:

$$\{e\} = [-\cos\theta \quad -\text{sen}\,\theta \quad \cos\theta \quad \text{sen}\,\theta] \cdot \begin{Bmatrix} dx_A \\ dy_A \\ dx_B \\ dy_B \end{Bmatrix}$$

Nota importante:

e con signo negativo es acortamiento

e con signo positivo es alargamiento

en forma abreviada. $[e]_{barra} = [A]\,[D]_{barra}$

Cálculo de la fuerza axial inducida en la barra por la elongación

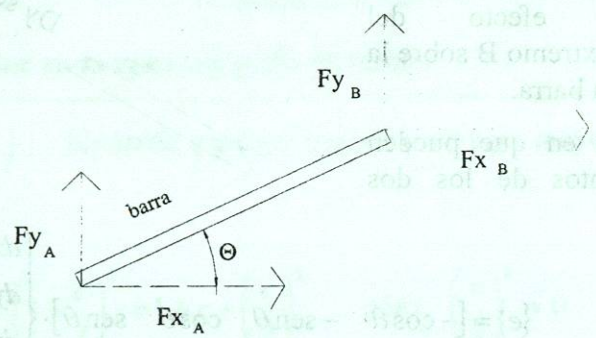
De acuerdo a la hipótesis de elasticidad lineal (hipótesis de Hooke), la magnitud de la fuerza que se genera en la barra será

$$P_{barra} = k_{barra} * e_{barra}$$

Donde : k_{barra}=AE/L (de la barra) esta relación se demuestra en la teoría de la resistencia de materiales.

2.2.3. OBTENCIÓN DE MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN DE FUERZAS INTERNAS A FUERZAS EXTERNAS

Si consideramos que en los dos extremos de la barra pueden actuar fuerzas externas que por conveniencia las asociaremos a los vectores desplazamiento dx y dy, tenemos el siguiente diagrama de fuerzas:



necesitamos encontrar la relación entre P (fuerza interna de la barra) *versus* las fuerzas externas en los extremos de la barra.

Si tomamos el nudo B ,tenemos:

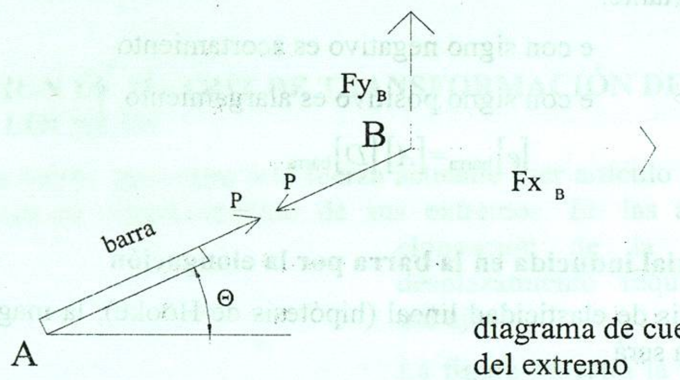


diagrama de cuerpo libre del extremo

$$\begin{bmatrix} Fx \\ Fy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} P_{barra}$$

o alternativamente

$$Fx = \cos\theta * P_{barra}$$
$$Fy = \operatorname{sen}\theta * P_{barra}$$

y en el caso general (fuerzas en extremos A y B)

$$\begin{bmatrix} Fx_A \\ Fy_A \\ Fx_B \\ Fy_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta \\ -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} P_{barra}$$

Nota: P_{barra} es la fuerza axial resultante sobre la barra

Observar que la matriz columna que relaciona a P_{barra} con las fuerzas externas en los extremos es la traspuesta de la matriz renglón [A] encontrada previamente. Por esta razón podemos escribir la ecuación anterior de la siguiente forma

$$[F]=[A]^T[P]$$

Esta es la expresión matemática que queríamos demostrar.

