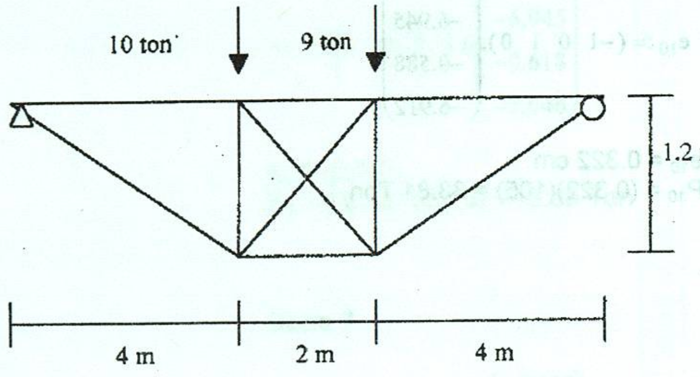
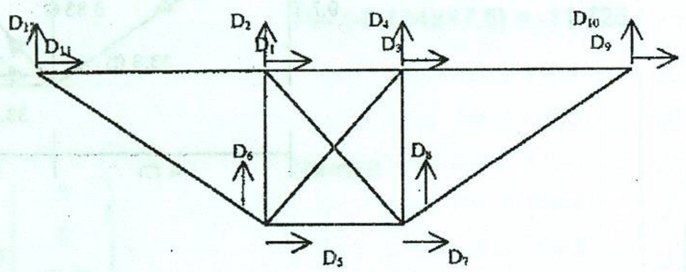
2.5.2 Solucion 2: Ensamble indirecto a traves de la matriz A de todas las barras.

Estructura ejemplo a analizar.

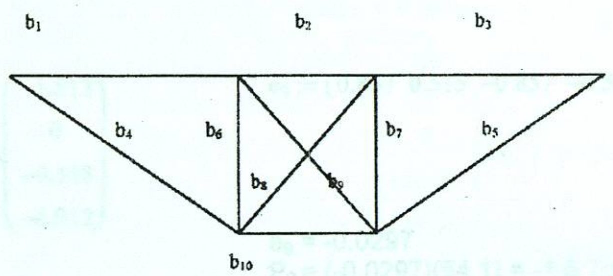
$A_{HOR} = 10\ CM^2$
$A_{VERT} = 5\ CM^2$
$A_{DIAG} = 6\ CM^2$



Grados de libertad.



Identificación de barras.



$$
\begin{vmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \\ e_9 \\ e_{10} \end{vmatrix}
=
\underbrace{\left[\begin{array}{cccccccccccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & .95 & -.28 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.95 & .287 & 0 & -.95 & .287 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.95 & -.28 & .95 & .28 & 0 & 0 & .28 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-.85 & .51 & 0 & 0 & 0 & 0 & .85 & -.51 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & .85 & .51 & -.85 & -.51 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]}_{A\,(10 \times 9)}
\begin{vmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \end{vmatrix}
$$

$$K := \frac{E \cdot A}{L} \qquad K1 := K3 \quad K2 := K10 \quad K4 := K5 \quad K6 := K7 \quad K8 := K9$$

$$K_1 := \frac{2100 \cdot 10}{400} \qquad K_4 := \frac{2100 \cdot 6}{417.6} \qquad K_8 := \frac{2100 \cdot 6}{233}$$

$K_1 = K_3 = 52.5$ **$K_4 = K_5 = 30.2$** **$K_8 = K_9 = 54.1$**

$$K_2 := \frac{2100 \cdot 10}{200} \qquad K_6 := \frac{2100 \cdot 5}{120}$$

$K_2 = K_{10} = 105$ **$K_6 = K_7 = 87.5$**

$$K := \begin{pmatrix} 52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 105 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30.17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30.17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 87.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 87.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54.07 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54.07 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 105 \end{pmatrix}$$

$$A^T := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.857 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & .515 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .857 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & .515 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .958 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.857 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -.287 & 0 & -1 & 0 & 0 & -.515 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -.958 & 0 & 0 & .857 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -.287 & 0 & -1 & -.515 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & .958 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{F\} = \overbrace{A^T\,K\,A}^{B}\;D$$

