$$\begin{Bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5k_1 & -0.5k_1 & 0.5k_1+0.5k_2 & 0.5k_1-0.5k_2 & -0.5k_2 & 0.5k_2 \\ -0.5k_1 & -0.5k_1 & 0.5k_1-0.5k_2 & 0.5k_1+0.5k_2 & 0.5k_2 & -0.5k_2 \\ -k_3 & 0 & -0.5k_2 & 0.5k_2 & 0.5k_2+k_3 & -0.5k_2 \\ 0.5k_1+k_3 & 0.5k_1 & -0.5k_1 & -0.5k_1 & -k_3 & 0 \\ 0.5k_1 & 0.5k_1 & -0.5k_1 & -0.5k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5k_2 & -0.5k_2 & -0.5k_2 & 0.5k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix}$$

2.- Reordenamiento de columnas. Dejaremos en las primeras columnas los coeficientes asociados con los grados de libertad:

$$\begin{Bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ \hline F_1 \\ F_2 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.5k_1+0.5k_2 & 0.5k_1-0.5k_2 & -0.5k_2 & -0.5k_1 & -0.5k_1 & 0.5k_2 \\ 0.5k_1-0.5k_2 & 0.5k_1+0.5k_2 & 0.5k_2 & -0.5k_1 & -0.5k_1 & -0.5k_2 \\ -0.5k_2 & 0.5k_2 & 0.5k_2+k_3 & -k_3 & 0 & -0.5k_2 \\ \hline -0.5k_1 & -0.5k_1 & -k_3 & 0.5k_1+k_3 & 0.5k_1 & 0 \\ -0.5k_1 & -0.5k_1 & 0 & 0.5k_1 & 0.5k_1 & 0 \\ 0.5k_2 & -0.5k_2 & -0.5k_2 & 0 & 0 & 0.5k_2 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ \hline D_1 \\ D_2 \\ D_6 \end{Bmatrix}$$

El sistema matricial reordenado, se puede dividir en 4 submatrices, tal como lo indican las 2 líneas discontinuas en las matrices anteriores. El sistema matricial "particionado" y representado en notación matricial compacta sería:

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11_U} & K_{12_R} \\ K_{21_U} & K_{22_R} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_u \\ D_r \end{Bmatrix}$$

donde : $\{F_U\} = \begin{Bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix}$ $\{F_R\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_6 \end{Bmatrix}$ $\{D_U\} = \begin{Bmatrix} D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{Bmatrix}$ $\{D_R\} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_6 \end{Bmatrix}$

desarrollando el producto de las submatrices:

$$F_U = K_{11_U} \cdot D_U + K_{12_R} \cdot D_R$$
$$F_R = K_{21_U} \cdot D_U + K_{22_R} \cdot D_R$$

Etapa 4.- Solución del sistema de ecuaciones lineales simultáneas recién formado

Dejando del lado derecho a los términos asociados con D_U en la primer ecuación:

$$\left(F_U - K_{12_R} \cdot D_R\right) = K_{11_U} \cdot D_U$$
$$F_R = K_{21_U} \cdot D_U + K_{22_R} \cdot D_R$$

Con estas expresiones podemos tomar en cuenta el valor conocido de desplazamiento en los apoyos de la estructura. Para este caso en estudio, sabemos que $D_R=0$

$$\Rightarrow \qquad F_U = K_{11_U} \cdot D_U$$
$$F_R = K_{21_U} \cdot D_U$$

Así, hemos introducido al sistema matricial original las restricciones impuestas por los apoyos, la ecuación matricial: $F_u = K_{11U} D_u$, se puede resolver para:

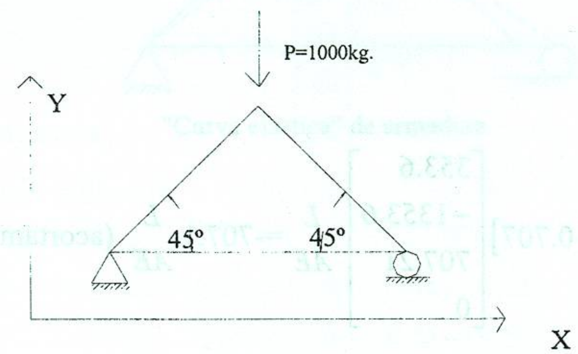
$$D_U = K_{11_U}^{-1} \cdot F_U$$

Donde:

K_{11U}= propiedad geométrica y mecánica de la estructura

Fu = fuerzas externas actuantes en los grados de libertad.