Principio de Contragradiencia

Otra manera de demostrar que $[F]$ esta relacionada con $[P]$ a través de $[A]^T$ es:

Supongamos que $[y]=[A][x]$ y $[z]=[B][U]$

También supongamos que para cualquier valor de $[x]$ y $[U]$ se cumple:

$$[x]^T[z]=[y]^T[U]$$

Si sustituimos a $[Y]$ y $[Z]$ por sus expresiones originales tenemos:

$$[x]^T[B][U]=[x]^T[A]^T[U]$$

se concluye el siguiente teorema:
$[B]=[A]^T$ para que la igualdad anterior se pueda cumplir

Aplicando este teorema al caso de la armadura, tenemos que:

Por continuidad $[e]=[A][D]$

Por equilibrio $[F]=[B][P]$

como el trabajo realizado por las fuerzas externas sobre la barra debe ser igual al trabajo interno, tenemos:

$$(1/2)\ [F]^T[D]=(1/2)\ [P]^T[e]$$

(trabajo de fuerzas externas) = (trabajo de fuerzas internas)

sustituyendo en las expresiones a $[F]^T$ y $[e]$

$$(1/2)\ [P]^T[B]^T[D]=(1/2)\ [P]^T[A][D]$$

aplicando el teorema demostrado anteriormente, resulta:

$$[B]^T=[A]$$

trasponiendo ambos lado de la igualdad:

$$[B]=[A]^T$$

que es lo que se quería demostrar ,es decir:

$$\{F\}=[A]^T*\{p\}$$

2.3. *CASO PARA ESTUDIO.* ARMADURA TRIANGULAR

Las relaciones matemáticas establecidas previamente para el caso de una barra aislada, con inclinación cualquiera, nos permitirá resolver una armadura siguiendo una secuencia lógica equivalente a la utilizada en el caso de las 2 barras paralelas sometidas a tensión.

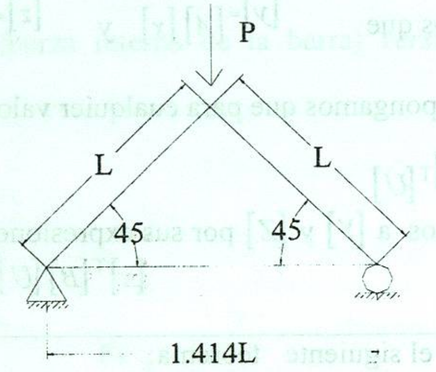
Si ignoramos las restricciones impuestas por los apoyos, existen 6 posibles vectores de desplazamiento que definirán la posición de la armadura después de desplazarse ante la acción de las fuerzas actuantes.(ver sig. fig.)

Estructura ejemplo a analizar

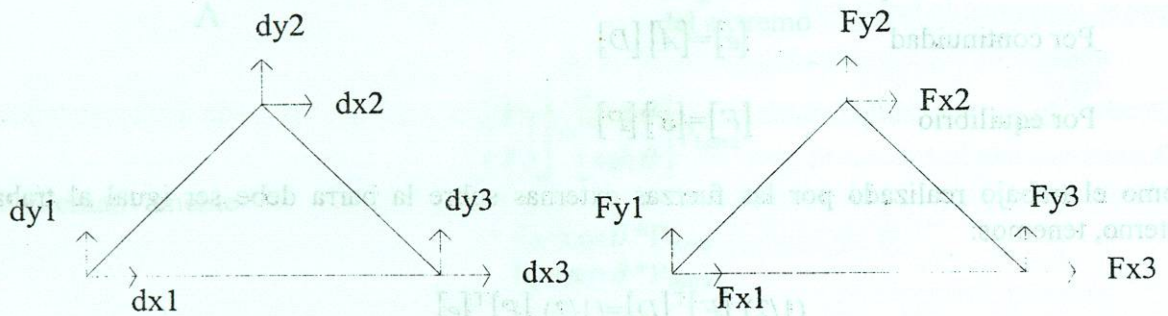
L = 200 cm

A = 1 cm2

E = 2,100,000 kg/cm2



Y de acuerdo a la definición convencional de una armadura, solo podrán existir 6 fuerzas externas actuando sobre los nudos.



Puesto que, conocida la magnitud de los desplazamientos de los nudos se conoce de manera inmediata el estado de esfuerzos y deformaciones de todas las barras, denominaremos a estos como **"puntos de control"**

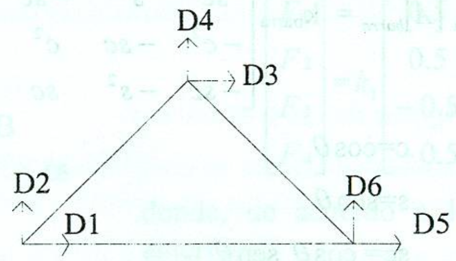
Así, en una armadura cualquiera, debemos seleccionar el numero suficiente de "puntos de control" que nos permita determinar de manera inmediata el estado de esfuerzos y deformaciones de todas las barras.