$$B := \begin{pmatrix} 197.212 & -23.864 & -105 & 0 & 0 & 0 & -39.712 & 23.864 & 0 \\ -23.864 & 101.841 & 0 & 0 & 0 & -87.5 & 23.864 & -14.341 & 0 \\ -105 & 0 & 197.212 & 23.864 & -39.712 & -23.864 & 0 & 0 & -52.5 \\ 0 & 0 & 23.864 & 101.841 & -23.864 & -14.341 & 0 & -87.5 & 0 \\ 0 & 0 & -39.712 & -23.864 & 172.401 & 15.569 & -105 & 0 & 0 \\ 0 & -87.5 & -23.864 & -14.341 & 15.569 & 104.326 & 0 & 0 & 0 \\ -39.712 & 23.864 & 0 & 0 & -105 & 0 & 172.401 & -15.569 & -27.689 \\ 23.864 & -14.341 & 0 & -87.5 & 0 & 0 & -15.569 & 104.326 & -8.295 \\ 0 & 0 & -52.5 & 0 & 0 & 0 & -27.689 & -8.295 & 80.189 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} := \begin{pmatrix} 0.019 & 0.038 & 0.014 & 0.025 & 0.011 & 0.038 & 0.011 & 0.025 & 0.019 \\ 0.038 & 0.385 & 0.053 & 0.346 & 0.041 & 0.377 & 0.024 & 0.344 & 0.079 \\ 0.019 & 0.053 & 0.027 & 0.041 & 0.016 & 0.054 & 0.015 & 0.041 & 0.027 \\ 0.025 & 0.346 & 0.041 & 0.385 & 0.055 & 0.344 & 0.038 & 0.377 & 0.079 \\ 0.011 & 0.041 & 0.016 & 0.055 & 0.027 & 0.041 & 0.022 & 0.054 & 0.024 \\ 0.038 & 0.377 & 0.054 & 0.344 & 0.041 & 0.379 & 0.025 & 0.342 & 0.079 \\ 0.011 & 0.024 & 0.015 & 0.038 & 0.022 & 0.025 & 0.026 & 0.038 & 0.023 \\ 0.025 & 0.344 & 0.041 & 0.377 & 0.054 & 0.342 & 0.038 & 0.379 & 0.079 \\ 0.019 & 0.074 & 0.027 & 0.079 & 0.024 & 0.079 & 0.023 & 0.079 & 0.046 \end{pmatrix}$$

$$F := \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \\ -9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad D = B^{-1}\,F$$

D1= -0.61	D4= -6.924	D7= -0.581
D2= -6.964	D5= -0.899	D8= -6.831
D3= -0.896	D6= -6.864	D9= -1.494

Barra 1

$$e_1 := (-1\ \ 0\ \ 1\ \ 0)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.61 \\ -6.964 \end{pmatrix}$$

e_1= -0.61cm

P_1= (52.5)(-0.61) = -32Ton

Barra 2

$$e_2 := (-1\ \ 0\ \ 1\ \ 0).\begin{pmatrix} -0.61 \\ -6.964 \\ -0.896 \\ -6.964 \end{pmatrix}$$

e_2 -0.286

P_2 (-0.286)(105) = -30 Ton

Barra 3

$$e_3 := (-1\ \ 0\ \ 1\ \ 0).\begin{pmatrix} -0.896 \\ -6.964 \\ -1.494 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e_3 = -0.598

P_3 (-0.598)(52.5) = -31.4 Ton

Barra 4

$$e_4 := (-0.958\ \ 0.287\ \ 0.958\ \ -0.287).\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.899 \\ -6.864 \end{pmatrix}$$

e_4 = 1.109

P_4 = (1.109)(30.17) = 33.5 Ton

Barra 5

$$e_5 := (0.958\ \ 0.287\ \ -0.958\ \ -0.287).\begin{pmatrix} -1.494 \\ 0 \\ -0.581 \\ -6.831 \end{pmatrix}$$

e_5 = 1.085

P_5 = (1.085)(30.17) = 32.7 Ton

Barra 6

$$e_6 := (0\ \ -1\ \ 0\ \ 1).\begin{pmatrix} -0.849 \\ -6.864 \\ -0.61 \\ -6.964 \end{pmatrix}$$

e_6 = -0.1

P_6 = (-0.1)(87.5) = -8.75 Ton

Barra 7

$$e_7 := (0\ \ -1\ \ 0\ \ 1).\begin{pmatrix} -0.581 \\ -6.831 \\ -0.896 \\ -6.924 \end{pmatrix}$$

e_7 = -0.093

P_7= (-0.093)(87.5) = -8.14

Barra 8

$$e_8 := (-0.857\ \ 0.515\ \ 0.857\ \ -0.515).\begin{pmatrix} -0.61 \\ -6.964 \\ -0.581 \\ -6.831 \end{pmatrix}$$

e_8 = -0.043

P_8 = (-0.043)(54.07) = -2.32Ton

Barra 9

$$e_9 := (0.857\ \ 0.515\ \ -0.857\ \ -0.515).\begin{pmatrix} -0.899 \\ -6.864 \\ -0.896 \\ -6.924 \end{pmatrix}$$

