

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} = [A_U^T]^{-1} \cdot \{F_U\} = \begin{Bmatrix} -707.1 \\ -707.1 \\ 500 \end{Bmatrix}$$

y las reacciones con la ecuación:

$$\begin{Bmatrix} F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = [A_R^T] \cdot \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7071 & 0 & -1 \\ -0.7071 & 0 & 0 \\ 0 & -0.7071 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -707.1 \\ -707.1 \\ 500 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 500 \\ 500 \end{Bmatrix}$$

Representación gráfica de los resultados obtenidos:

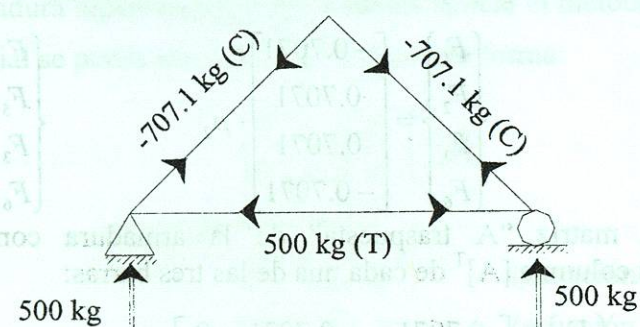


Diagrama de fuerzas en barras y reacciones en los apoyos

## ESTRUCTURAS TIPO ARMADURA EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

### 3.1. Ampliación de la teoría para cubrir el caso de las armaduras en el espacio tridimensional.

Tal como se demostrará en los siguientes artículos, la teoría puede ser ampliada de manera lógica y sistemática para la condición real en que existen las armaduras, es decir, estas existen en nuestro espacio y, por lo tanto, son tridimensionales.

### 3.2. Matriz de rigidez de una barra aislada

Para poder desarrollar los modelos matemáticos apropiados, procederemos de manera análoga a como lo hicimos para el caso de las armaduras en el espacio bidimensional. En primer lugar, buscaremos una expresión matricial/algebraica que nos relacione a los desplazamientos de los dos extremos de la barra *versus* la elongación de la misma, enseguida, demostraremos como se relacionan las fuerzas internas *versus* las fuerzas en los extremos de la barra.

#### 3.2.1. Obtención de matriz de transformación de coordenadas globales a locales

En el caso de las armaduras en el espacio bidimensional, esta matriz que establece la relación geométrica entre los desplazamientos del extremo B de la barra *versus* el desplazamiento interno de la barra, fue establecida como:

$$e_{barra} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} dx_B \\ dy_B \end{Bmatrix}$$

Observar que se puede llegar a esta misma expresión a través de las ideas siguientes:

1.- Si consideramos que la barra analizada tiene dirección y sentido (va del extremo A al B) podemos representarla con un vector

$$\vec{B} = \Delta x \cdot i + \Delta y \cdot j + \Delta z \cdot k$$

que dividido entre su modulo  $|\vec{B}| = L$ , nos resulta el vector unitario  $\vec{b}$

$$\vec{b} = \frac{\Delta x}{L} \cdot i + \frac{\Delta y}{L} \cdot j + \frac{\Delta z}{L} \cdot k$$

2.- El producto de los vectores  $\vec{b} \cdot \vec{D}$ , donde:  $\vec{D} = dx \cdot i + dy \cdot j + dz \cdot k$ , es la elongación de la barra como función de los desplazamientos del extremo B de la misma:

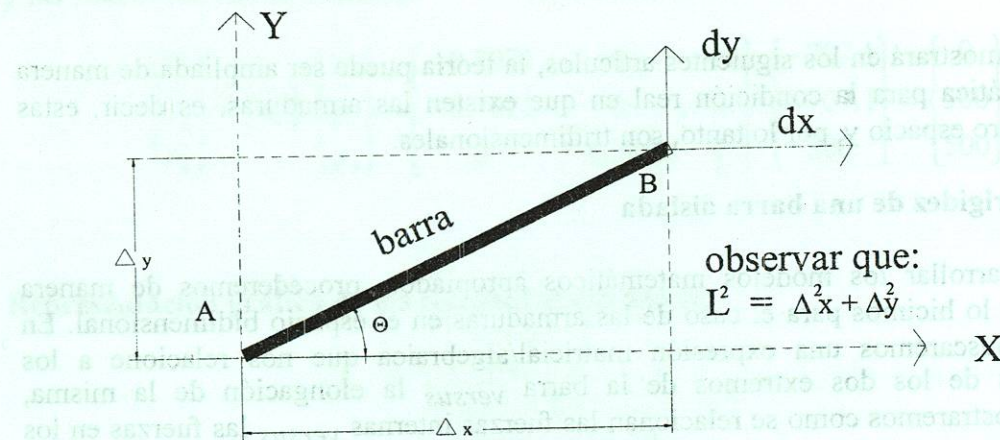
$$e = \vec{b} \cdot \vec{D} = \left( \frac{\Delta x}{L} \cdot i + \frac{\Delta y}{L} \cdot j + \frac{\Delta z}{L} \cdot k \right) \cdot (dx \cdot i + dy \cdot j + dz \cdot k)$$

$$e = \left( \frac{\Delta x}{L} \right) \cdot dx + \left( \frac{\Delta y}{L} \right) \cdot dy + \left( \frac{\Delta z}{L} \right) \cdot dz$$