Al numero total de vectores-desplazamiento necesarios en todos los "puntos de control", menos los vectores-desplazamiento nulificados por las restricciones impuestas por los

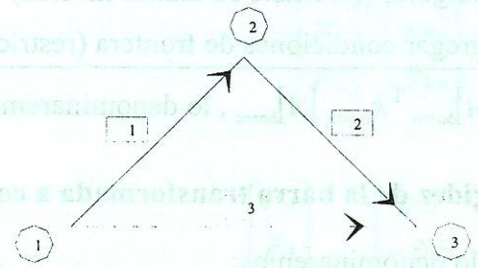
apoyos, se le suele denominar como grado de *indeterminación cinemática* o *grados de libertad.*

Ahora, calculemos la resistencia (rigidez) que ofrece el conjunto de barras interactuando entre si ante la aparición de los vectores de desplazamiento en los "puntos de control".

Para facilitar la interpretación del modelo matemático de esta rigidez del conjunto (rigidez total), numeramos los vectores-desplazamiento de la siguiente forma:



y a los nudos y barras así:



Cada barra contribuye a la resistencia (rigidez) total que ofrece el conjunto de barras al desplazamiento y se calcula como se muestra a continuación:

2.3.1. SOLUCIÓN 1: ENSAMBLE DIRECTO DE MATRICES DE RIGIDEZ DE LAS 3 BARRAS

Etapa 1.- Cálculo de la ecuación matricial de cada una de las tres barras

Primero deberemos encontrar la función matemática que nos relacione a los desplazamientos de los dos extremos de cada barra con las fuerzas externas en los dos extremos que deben aparecer por necesidades de equilibrio.

Recordando que $p_{barra}=k_{barra}\cdot e_{barra}$ y que $e_{barra}=[A]_{barra}\,[D]_{barra}$ sustituyendo a e_{barra} en p_{barra} tenemos:

$$p_{barra}=k_{barra}\,[A]_{barra}\,[D]_{\text{barra}}$$

por equilibrio, las fuerzas internas deben anularse con las externas

$[F]_{\text{barra}}-[A]^{T}p_{barra}=0$ sustituyendo p_{barra} resulta:

$$[F]_{barra} - [A]_{barra}{}^{T} \cdot k_{barra} \cdot [A]_{barra}\,[D]_{barra} = 0$$

Si analizamos el producto matricial $[A]_{barra}{}^{T} k_{barra} [A]_{barra}$, encontramos que la matriz resultante es de 4 renglones por 4 columnas

Desarrollando el producto tenemos:

$$[A]_{barra}{}^{T} k_{barra} [A]_{barra} = k_{barra} \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix}_{4x4} = [K_{barra}]_{4x4}$$

donde : $c = \cos\theta$

$s = \operatorname{sen}\theta$

$sc = \cos\theta \operatorname{sen}\theta$

> Notas:
> 1.- La matriz es singular (no existe su matriz inversa)
> 2.- Se requiere agregar condiciones de frontera (restricciones)

finalmente, el producto $[A]_{barra}{}^{T} k_{barra} [A]_{barra}$, lo denominaremos:

Matriz de rigidez de la barra transformada a coordenadas globales

y al número k_{barra}= EA/L lo denominaremos:

rigidez de la barra en coordenadas locales.

Entonces:

$$[F]_{barra} = [K_{barra}]_{4x4}\,[D]_{barra}$$

esta ecuación solo nos sirve para calcular $[F]_{barra}$ cuando ya conocemos a $[D]_{barra}$

Podemos decir que si conocemos los desplazamientos en los extremos de una barra con rigidez axial únicamente, tendremos resuelto el problema general de análisis para esa barra.

Nota : conocido $[D]_{barra}$ podemos calcular inmediatamente a $\mathbf{e_{barra}}$ y $\mathbf{p_{barra}}$

Observaciones:-

- El sistema de coordenadas X-Y sobre los que se definen dx y dy los denominaremos:

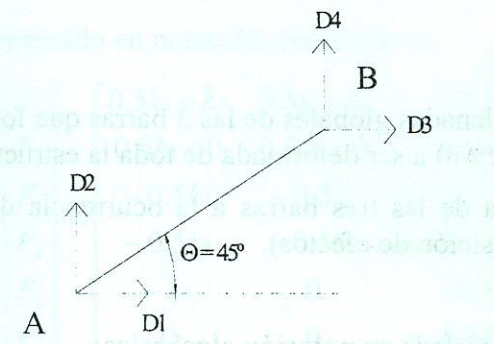
  sistema de coordenadas globales de referencia.

- La elongación **e** se mide a lo largo de la barra y a este eje de referencia paralelo a la barra lo denominaremos:

  sistema de coordenadas locales de referencia.

- Así, en el modelo matemático p $=k_{barra} \cdot e$ diremos que el escalar k_{barra} =AE/L está referido al sistema de coordenadas locales de la barra.
- En el modelo $[F]_{barra} = [K_{barra}]_{4x4}\,[D]_{barra}$ diremos que la matriz $[K_{barra}]_{4x4}$ está referida al sistema de coordenadas globales.

BARRA # 1

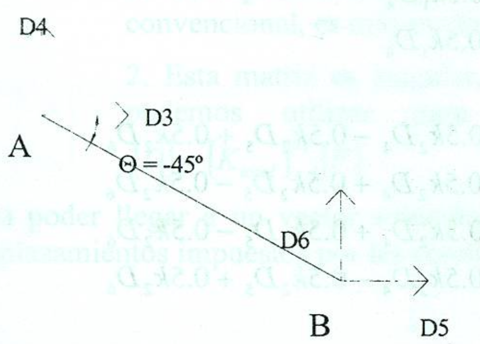


$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix}$$

donde, de acuerdo a lo convenido en las figuras anteriores:

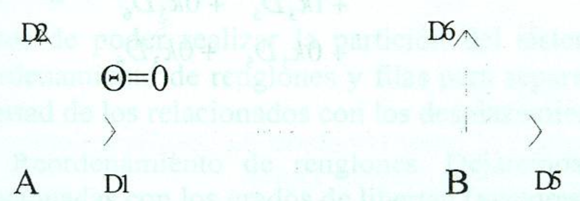
$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Fx_A \\ Fy_A \\ Fx_B \\ Fy_B \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Dx_A \\ Dy_A \\ Dx_B \\ Dy_B \end{bmatrix}$$

BARRA #2



$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = k_2 \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix}$$

BARRA #3



$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = k_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix}$$

donde el valor de la rigidez axial de las tres barras es:

$$k_1 = k_2 = \frac{E.A}{L_{diagonal}} = 2.1x10^6 \frac{kg}{cm^2}.\frac{1cm^2}{200cm} = 10500\frac{kg}{cm} = \frac{EA}{L}$$

$$k_3 = \frac{E.A}{L_{horizontal}} = 2.1x10^6 \frac{kg}{cm^2}.\frac{1cm^2}{(200cm.1.414)} = 7425.74\frac{kg}{cm} = 0.7071\frac{EA}{L}$$

Ahora intentaremos encontrar una expresión matemática que nos permita calcular la resistencia (rigidez) que ofrece el conjunto de barras a ser deformadas.

Etapa 2.- "Suma" de la rigidez de las tres barras

Una vez obtenidos los sistemas matriciales en coordenadas globales de las 3 barras que forman la estructura, podemos obtener la resistencia (oposición) a ser deformada de toda la estructura.

Para lograrlo, sumamos la resistencia de cada una de las tres barras a la ocurrencia de los desplazamientos (aplicamos el principio de superposición de efectos).

Paso 1: escribir las tres matrices de rigidez de barra aislada en notación algebraica:

barra 1

$$\begin{aligned}
F_1 &= +0.5k_1D_1 + 0.5k_1D_2 - 0.5k_1D_3 - 0.5k_1D_4\\
F_2 &= +0.5k_1D_1 + 0.5k_1D_2 - 0.5k_1D_3 - 0.5k_1D_4\\
F_3 &= -0.5k_1D_1 - 0.5k_1D_2 + 0.5k_1D_3 + 0.5k_1D_4\\
F_4 &= -0.5k_1D_1 - 0.5k_1D_2 + 0.5k_1D_3 + 0.5k_1D_4
\end{aligned}$$

barra 2

$$\begin{aligned}
F_3 &= +0.5k_2D_3 - 0.5k_2D_4 - 0.5k_2D_5 + 0.5k_2D_6\\
F_4 &= -0.5k_2D_3 + 0.5k_2D_4 + 0.5k_2D_5 - 0.5k_2D_6\\
F_5 &= -0.5k_2D_3 + 0.5k_2D_4 + 0.5k_2D_5 - 0.5k_2D_6\\
F_6 &= +0.5k_2D_3 - 0.5k_2D_4 - 0.5k_2D_5 + 0.5k_2D_6
\end{aligned}$$

barra 3

$$\begin{aligned}
F_1 &= +1k_3D_1 + 0k_3D_2 \quad -1k_3D_5 + 0k_3D_6\\
F_2 &= +0k_3D_1 + 0k_3D_2 \quad +0k_3D_5 + 0k_3D_6\\
F_5 &= -1k_3D_1 + 0_1D_2 \quad +1k_3D_5 + 0k_3D_6\\
F_6 &= +0k_3D_1 + 0k_3D_2 \quad +0k_3D_5 + 0k_3D_6
\end{aligned}$$