e_9 = -0.028

P_9 = (-0.028)(54.07) = -1.5 Ton

Barra 10

$$e_{10} := (-1\ \ 0\ \ 1\ \ 0).\begin{pmatrix} -0.899 \\ -6.864 \\ -0.581 \\ -6.831 \end{pmatrix}$$

e_{10} = 0.318 cm

P_{10} = (0.318)(105) = 33.39 Ton

2.6. Interpretación de la matriz $\{A\}^T$ como la matriz "estática"

Si analizamos la ecuación matricial que relaciona a las fuerzas internas en todas las barras con todas las fuerzas externas aplicadas en los puntos de control:

$$\{F\} = [A_E]^T \cdot \{p\}$$

Donde:

$[A_E]^T$ => tiene: renglones = # total de vectores desplazamiento en la armadura.

Columnas = # de barras en la armadura.

esta ecuación matricial equivale a aplicar las ecuaciones de la estática en cada uno de los nudos de la armadura, de esta aplicación surgirá un par de ecuaciones por cada nudo. Este procedimiento se conoce en los libros de estática como el método de los nudos para el análisis de fuerzas en armaduras isostáticas.

De acuerdo a lo que aprendimos en nuestros cursos de estática, deberíamos identificar, antes de intentar el análisis de fuerzas, si la armadura es isostática, en caso de no serlo decimos que tenemos una armadura hiperestática y no podemos aplicar el método.

El sistema matricial se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} F_U \\ F_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_U^T \\ A_R^T \end{bmatrix} . \{p\}$$

equivalentemente:

$$F_U = A_U^T \cdot p \qquad \text{(ecuación a)}$$

$$F_R = A_R^T \cdot p \qquad \text{(ecuación b)}$$

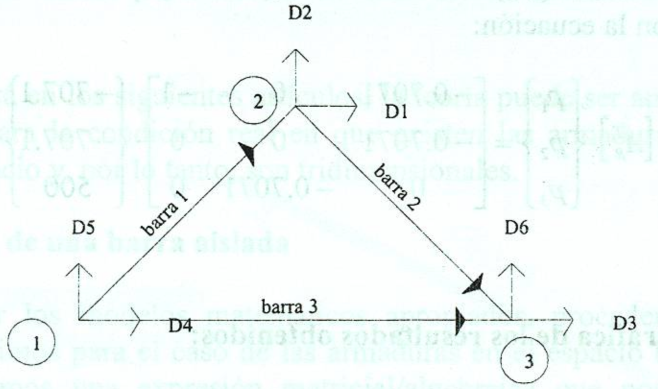
Si en la ecuación (a) se cumple que el número de fuerzas externas asociadas a los grados de libertad es igual al número de barras en la armadura, entonces la matriz $[A_U]^T$ es una matriz cuadrada y puede calcularse su inversa. En este caso, podemos calcular las fuerzas axiales en todas las barras a partir de esta ecuación. De la ecuación (b) se pueden determinar las reacciones en los apoyos.

El cumplimiento de las condiciones anteriores se tiene cuando la armadura cae dentro de la categoría conocida como armaduras isostáticas; es decir, basta con las ecuaciones de equilibrio de la estática para calcular las fuerzas internas en las barras. Aunque habría que reconocer que faltaría calcular las deformaciones internas de las barras y los desplazamientos de sus "nudos" para considerar que se ha realizado el análisis completo de la armadura, tal como se definió al inicio de este curso.

Determinar las elongaciones y desplazamientos de los nudos mediante los métodos "clásicos" ya conocidos, no es una tarea trivial, desde el punto de vista de trabajo numérico.

Aplicaremos estas ideas a la armadura triangular que ha sido estudiada en artículos previos.

Como primer paso del análisis, etiquetaremos los grados de libertad como se indica enseguida:



A continuación se forma la matriz $[A]^t$ para cada una de las tres barras:

$$\begin{Bmatrix} F_4 \\ F_5 \\ F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7071 \\ -0.7071 \\ 0.7071 \\ 0.7071 \end{bmatrix} \cdot p_1 \qquad \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7071 \\ 0.7071 \\ 0.7071 \\ -0.7071 \end{bmatrix} \cdot p_2 \qquad \begin{Bmatrix} F_4 \\ F_5 \\ F_3 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot p_3$$