Si consideramos la carga mostrada en la figura 20, podemos definir al vector de cargas actuantes en los grados de libertad como:



Sustituyendo los magnitudes conocidas en las ecuaciones obtenidas, tenemos:

$$[Fu] = \begin{bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{11_U} = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 1.2 \end{bmatrix}$$

resolviendo el sistema matricial resulta:

$$\{D_U\} = \begin{bmatrix} 353.6 \\ -1353.6 \\ 707.2 \end{bmatrix} \cdot \frac{L}{A \cdot E}$$

así, podemos calcular para cada una de las tres barras el estado de deformaciones y fuerzas:

BARRA #1

$$e=\left[A_1\right]\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix}=\left[-0.707 \quad -0.707 \quad 0.707 \quad 0.707\right]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 353.6 \\ -1353.6 \end{bmatrix}\frac{L}{AE} = -707.1\frac{L}{AE}$$

$e = -707.1\dfrac{L}{AE}$ (acortamiento de la barra)

$p = k_1 * e = (AE/L)(-707.1\dfrac{L}{AE})$

p = -707.1 kg. (compresión)

BARRA #2

$$e=\left[-0.707 \quad 0.707 \quad 0.707 \quad -0.707\right]\begin{bmatrix} 353.6 \\ -1353.6 \\ 707.21 \\ 0 \end{bmatrix}\frac{L}{AE} = -707.1\frac{L}{AE} \text{ (acortamiento)}$$

$p = k_2 * e = (AE/L)(-707.1\dfrac{L}{AE})$

p = -707.1 kg. (compresión)

BARRA #3

$$e=\left[-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0\right]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 707.21 \\ 0 \end{bmatrix}\frac{L}{AE} = 707.1\frac{L}{AE} \text{ (acortamiento)}$$

$p = k3 * e = (AE/1.414L)(-707.1\dfrac{L}{AE})$

p = 500 kg. (tensión)

Representación gráfica de los resultados obtenidos

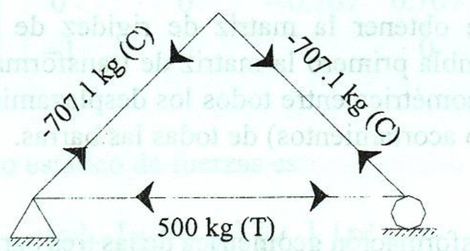
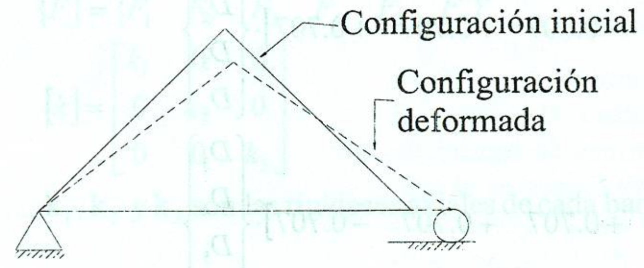


Diagrama de fuerzas en barras



"Curva elástica" de armadura

2.3.2. SOLUCIÓN 2: ENSAMBLE INDIRECTO A TRAVÉS DE LA MATRIZ [A] DE TODAS LAS BARRAS.

Existe una manera alterna de obtener la matriz de rigidez de toda la estructura, en este procedimiento alterno se ensambla primero la matriz de transformación de todas las barras, es decir, obtenemos la relación geométrica entre todos los desplazamientos posibles en los puntos de control y las elongaciones (o acortamientos) de todas las barras.