Paso 2: Sumar términos algebraicos comunes:

$$\begin{aligned}
F_1 &= (0.5k_1 + k_3)D_1 + (0.5k_1 + 0)D_2 - 0.5k_1D_3 - 0.5k_1D_4 - k_3D_5 + 0D_6\\
F_2 &= (0.5k_1 + 0)D_1 + (0.5k_1 + 0)D_2 - 0.5k_1D_3 - 0.5k_1D_4 + 0D_5 + 0D_6\\
F_3 &= -0.5k_1D_1 - 0.5k_1D_2 + (0.5k_1 + 0.5k_2)D_3 + (0.5k_1 - 0.5k_2)D_4 - 0.5k_2D_5 + 0.5k_2D_6\\
F_4 &= -0.5k_1D_1 - 0.5k_1D_2 + (0.5k_1 - 0.5k_2)D_3 + (0.5k_1 + 0.5k_2)D_4 + 0.5k_2D_5 - 0.5k_2D_6\\
F_5 &= -k_3D_1 + 0D_2 - 0.5k_2D_3 + 0.5k_2D_4 + (0.5k_2 + k_3)D_5 + (-0.5k_2 + 0)D_6\\
F_6 &= 0D_1 + 0D_2 + 0.5k_2D_3 - 0.5k_2D_4 + (-0.5k_2 + 0)D_5 + (0.5k_2 + 0)D_6
\end{aligned}$$

Expresado en notación matricial:

$$\begin{Bmatrix} F_1\\ F_2\\ F_3\\ F_4\\ F_5\\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}
0.5k_1 + k_3 & 0.5k_1 + 0 & -0.5k_1 & -0.5k_1 & -k_3 & 0\\
0.5k_1 + 0 & 0.5k_1 + 0 & -0.5k_1 & -0.5k_1 & 0 & 0\\
-0.5k_1 & -0.5k_1 & 0.5k_1 + 0.5k_2 & 0.5k_1 - 0.5k_2 & -0.5k_2 & 0.5k_2\\
-0.5k_1 & -0.5k_1 & 0.5k_1 - 0.5k_2 & 0.5k_1 + 0.5k_2 & 0.5k_2 & -0.5k_2\\
-k_3 & 0 & -0.5k_2 & 0.5k_2 & 0.5k_2 + k_3 & -0.5k_2 + 0\\
0 & 0 & 0.5k_2 & -0.5k_2 & -0.5k_2 + 0 & 0.5k_2 + 0
\end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} D_1\\ D_2\\ D_3\\ D_4\\ D_5\\ D_6 \end{Bmatrix}$$

Este sistema matricial, resultante del "ensamble" (suma) de las matrices de cada una de las tres barras, se le conoce como ***matriz de rigidez ensamblada***.

Notas:

1. Si representamos las tres ecuaciones matriciales en notación algebraica convencional, es más evidente el proceso seguido para sumarlas.

2. Esta matriz es singular, es decir, no existe su inversa y por lo tanto no la podemos utilizar para resolver el problema general del análisis $\{D\} = [K_{total}]^{-1}.\{F\}$

Para poder llegar a un vector solución, deberemos tomar en cuenta las restricciones a los desplazamientos impuestos por las condiciones de apoyo.

i.e. $D_1 = D_2 = D_6 = 0$

Etapa 3.- "Partición" del sistema matricial para separar los grados de libertad de los restringidos

Antes de poder realizar la partición del sistema matricial, deberemos primero realizar un reordenamiento de renglones y filas para separar los términos relacionados con los grados de libertad de los relacionados con los desplazamientos restringidos por los apoyos.

1.- Reordenamiento de renglones. Dejaremos en los primeros renglones las ecuaciones relacionadas con los grados de libertad (vectores desplazamiento no restringidos):