Así, para el espacio bidimensional:

$$e = \left(\frac{\Delta x}{L}\right) \cdot dx + \left(\frac{\Delta y}{L}\right) \cdot dy$$

Si observamos en la figura siguiente:



$$\cos \theta = \frac{\Delta x}{L} \quad \text{y} \quad \sin \theta = \frac{\Delta y}{L}$$

sustituyendo en la ecuación recién obtenida:

$$e_{\text{barra}} = \cos \theta \cdot dx + \sin \theta \cdot dy$$

o matricialmente:

$$[e_{\text{barra}}] = [\cos \theta \quad \sin \theta] \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \quad ; \text{ relación geométrica que ya conocíamos ;}$$

Esta demostración de lo ya conocido y aceptado, a través de un camino diferente, nos da la confianza para afirmar que para el caso tridimensional la elongación total de la barra se puede calcular por medio de la expresión siguiente:

$$e_{\text{barra}} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\Delta x}{L}\right) & -\left(\frac{\Delta y}{L}\right) & -\left(\frac{\Delta z}{L}\right) & \left(\frac{\Delta x}{L}\right) & \left(\frac{\Delta y}{L}\right) & \left(\frac{\Delta z}{L}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Dx_A \\ Dy_A \\ Dz_A \\ Dx_B \\ Dy_B \\ Dz_B \end{bmatrix}$$

el lector deberá reconocer que la utilización del producto punto de dos vectores nos lleva a la respuesta correcta debido a que su resultado coincide con el efecto que tiene un vector desplazamiento sobre la barra cuando se acepta el teorema demostrado para desplazamientos pequeños.

Si sustituimos:  $C_x = \frac{\Delta x}{L}$ ,  $C_y = \frac{\Delta y}{L}$ ,  $C_z = \frac{\Delta z}{L}$  (cosenos directores de la barra)

Podemos reescribir la ecuación propuesta de la siguiente forma:

$$e_{\text{barra}} = \begin{bmatrix} -C_x & -C_y & -C_z & C_x & C_y & C_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Dx_A \\ Dy_A \\ Dz_A \\ Dx_B \\ Dy_B \\ Dz_B \end{bmatrix} = [A_{\text{barra}}] \cdot [D_{\text{barra}}]$$

### 3.2.2. Obtención de matriz de transformación de fuerzas internas a fuerzas externas

Ahora estableceremos la relación geométrica entre la fuerza interna de la barra y las fuerzas que deben existir en los extremos de la misma barra. Para la obtención de la relación buscada, aplicaremos el principio de contragradencia demostrado en el artículo 2.2.3.

Como es sabido, se debe cumplir la siguiente igualdad:

$$\begin{matrix} \text{TRABAJO} \\ \text{FUERZAS} \\ \text{EXTERNAS} \end{matrix} = \begin{matrix} \text{TRABAJO} \\ \text{FUERZAS} \\ \text{INTERNAS} \end{matrix}$$

Si consideramos que:

$$e = [A] [D] \\ \text{y } [F] = [B] \cdot p$$

sustituyendo en la igualdad de trabajos externo e interno:

$$\frac{1}{2} \{F\}^T \cdot \{D\} = \frac{1}{2} p \cdot e$$

$$\frac{1}{2} p \cdot [B]^T \cdot \{D\} = \frac{1}{2} p \cdot [A] \cdot \{D\}$$

aplicando el principio de contragradencia

$$[B]^T = [A] \quad \Rightarrow \quad [B] = [A]^T$$

así, podemos afirmar que la relación entre fuerzas internas y externas es:

$$\{F\} = [A]^T \cdot p$$

finalmente, extendiendo el resto de las ideas manejadas para el caso bidimensional al tridimensional:

$$[F] = [A]^T \cdot k \cdot [A] \cdot [D]$$

A partir de esta ecuación matricial de barra, podemos ensamblar la matriz de rigidez de toda la estructura superponiendo los efectos de todas las barras. Para realizar este ensamblaje se puede proceder como en el caso de las armaduras bidimensionales, a través del procedimiento tipo 1 o del procedimiento tipo 2.

Posiblemente el procedimiento tipo 2 sea el más apropiado, según se ha descubierto en los ejercicios numéricos realizados por el lector hasta este momento.

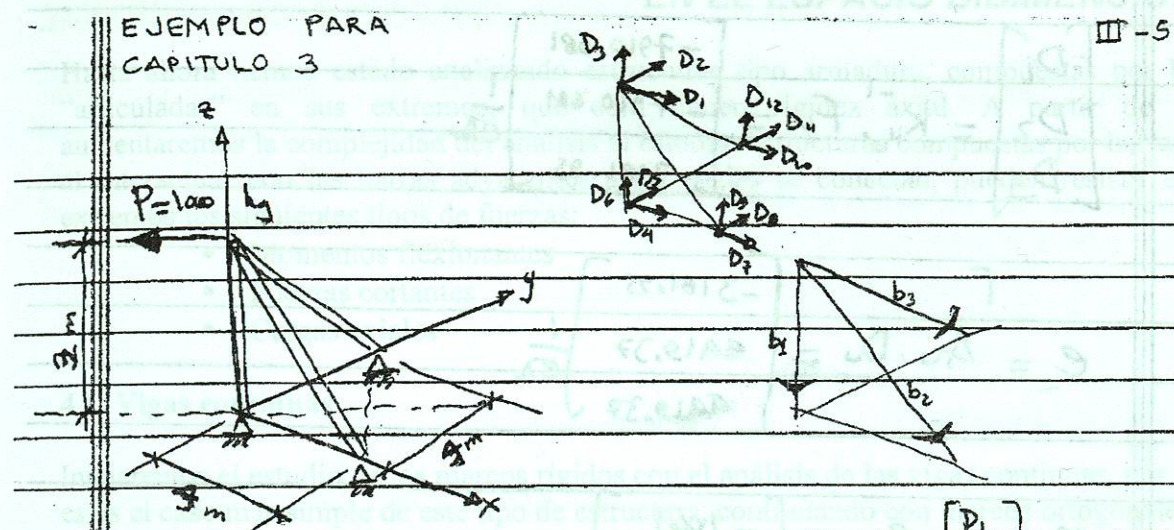
Una vez ensamblada la matriz de rigidez de toda la estructura, el resto del procedimiento de análisis es idéntico al seguido para las armaduras bidimensionales.

3.3. Caso para estudio: Armadura piramidal

3.3.1. Solución 1: ensamble directo de matrices  $K_b = A^T \cdot k \cdot A$

**PENDIENTE**

3.3.2. Solución 2: ensamble indirecto a través de la matriz A de todas las barras



	A <sub>1</sub>			A <sub>2</sub>			A <sub>3</sub>			
e <sub>1</sub>	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	D <sub>1</sub>
e <sub>2</sub>	-0.8	0	0.6	0	0	0	0.8	0	-0.6	D <sub>2</sub>
e <sub>3</sub>	0	-0.8	0.6	0	0	0	0	0	0.8	D <sub>3</sub>

	Δ <sub>1</sub>	Δ <sub>2</sub>	Δ <sub>3</sub>	Δ <sub>4</sub>	Δ <sub>5</sub>	Δ <sub>6</sub>
b <sub>1</sub>	0	0	-3	0	0	-1
b <sub>2</sub>	4	0	-3	4/5	0	-3/5
b <sub>3</sub>	0	4	-3	0	4/5	-3/5

$$[e] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -0.8 & 0 & 0.6 \\ 0 & -0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EA & 0 \\ 0 & 0 & EA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

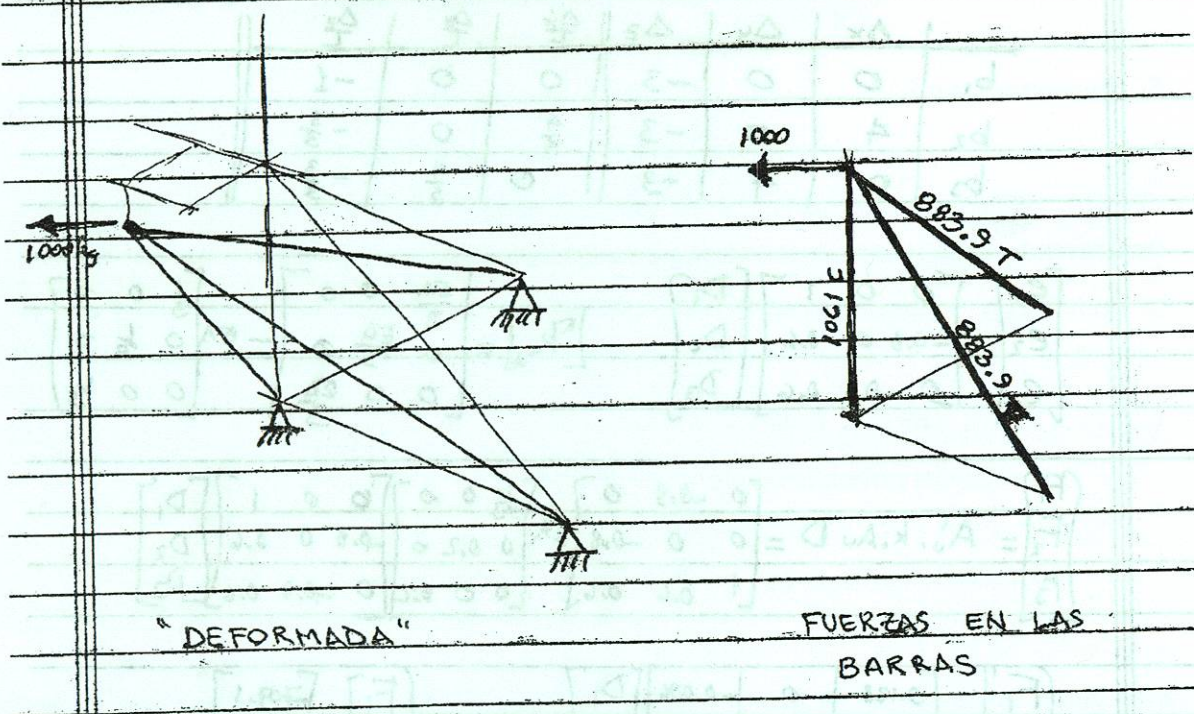
$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = A^T \cdot k \cdot A \cdot D = \begin{bmatrix} 0 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & -0.8 \\ 1 & 0.6 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EA & 0 \\ 0 & 0 & EA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.128 & 0 & -0.096 \\ 0 & 0.128 & -0.096 \\ -0.096 & -0.096 & 0.477 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 709.1 \\ -709.1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = K_{11}^{-1} \cdot F_u = \begin{bmatrix} -7910.681 \\ -7910.681 \\ -3181.95 \end{bmatrix} \frac{1}{EA}$$

$$e = A_u \cdot D_u = \begin{bmatrix} -3181.95 \\ 4419.37 \\ 4419.37 \end{bmatrix} \frac{1}{EA}$$

$$p = k \cdot e = \begin{bmatrix} -1061 \\ 883.9 \\ 883.9 \end{bmatrix}$$



## ESTRUCTURAS TIPO MARCO RÍGIDO EN EL ESPACIO BIDIMENSIONAL

Hasta ahora hemos estado analizando estructuras tipo armadura, compuestas por barras "articuladas" en sus extremos, que solo tienen rigidez axial. A partir de ahora aumentaremos la complejidad del análisis al estudiar estructuras compuestas por barras que, al interactuar con las barras adyacentes a las cuales se conectan, pueden resistir en sus extremos los siguientes tipos de fuerzas:

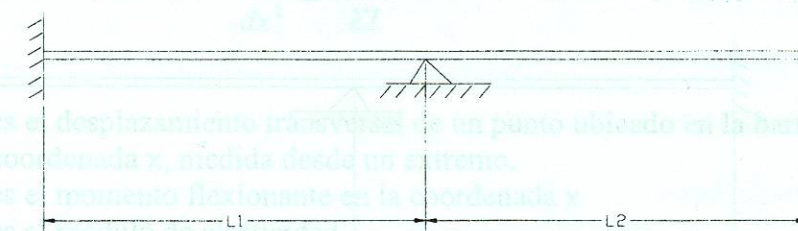
- Momentos flexionantes
- Fuerzas cortantes
- Cargas axiales

### 4.1. Vigas continuas

Iniciaremos el estudio de los marcos rígidos con el análisis de las vigas continuas, por ser estas el caso más simple de este tipo de estructura, continuando con marcos ortogonales y terminando con el caso menos simple de los marcos no ortogonales.

#### 4.1.1. Caso para estudio: viga continua de dos claros

Aplicaremos el método general para el caso mostrado en la figura siguiente:



Para realizar el análisis estructural, extenderemos las ideas utilizadas en el análisis de armaduras.

#### 4.1.1.1. Relaciones constitutivas.

En el caso de las armaduras podíamos determinar de manera muy simple y directa la relación entre la elongación axial y la fuerza axial asociada. Esta relación es

$$p = k \cdot e$$

Donde:

k es la rigidez axial representada por un escalar (un número real)

$$k = \frac{A \cdot E}{L}$$

Para las barras articuladas analizadas en el espacio bidimensional solo influía en su estado interno de deformaciones y esfuerzos, la componente axial del vector de desplazamiento generalizado. Ahora, debido a la existencia de rigidez a flexión y cortante, influirán los