Procedimiento a seguir:

Formar las matrices de transformación geométrica de las tres barras

$$\mathrm{e}_1 = \begin{bmatrix}-0.707 & -0.707 & +0.707 & +0.707\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}D_1\\D_2\\D_3\\D_4\end{Bmatrix}$$

$$\mathrm{e}_1 = \begin{bmatrix}-0.707 & +0.707 & +0.707 & -0.707\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}D_3\\D_4\\D_5\\D_6\end{Bmatrix}$$

$$\mathrm{e}_1 = \begin{bmatrix}-1 & 0 & +1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}D_1\\D_2\\D_5\\D_6\end{Bmatrix}$$

equivalentemente, se pueden expresar en notación algebráica simple

$$\begin{aligned}
e_1 &= -0.707D_1 - 0.707D_2 + 0.707D_3 + 0.707D_4\\
e_{2+} &= \quad -0.707D_3 + 0.707D_4 + 0.707D_5 - 0.707D_6\\
e_3 &= \quad -1D_1 \quad 0D_2 \quad +1D_5 \quad 0D_6
\end{aligned}$$

Sistema de ecuaciones lineales simultaneas que se puede reescribir en notación matricial de la siguiente forma :

$$\begin{Bmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.707 & -0.707 & 0.707 & 0.707 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -0.707 & 0.707 & 0.707 & -0.707\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}D_1\\D_2\\D_3\\D_4\\D_5\\D_6\end{Bmatrix}$$

Este proceso se conoce como "ensamble" de matrices.

En este sistema matricial, la matriz de 3x6 es la "matriz de transformación del sistema estructural ensamblado", siendo denominada esta matriz como: **Matriz [A] ensamblada.**

$$[A_E] = \begin{bmatrix}-0.707 & -0.707 & 0.707 & 0.707 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -0.707 & 0.707 & 0.707 & -0.707\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

La ecuación de equilibrio estático de fuerzas es:

$$\{F\} - [A_E]^T\cdot[k]\cdot[A_E]\cdot\{D\} = 0$$

donde :

$$\{F\} = \{F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4 \quad F_5 \quad F_6\}^T$$

$$[k] = \begin{bmatrix}k_1 & 0 & 0\\ 0 & k_2 & 0\\ 0 & 0 & k_3\end{bmatrix}$$

$\mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2$ y k_3 son las rigideces axiales de cada barra

Realizando operaciones:

$$\begin{Bmatrix}F_1\\F_2\\F_3\\F_4\\F_5\\F_6\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}
0.5k_1+k_3 & 0.5k_1+0 & -0.5k_1 & -0.5k_1 & -k_3 & 0\\
0.5k_1+0 & 0.5k_1+0 & -0.5k_1 & -0.5k_1 & 0 & 0\\
-0.5k_1 & -0.5k_1 & 0.5k_1+0.5k_2 & 0.5k_1-0.5k_2 & -0.5k_2 & 0.5k_2\\
-0.5k_1 & -0.5k_1 & 0.5k_1-0.5k_2 & 0.5k_1+0.5k_2 & 0.5k_2 & -0.5k_2\\
-k_3 & 0 & -0.5k_2 & 0.5k_2 & 0.5k_2+k_3 & -0.5k_2+0\\
0 & 0 & 0.5k_2 & -0.5k_2 & -0.5k_2+0 & 0.5k_2+0
\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}D_1\\D_2\\D_3\\D_4\\D_5\\D_6\end{Bmatrix}$$

De la misma manera que ocurrió con el "ensamble" del sistema de ecuaciones en la solución 1, deberemos reordenar las ecuaciones y las incógnitas en el sistema para dejar las ecuaciones y las variables asociadas con los grados de libertad en la esquina superior izquierda de la matriz de rigidez global de toda la estructura.

El resto de las etapas de cálculo es idéntica a la realizada con la solución 1.

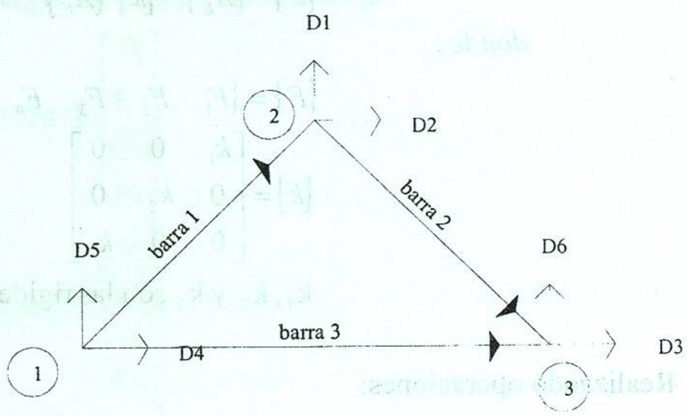
2.4. SIMPLIFICACIONES EN EL PROCESO DE ENSAMBLE DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL.

Conveniencia: Para evitar el trabajo de reacomodar el sistema de ecuaciones debemos numerar los grados de libertad de la estructura en primer lugar y después los vectores de desplazamiento restringidos.

En la armadura triangular de ejemplo que hemos estado estudiando, etiquetaríamos de la siguiente forma:

1.- Se numeran en forma secuencial ascendente los grados de libertad de la estructura y enseguida los desplazamientos restringidos.

2.- Si los desplazamientos no libres tienen una magnitud de cero, al ensamblar las matrices de rigidez de cada una de las tres barras en el tipo de solución 1 o la matriz geométrica [A] en el tipo 2 de solución, solo será necesario considerar los coeficientes asociados a los grados de libertad.



Aplicando estas ideas y el tipo 2 de solución, al formar la matriz [A] de cada barra, la magnitud de los desplazamientos conocidos e iguales a cero se manejan como se muestra enseguida:

$$e_1 = \begin{bmatrix} X & X & 0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ X \\ D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

$$e_2 = \begin{bmatrix} -0.7071 & 0.7071 & 0.7071 & X \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ X \end{bmatrix}$$

$$e_3 = \begin{bmatrix} X & X & 1 & X \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ X \\ D_3 \\ X \end{bmatrix}$$

Formando la matriz $[A]$ ensamblada de la armadura:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 & 0 \\ -0.7071 & 0.7071 & 0.7071 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}$$

Calculo de la matriz $[K_{11U}]$ a partir de la expresión $[A_E]^T.[k].[A_E]$, donde:

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

así:

$$[A_E]^T \cdot [k] \cdot [A_E] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 1.207 \end{bmatrix}$$

Ecuación de equilibrio de fuerzas que se resuelve:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = [A_E]^T \cdot [k] \cdot [A_E] \cdot \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 1.207 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix}$$

cuya solución es:

$$[D] = \left([A_E]^T [k][A_E]\right)^{-1} \cdot [F] = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 353.5 \\ -1354 \\ 707 \end{bmatrix} \frac{L}{AE}$$

y las elongaciones de cada una de las barras se puede calcular en una sola multiplicación matricial:

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = [A_E] \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \frac{L}{AE} \begin{bmatrix} -707.1 \\ -707.1 \\ 707 \end{bmatrix}$$

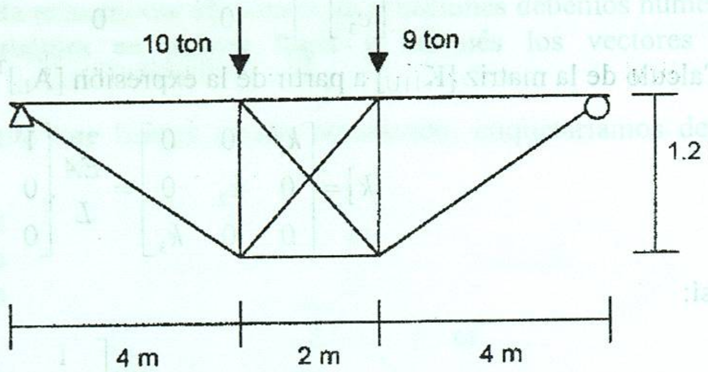
y las fuerzas internas en cada una de las tres barras:

$$\{p\} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = [k] \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -707.1 \\ -707.1 \\ 500 \end{bmatrix}$$

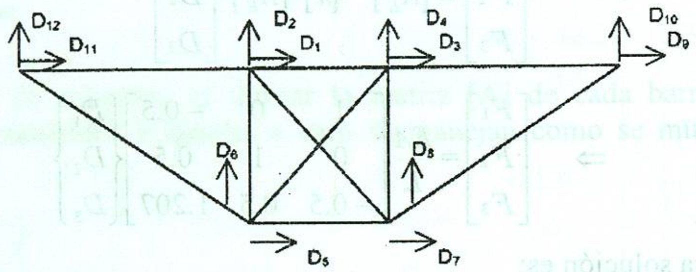
2.5. EJEMPLO ADICIONAL: Armadura simplemente apoyada

Estructura ejemplo a analizar.

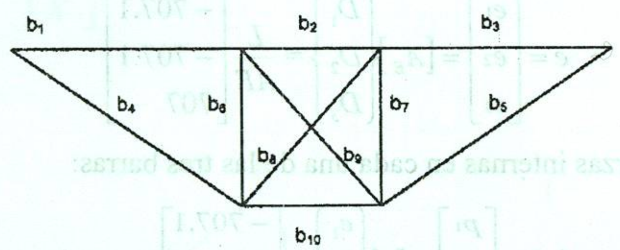
A_{HOR} = 10 CM^2
A_{VERT} = 5 CM^2
A_{DIAG} = 6 CM^2



Grados de libertad.



Identificación de barras.



2.5.1 Solucion 1: Ensamble directo de matrices de rigidez de todas las barras.
Obtencion de K

$$K := \frac{E \cdot A}{L} \qquad K1 := K3 \qquad K2 := K10 \qquad K4 := K5 \qquad K6 := K7 \qquad K8 := K9$$

$$K_1 := \frac{2100 \cdot 10}{400} \qquad K_4 := \frac{2100 \cdot 6}{417.6} \qquad K_8 := \frac{2100 \cdot 6}{233}$$

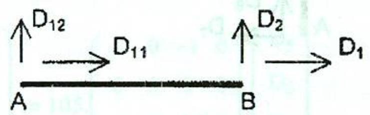
K_1=K_3= 52.5 **K_4=K_5= 30.2** **K_8=K_9= 54.1**

$$K_2 := \frac{2100 \cdot 10}{200} \qquad K_6 := \frac{2100 \cdot 5}{120}$$

K_2=K_{10}= 105 **K_6=K_7= 87.5**

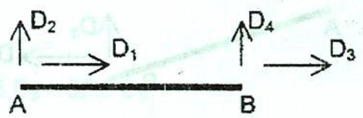
Calculo de la ecuación matricial de cada barra.

Barra no. 1



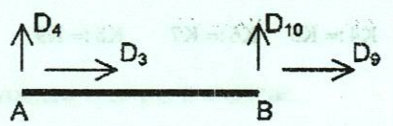
$$\begin{pmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} := 52.5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_{11} \\ D_{12} \\ D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}$$

Barra no. 2



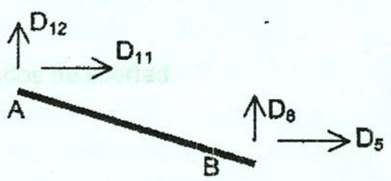
$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} := 105 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix}$$

Barra no. 3



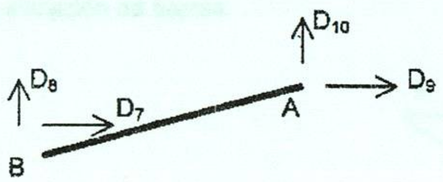
$$\begin{pmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_9 \\ F_{10} \end{pmatrix} := 52.5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_3 \\ D_4 \\ D_9 \\ D_{10} \end{pmatrix}$$

Barra no. 4



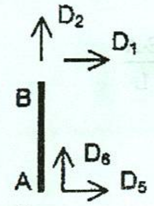
$$\begin{pmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix} := 30.2 \cdot \begin{pmatrix} 0.917 & -0.275 & -0.917 & 0.275 \\ -0.275 & 0.082 & 0.275 & -0.082 \\ -0.917 & 0.275 & 0.917 & -0.275 \\ 0.275 & -0.082 & -0.275 & 0.082 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_{11} \\ D_{12} \\ D_5 \\ D_6 \end{pmatrix}$$

Barra no. 5



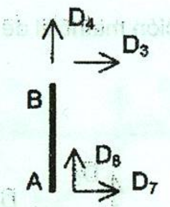
$$\begin{pmatrix} F_9 \\ F_{10} \\ F_7 \\ F_8 \end{pmatrix} := 30.2 \cdot \begin{pmatrix} 0.917 & 0.275 & -0.917 & -0.275 \\ 0.275 & 0.082 & -0.275 & -0.082 \\ -0.917 & -0.275 & 0.917 & 0.275 \\ -0.275 & -0.082 & 0.275 & 0.082 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_9 \\ D_{10} \\ D_7 \\ D_8 \end{pmatrix}$$

Barra no. 6



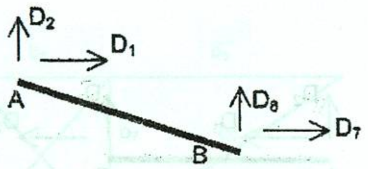
$$\begin{pmatrix} F_5 \\ F_6 \\ F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} := 87.5 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_5 \\ D_6 \\ D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}$$

Barra no. 7



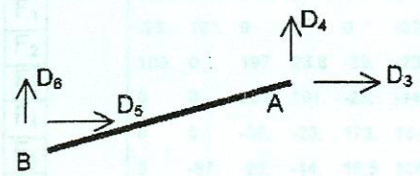
$$\begin{pmatrix} F_7 \\ F_8 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} := 87.5 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_7 \\ D_8 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix}$$

Barra no. 8



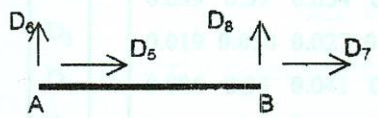
$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_7 \\ F_8 \end{pmatrix} := 54.1 \cdot \begin{pmatrix} 0.735 & -0.441 & -0.735 & 0.441 \\ -0.441 & 0.265 & 0.441 & -0.265 \\ -0.735 & 0.441 & 0.735 & -0.441 \\ 0.441 & -0.265 & -0.441 & 0.265 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_7 \\ D_8 \end{pmatrix}$$

Barra no. 9



$$\begin{pmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix} := 54.1 \cdot \begin{pmatrix} 0.735 & 0.441 & -0.735 & -0.441 \\ 0.441 & 0.265 & -0.441 & -0.265 \\ -0.735 & -0.441 & 0.735 & 0.441 \\ -0.441 & -0.265 & 0.441 & 0.265 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{pmatrix}$$

Barra no. 10



$$\begin{pmatrix} F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_{18} \end{pmatrix} := 105 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \end{pmatrix}$$

Barra 1
$F_{11}= 52.5\ D_{11} - 52.5\ D_1$
$F_{12}= 0$
$F_1= -52.5\ D_{11} + 52.5\ D_1$
$F_2= 0$

Barra 2
$F_3= 105\ D_1 -105\ D_3$
$F_2= 0$
$F_3= -105\ D_1 + 105\ D_3$
$F_4= 0$

Barra 3
$F_3= 52.5\ D_3 - 52.5\ D_9$
$F_4= 0$
$F_9 = -52.5\ D_3 + 52.5\ D_9$
F10= 0

Barra 4
$F_{11}= 27.69D_{11} - 8.3D_{12} - 27.69D_5 + 8.3D_6$
$F_{12}= -8.3D_{11} + 2.47D_{12} + 8.3D_5 - 2.47D_6$
$F_5= -27.69D_{11} + 8.3D_{12} + 27.69D_5 - 8.3D_6$
$F_6= 8.3D_{11} - 2.47D_{12} - 8.3D_5 + 2.47D_6$

Barra 5

$F_9 = 27.69D_9 - 8.3D_{10} - 27.69D_7 + 8.3D_8$
$F_{10} = -8.3D_9 + 2.47D_{10} + 8.3D_7 - 2.47D_8$
$F_7 = -27.69D_9 + 8.3D_{10} + 27.69D_7 - 8.3D_8$
$F_8 = 8.3D_9 - 2.47D_{10} - 8.3D_7 + 2.47D_8$

Barra 6

$F_5 = 0$
$F_6 = 87.5D_6 - 87.5D_2$
$F_1 = 0$
$F_2 = -87.5D_6 + 87.5D_2$

Barra 7

$F_7 = 0$
$F_8 = 87.5D_8 - 87.5D_4$
$F_3 = 0$
$F_4 = -87.5D_8 + 87.5D_4$

Barra 8

$F_1 = 39.76D_1 - 23.86D_2 - 39.76D_7 + 23.86D_8$
$F_2 = -23.86D_1 + 14.33D_2 + 23.86D_7 - 14.33D_8$
$F_7 = -39.76D_1 + 23.86D_2 + 39.76D_7 - 23.86D_8$
$F_8 = 23.86D_1 - 14.33D_2 - 23.86D_7 + 14.33D_8$

Barra 9

$F_3 = 39.76D_3 - 23.86D_4 - 39.76D_5 + 23.86D_6$
$F_4 = -23.86D_3 + 14.33D_4 + 23.86D_5 - 14.33D_6$
$F_5 = -39.76D_3 + 23.86D_4 + 39.76D_5 - 23.86D_6$
$F_6 = 23.86D_3 - 14.33D_4 - 23.86D_5 + 14.33D_6$

Barra 10

$F_5 = 105\,D_5 - 105\,D_7$
$F_6 = 0$
$F_7 = -105\,D_5 + 105\,D_7$
$F_8 = 0$

$F_1 = 197.26D_1 - 23.86D_2 - 105D_3 - 39.76D_7 + 23.86D_8 - 52.5D_{11}$
$F_2 = -23.86D_1 + 101.86D_2 - 87.5D_6 + 23.86D_7 - 14.33D_8$
$F_3 = -105D_1 + 197.26D_3 + 197.26D_4 - 39.76D_5 - 23.86D_6 - 52.5D_9$
$F_4 = 23.86D_3 + 101.86D_4 - 23.86D_5 - 14.33D_6 - 87.5D_8$
$F_5 = -39.76D_3 - 23.86D_4 + 172.45D_5 + 15.56D_6 - 105D_7 - 27.69D_{11} + 8.3D_{12}$
$F_6 = -87.5D_2 - 23.86D_3 - 14.33D_4 + 15.56D_5 - 104.3D_6 + 8.3D_{11}\ \ 2.47D_{12}$
$F_7 = -39.76D_1 + 23.86D_2 - 105D_5 + 172.45D_7 - 15.56D_8 - 27.69D_9 - 8.3D_{10}$
$F_8 = 23.86D_1 - 14.33D_2 - 87.5D_4 - 15.56D_7 + 104.3D_8 - 8.3D_9 - 2.47D_{10}$
$F_9 = -52.5D_3 - 27.69D_7 - 8.3D_8 + 80.19D_9 + 8.3D_{10}$
$F_{10} = -8.3D_7 - 2.47D_8 + 8.3D_9 + 2.47D_{10}$
$F_{11} = -52.5D_1 - 27.69D_5 + 8.3D_6 + 80.19D_{11} - 8.3D_{12}$
$F_{12} = 8.3D_5 - 2.47D_6 - 8.3D_{11} + 2.47D_{12}$

$$
\begin{array}{c}
\boxed{F_1}\\ \boxed{F_2}\\ \boxed{F_3}\\ \boxed{F_4}\\ \boxed{F_5}\\ \boxed{F_6}\\ \boxed{F_7}\\ \boxed{F_8}\\ \boxed{F_9}\\ \boxed{F_1}\\ \boxed{F_1}\\ \boxed{F_1}
\end{array}
\quad
\left|\begin{array}{ccccccccc|ccc}
197. & -23. & -105 & 0 & 0 & 0 & -39. & 23.8 & 0 & 0 & -52. & 0\\
-23. & 101. & 0 & 0 & 0 & -87. & 23.8 & -14. & 0 & 0 & 0 & 0\\
105 & 0 & 197. & 23.8 & -39. & -23. & 0 & 0 & -52. & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 23.8 & 101. & -23. & -14. & 0 & -87. & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -39. & -23. & 172. & 15.5 & -105 & 0 & 0 & 0 & -27. & 8.3\\
0 & -87. & -23. & -14. & 15.5 & 104. & 0 & 0 & 0 & 0 & 8.3 & -2.4\\
-39. & 23.8 & 0 & 0 & -105 & 0 & 172. & -15. & -27. & -8.3 & 0 & 0\\
23.8 & -14. & 0 & -87. & 0 & 0 & -15. & 104. & -8.3 & -2.4 & 0 & 0\\
0 & 0 & -52. & 0 & 0 & 0 & -27. & -8.3 & 80.1 & 8.3 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8.3 & -2.4 & 8.3 & 2.47 & 0 & 0\\
-52. & 0 & 0 & 0 & -27. & 8.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 80.1 & -8.3\\
8.3 & 0 & 0 & 0 & 8.3 & -2.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8.3 & 2.47
\end{array}\right|
\quad
\left|\begin{array}{c}
D_1\\ D_2\\ D_3\\ D_4\\ D_5\\ D_6\\ D_7\\ D_8\\ D_9\\ D_{10}\\ D_{11}\\ D_{12}
\end{array}\right|
$$

$$
\begin{pmatrix} D_1\\ D_2\\ D_3\\ D_4\\ D_5\\ D_6\\ D_7\\ D_8\\ D_9 \end{pmatrix}
:=
\begin{pmatrix}
0.019 & 0.039 & 0.019 & 0.026 & 0.011 & 0.039 & 0.011 & 0.026 & 0.019\\
0.039 & 0.39 & 0.054 & 0.35 & 0.041 & 0.381 & 0.024 & 0.348 & 0.08\\
0.019 & 0.054 & 0.027 & 0.041 & 0.016 & 0.055 & 0.015 & 0.042 & 0.028\\
0.026 & 0.35 & 0.041 & 0.39 & 0.055 & 0.348 & 0.038 & 0.381 & 0.08\\
0.011 & 0.041 & 0.016 & 0.055 & 0.027 & 0.042 & 0.022 & 0.055 & 0.024\\
0.039 & 0.381 & 0.055 & 0.348 & 0.042 & 0.383 & 0.026 & 0.346 & 0.08\\
0.011 & 0.024 & 0.015 & 0.038 & 0.022 & 0.026 & 0.026 & 0.039 & 0.023\\
0.026 & 0.348 & 0.042 & 0.381 & 0.055 & 0.346 & 0.039 & 0.383 & 0.08\\
0.019 & 0.08 & 0.028 & 0.08 & 0.024 & 0.08 & 0.023 & 0.08 & 0.047
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix} 0\\ -10\\ 0\\ -9\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}
$$

D1= -0.618	D4= -7.006	D7= -0.588
D2= -7.046	D5= -0.91	D8= -6.912
D3= -0.908	D6= -6.945	D9= -1.513

Barra 1

$$e_1 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ -0.618\\ -7.046 \end{pmatrix}$$

$e_1 = -0.618$ cm

$P_1 = (52.5)(-0.618) = -32.4$ Ton

Barra 2

$$e_2 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.618 \\ -7.046 \\ -0.908 \\ -7.006 \end{pmatrix}$$

e_2 -0.29m

P_2 (-0.29)(105) = -30.45 Ton

Barra 3

$$e_3 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.908 \\ -7.006 \\ -1.513 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$e_3 = -0.605$

P_3 (-0.605)(52.5) = -31.76 Ton

Barra 4

$$e_4 := \begin{pmatrix} -0.958 & 0.287 & 0.958 & -0.287 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.91 \\ -6.945 \end{pmatrix}$$

$e_4 = 1.12$

$P_4 = (1.12)(30.2) = 33.8$ Ton

Barra 5

$$e_5 := \begin{pmatrix} 0.958 & 0.287 & -0.958 & -0.287 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1.513 \\ 0 \\ -0.588 \\ -6.912 \end{pmatrix}$$

$e_5 = 1.097$

$P_5 = (1.097)(30.2) = 33.13$ Ton

Barra 6

$$e_6 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.91 \\ -6.945 \\ -0.618 \\ -7.046 \end{pmatrix}$$

$e_6 = -0.101$

$P_6 = (-0.101)(87.5) = -8.83$ Ton

Barra 7

$$e_7 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.588 \\ -6.912 \\ -0.908 \\ -7.046 \end{pmatrix}$$

$e_7 = -0.134$

$P_7 = (-0.134)(87.5) = -11.725$

Barra 8

$$e_8 := \begin{pmatrix} -0.857 & 0.515 & 0.857 & -0.515 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.618 \\ -7.046 \\ -0.588 \\ -6.912 \end{pmatrix}$$

$e_8 = -0.043$

$P_8 = (-0.043)(54.1) = -2.34$Ton

Barra 9

$$e_9 := \begin{pmatrix} 0.857 & 0.515 & -0.857 & -0.515 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.908 \\ -7.006 \\ -0.588 \\ -6.945 \end{pmatrix}$$

$e_9 = -0.0297$

$P_9 = (-0.0297)(54.1) = -1.6$ Ton

Barra 10

$$e_{10} := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.91 \\ -6.945 \\ -0.588 \\ -6.912 \end{pmatrix}$$

$e_{10} = 0.322$ cm

$P_{10} = (0.322)(105) = 33.81$ Ton