Y podemos formar la matriz "A traspuesta" de la armadura completa ensamblando directamente los vectores columna $[A]^T$ de cada una de las tres barras:

$$\left\{\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \hline F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc} 0.7071 & -0.7071 & 0 \\ 0.7071 & 0.7071 & 0 \\ 0 & 0.7071 & 1 \\ \hline -0.7071 & 0 & -1 \\ -0.7071 & 0 & 0 \\ 0 & -0.7071 & 0 \end{array}\right] \cdot \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}$$

ahora podemos realizar la partición de esta ecuación matricial, tal como lo indica la línea discontinua, donde F_U y A_U son:

$$\{F_U\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1000 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad [A_U^T] = \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 & 0 \\ 0.7071 & 0.7071 & 0 \\ 0 & 0.7071 & 1 \end{bmatrix}$$

$[A_U]^T$ es una matriz cuadrada y, por lo tanto, puede existir su inversa. A partir de esta ecuación podemos calcular las fuerzas axiales en todas las barras con la ecuación:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} = \left[A_U^T\right]^{-1} \cdot \{F_U\} = \begin{Bmatrix} -707.1 \\ -707.1 \\ 500 \end{Bmatrix}$$

y las reacciones con la ecuación:

$$\begin{Bmatrix} F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \left[A_R^T\right] \cdot \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7071 & 0 & -1 \\ -0.7071 & 0 & 0 \\ 0 & -0.7071 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -707.1 \\ -707.1 \\ 500 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 500 \\ 500 \end{Bmatrix}$$

Representación gráfica de los resultados obtenidos:

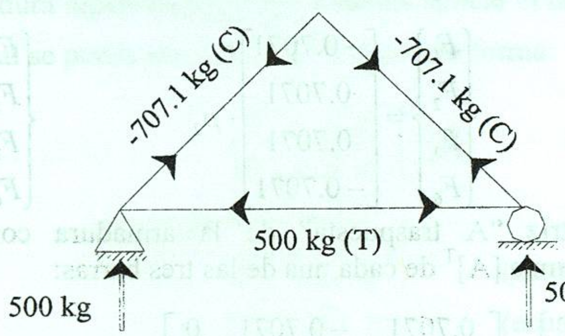


Diagrama de fuerzas en barras
y reacciones en los apoyos

ESTRUCTURAS TIPO ARMADURA EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

3.1. Ampliación de la teoría para cubrir el caso de las armaduras en el espacio tridimensional.

Tal como se demostrará en los siguientes artículos, la teoría puede ser ampliada de manera lógica y sistemática para la condición real en que existen las armaduras, es decir, estas existen en nuestro espacio y, por lo tanto, son tridimensionales.

3.2. Matriz de rigidez de una barra aislada

Para poder desarrollar los modelos matemáticos apropiados, procederemos de manera análoga a como lo hicimos para el caso de las armaduras en el espacio bidimensional. En primer lugar, buscaremos una expresión matricial/algebraica que nos relacione a los desplazamientos de los dos extremos de la barra *versus* la elongación de la misma, enseguida, demostraremos como se relacionan las fuerzas internas *versus* las fuerzas en los extremos de la barra.

3.2.1. Obtención de matriz de transformación de coordenadas globales a locales

En el caso de las armaduras en el espacio bidimensional, esta matriz que establece la relación geométrica entre los desplazamientos del extremo B de la barra *versus* el desplazamiento interno de la barra, fue establecida como:

$$e_{barra} = [\cos\theta \quad sen\theta] \cdot \begin{bmatrix} dx_B \\ dy_B \end{bmatrix}$$

Observar que se puede llegar a esta misma expresión a través de las ideas siguientes:

1.- Si consideramos que la barra analizada tiene dirección y sentido (va del extremo A al B) podemos representarla con un vector

$$\vec{B} = \Delta x \cdot i + \Delta y \cdot j + \Delta z \cdot k$$

que dividido entre su modulo $\|\vec{B}\| = L$, nos resulta el vector unitario $\vec{b}$

$$\vec{b} = \frac{\Delta x}{L} \cdot i + \frac{\Delta y}{L} \cdot j + \frac{\Delta z}{L} \cdot k$$

2.- El producto de los vectores $\vec{b} \cdot \vec{D}$, donde: $\vec{D} = dx \cdot i + dy \cdot j + dz \cdot k$, es la elongación de la barra como función de los desplazamientos del extremo B de la misma:

$$e = \vec{b} \cdot \vec{D} = \left(\frac{\Delta x}{L} \cdot i + \frac{\Delta y}{L} \cdot j + \frac{\Delta z}{L} \cdot k\right) \cdot (dx \cdot i + dy \cdot j + dz \cdot k)$$

$$e = \left(\frac{\Delta x}{L}\right) \cdot dx + \left(\frac{\Delta y}{L}\right) \cdot dy + \left(\frac{\Delta z}{L}\right) \cdot dz$$

Así, para el espacio bidimensional: