

|                            |             |                |
|----------------------------|-------------|----------------|
| $D_1$                      | $-7910.681$ | $\frac{1}{EA}$ |
| $D_2 = k_{10} \cdot F_u =$ | $-7910.681$ |                |
| $D_3$                      | $-3181.95$  |                |

|                       |            |                |
|-----------------------|------------|----------------|
| $e = A_u \cdot D_u =$ | $-3181.95$ | $\frac{1}{EA}$ |
|                       | $4419.37$  |                |
|                       | $4419.37$  |                |

|                   |         |
|-------------------|---------|
| $p = k \cdot e =$ | $-1061$ |
|                   | $883.9$ |
|                   | $883.9$ |

"DEFORMADA"

FUERZAS EN LAS BARRAS

### ESTRUCTURAS TIPO MARCO RÍGIDO EN EL ESPACIO BIDIMENSIONAL

Hasta ahora hemos estado analizando estructuras tipo armadura, compuestas por barras "articuladas" en sus extremos, que solo tienen rigidez axial. A partir de ahora aumentaremos la complejidad del análisis al estudiar estructuras compuestas por barras que, al interactuar con las barras adyacentes a las cuales se conectan, pueden resistir en sus extremos los siguientes tipos de fuerzas:

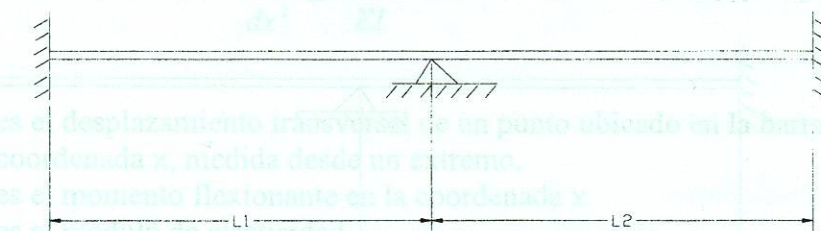
- Momentos flexionantes
- Fuerzas cortantes
- Cargas axiales

#### 4.1. Vigas continuas

Iniciaremos el estudio de los marcos rígidos con el análisis de las vigas continuas, por ser estas el caso más simple de este tipo de estructura, continuando con marcos ortogonales y terminando con el caso menos simple de los marcos no ortogonales.

##### 4.1.1. Caso para estudio: viga continua de dos claros

Aplicaremos el método general para el caso mostrado en la figura siguiente:



Para realizar el análisis estructural, extenderemos las ideas utilizadas en el análisis de armaduras.

##### 4.1.1.1. Relaciones constitutivas.

En el caso de las armaduras podíamos determinar de manera muy simple y directa la relación entre la elongación axial y la fuerza axial asociada. Esta relación es

$$p = k \cdot e$$

Donde:

k es la rigidez axial representada por un escalar (un número real)

$$k = \frac{A \cdot E}{L}$$

Para las barras articuladas analizadas en el espacio bidimensional solo influía en su estado interno de deformaciones y esfuerzos, la componente axial del vector de desplazamiento generalizado. Ahora, debido a la existencia de rigidez a flexión y cortante, influirán los

### ESTRUCTURAS TIPO MARCO RÍGIDO EN EL ESPACIO BIDIMENSIONAL

Hasta ahora hemos estado analizando estructuras tipo armadura, compuestas por barras "articuladas" en sus extremos, que solo tienen rigidez axial. A partir de ahora aumentaremos la complejidad del análisis al estudiar estructuras compuestas por barras que, al interactuar con las barras adyacentes a las cuales se conectan, pueden resistir en sus extremos los siguientes tipos de fuerzas:

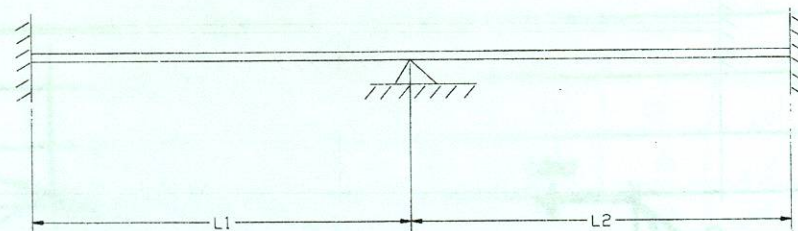
- Momentos flexionantes
- Fuerzas cortantes
- Cargas axiales

#### 4.1. Vigas continuas

Iniciaremos el estudio de los marcos rígidos con el análisis de las vigas continuas, por ser estas el caso más simple de este tipo de estructura, continuando con marcos ortogonales y terminando con el caso menos simple de los marcos no ortogonales.

##### 4.1.1. Caso para estudio: viga continua de dos claros

Aplicaremos el método general para el caso mostrado en la figura siguiente:



Para realizar el análisis estructural, extenderemos las ideas utilizadas en el análisis de armaduras.

##### 4.1.1.1. Relaciones constitutivas.

En el caso de las armaduras podíamos determinar de manera muy simple y directa la relación entre la elongación axial y la fuerza axial asociada. Esta relación es

$$p = k \cdot e$$

Donde:

k es la rigidez axial representada por un escalar (un número real)

$$k = \frac{A \cdot E}{L}$$

Para las barras articuladas analizadas en el espacio bidimensional solo influía en su estado interno de deformaciones y esfuerzos, la componente axial del vector de desplazamiento generalizado. Ahora, debido a la existencia de rigidez a flexión y cortante, influirán los

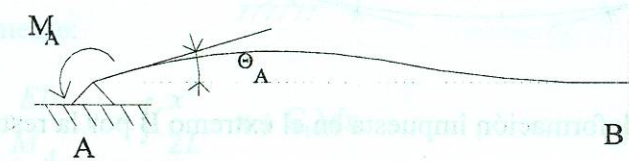
#### 1) efecto del vector de giro $\Theta_A^*$ .

De acuerdo a lo expresado anteriormente, se supondrá que:

$$dx_A^* = dy_A^* = dx_B^* = dy_B^* = \Theta_B^* = 0.0$$

Podemos interpretar esta condición como el caso de una barra empotrada en el extremo B y articulada en el extremo A.

Asociaremos al giro en A con la acción del momento  $M_A^*$ , gráficamente:



De la teoría de la resistencia de materiales, sabemos que la ecuación diferencial que nos permite obtener la curva elástica, de manera simplificada, es:

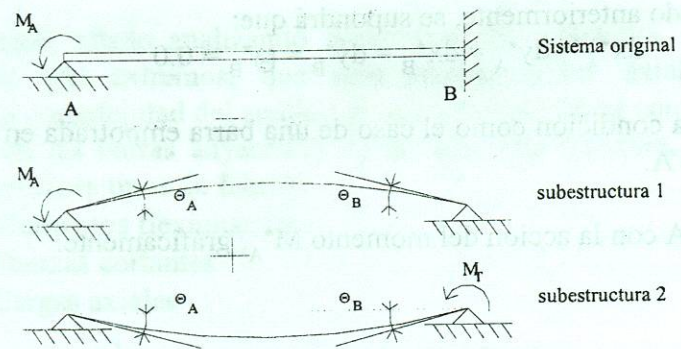
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

Donde:

- y es el desplazamiento transversal de un punto ubicado en la barra en la coordenada x, medida desde un extremo.
- M(x) es el momento flexionante en la coordenada x
- E es el módulo de elasticidad
- I es el momento de inercia de la sección transversal en la coordenada x

**NOTA IMPORTANTE:** En nuestro análisis habremos de suponer que EI se mantiene constante en toda la longitud de la barra, es decir, analizaremos el caso de *barras prismáticas*.

La barra que se analizará es un sistema estructural hiperestático. Para encontrar la curva elástica y las reacciones, descompondremos al sistema original en dos barras isostáticas en las que el momento  $M_T$  es el momento necesario en el extremo B para evitar que este gire (B está empotrado), gráficamente:



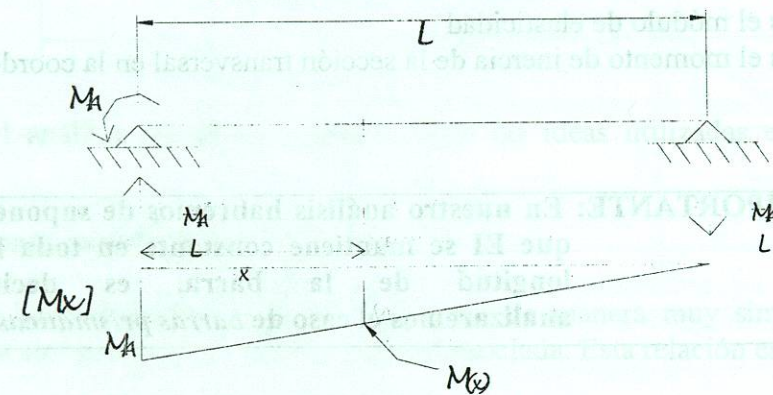
Así, una condición de deformación impuesta en el extremo B por la restricción del apoyo es:

$$\ominus_{BMA} + \ominus_{BMT} = 0$$

Donde:

- $\ominus_{BMA}$  -> es el giro en B producido por  $M_A$
- $\ominus_{BMT}$  -> es el giro en B producido por  $M_T$

Solución del sistema 1:



Donde

$$M(x) = -M_A + \frac{M_A}{L} x = M_A \left( \frac{x}{L} - 1 \right)$$

Ecuación diferencial a resolver

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

Integrando una vez:

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = \int M_A \left( \frac{x}{L} - 1 \right) dx$$

$$\frac{EI}{M_A} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2L} - x + C_1 \quad (\text{ecuación 1})$$

Integrando nuevamente:

$$\frac{EI}{M_A} \cdot y = \int \left( \frac{x^2}{2L} - x + C_1 \right) dx$$

$$\frac{EI}{M_A} \cdot y = \frac{x^3}{6L} - \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \quad (\text{ecuación 2})$$

Condiciones de borde:

para  $x=0 \rightarrow y=0$ ; para  $x=L \rightarrow y=0$

sustituyendo en la ecuación 2 las dos condiciones de borde :

$$0 = C_2 \quad \text{condición 1}$$

$$0 = \frac{L^3}{6L} - \frac{L^2}{2} + C_1 L \quad \rightarrow \quad C_1 = \frac{L}{3} \quad \text{condición 2}$$

$$\frac{EI}{M_A} \cdot y = \frac{x^3}{6L} - \frac{x^2}{2} + \frac{L}{3} x \quad (\text{ecuación 3})$$

$$y \quad \frac{EI}{M_A} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2L} - x + \frac{L}{3} \quad (\text{ecuación 4})$$

Donde la ecuación 4 nos define la pendiente de la curva elástica en el punto de coordenada x para  $0 < x < L$ .

Debido a la hipótesis de los desplazamientos pequeños

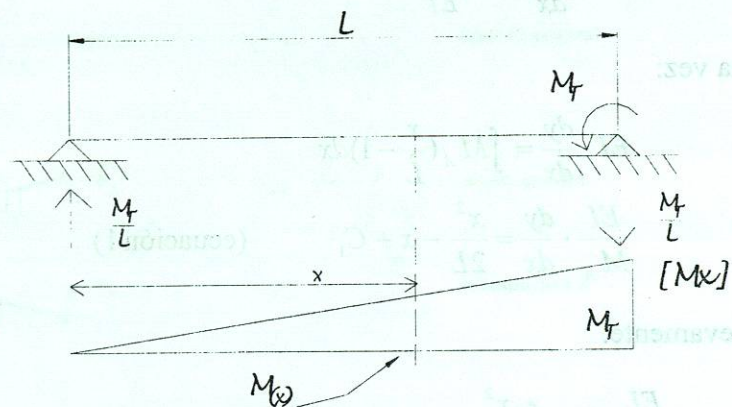
$$\ominus \approx \frac{dy}{dx}$$

$\therefore \ominus_{BMA}^*$  se puede calcular como

$$\frac{EI}{M_A} \cdot \ominus_{BMA}^* = -\frac{L}{6} \quad (\text{ecuación 5})$$

ecuación 4 cuando  $x=L$

Solución del sistema 2:



Donde

$$M(x) = \frac{M_T}{L} \cdot x$$

Ecuación diferencial a resolver

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{Mx}{EI}$$

Integrando una vez:

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = \int M_T \cdot \frac{x}{L} \cdot dx$$

$$\frac{EI}{M_T} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2L} + C_1 \quad \text{(ecuación 6)}$$

Integrando nuevamente:

$$\frac{EI}{M_T} \cdot y = \int \left( \frac{x^2}{2L} + C_1 \right) dx$$

$$\frac{EI}{M_T} \cdot y = \frac{x^3}{6L} + C_1 x + C_2 \quad \text{(ecuación 7)}$$

Condiciones de borde:

para  $x=0 \rightarrow y=0$ ; para  $x=L \rightarrow y=0$

sustituyendo en la ecuación 2 las dos condiciones de borde:

$$0 = C_2 \quad \text{condición 1}$$

$$0 = \frac{L^3}{6L} + C_1 L \rightarrow C_1 = -\frac{L}{6} \quad \text{condición 2}$$

$$\frac{EI}{M_T} \cdot y = \frac{x^3}{6L} - \frac{L}{6} x \quad \text{(ecuación 8)}$$

$$y \quad \frac{EI}{M_T} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2L} - \frac{L}{6} \quad \text{(ecuación 9)}$$

$\therefore \Theta_{BMT}^*$  se puede calcular como

$$\frac{EI}{M_T} \cdot \Theta_{BMT}^* = \frac{L}{3} \quad \text{(ecuación 10)}$$

cuando  $x=L$

Superposición de las dos soluciones.

recordando que se debe cumplir la condición geométrica:

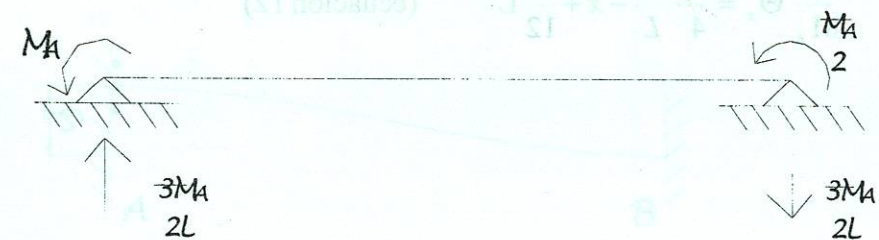
$$\Theta_{BMA}^* + \Theta_{BMT}^* = 0$$

entonces, de ecuaciones 5 y 10:

$$-\frac{M_A L}{6EI} = -\frac{M_T L}{3EI}$$

$$\Rightarrow M_T = \frac{M_A}{2}$$

y el resto de las reacciones se pueden calcular de manera inmediata ya que el sistema se ha vuelto isostático:



Además, podemos calcular la forma y pendiente de la curva elástica correspondiente.

Para la curva elástica, sumamos las ecuaciones 3 y 8:

$$\frac{EI}{M_A} y_I = \frac{x^3}{6L} - \frac{x^2}{2} + \frac{L}{3} x$$

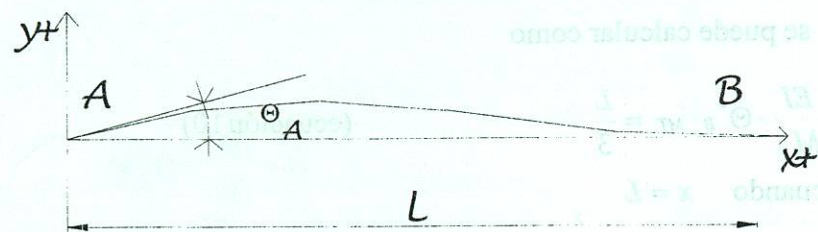
$$\frac{EI}{M_A} y_{II} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{x^2}{6L} - \frac{L}{6} \right)$$

ecuación 8 con  $M_T = \frac{M_A}{2}$

sumando las dos ecuaciones y agrupando términos :

$$\frac{EI}{M_A} y = \frac{3}{12} \cdot \frac{x^3}{L} - \frac{x^2}{2} + \frac{3L}{12} x \quad (\text{ecuación 11})$$

Graficando esta ecuación:



Y para la función tangente a la curva elástica, sumamos las ecuaciones 4 y 9:

$$\left( \frac{EI}{M_A} \cdot \frac{dy}{dx} \right)_I = \left( \frac{x^2}{2L} - x + \frac{L}{3} \right)$$

$$\left( \frac{EI}{M_A} \cdot \frac{dy}{dx} \right)_{II} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{x^2}{2L} - \frac{L}{6} \right)$$

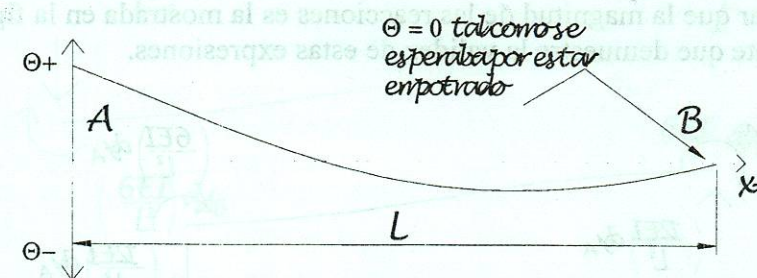
ecuación 9 con  $M_T = \frac{M_A}{2}$

por la hipótesis de los desplazamientos pequeños  $\Theta_x \approx \frac{dy}{dx}$

sumando y agrupando términos :

$$\frac{EI}{M_A} \Theta_x = \frac{3}{4} \cdot \frac{x^2}{L} - x + \frac{3}{12} L \quad (\text{ecuación 12})$$

Graficando esta ecuación:



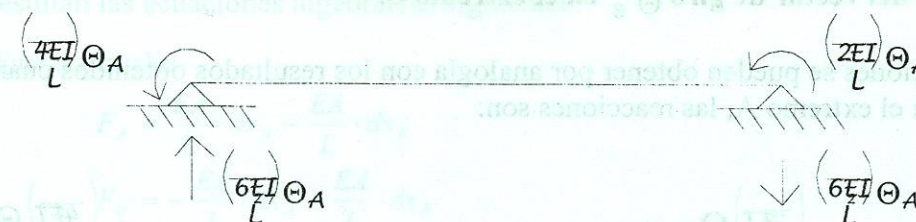
Ahora, utilizando el resultado expresado en la ecuación 12 obtendremos una ecuación que nos relaciona a  $M_A$  con el giro en A:

para  $x=0$

$$\frac{EI}{M_A} \Theta_A = \frac{3}{4} \frac{x^2}{L} - x + \frac{3L}{12}$$

$$\Rightarrow M_A = \left( \frac{4EI}{L} \right) \cdot \Theta_A$$

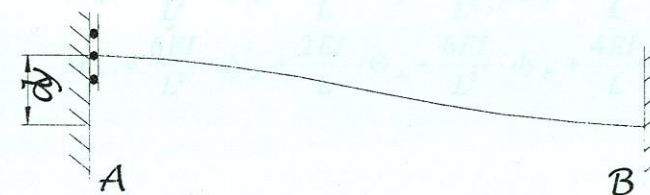
Sustituyendo este valor de  $M_A$  en el diagrama de reacciones obtenido anteriormente:



Así, podemos calcular la magnitud de las reacciones que ocurren al girar el extremo A en la cantidad  $\Theta_A$ .

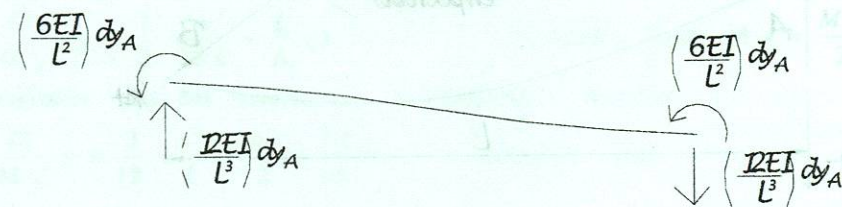
2) efecto del vector de desplazamiento transversal  $dy^*_A$  en el extremo A.

En este caso  $dy^*_A \neq 0$  y el resto es:  $dy^*_A = \Theta^*_A = dx^*_B = dy^*_B = \Theta^*_B = 0.0$ , que se puede modelar como una viga empotrada en ambos extremos en que ocurre un corrimiento vertical del extremo A y asociado a este, una fuerza cortante  $V^*_A$ . Gráficamente:



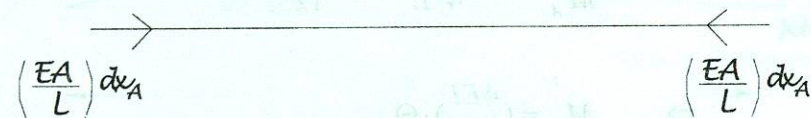
Enseguida, podemos calcular analíticamente la magnitud de las reacciones que ocurren al desplazarse transversalmente el extremo A como se indica en la figura anterior.

Se puede demostrar que la magnitud de las reacciones es la mostrada en la figura siguiente, se pide al estudiante que demuestre la validez de estas expresiones.



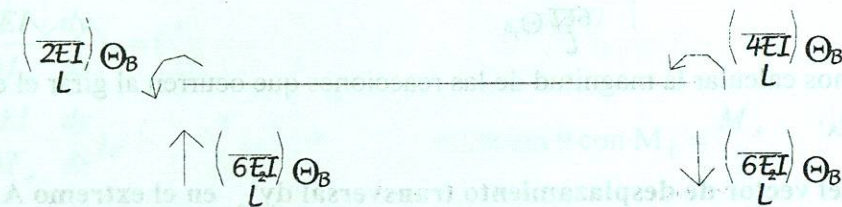
3) efecto del vector de desplazamiento axial  $dx_A^*$  en el extremo A.

Como ya se sabe del análisis de armaduras, este vector de desplazamiento solo provoca las cargas axiales indicadas en la figura siguiente:



4) efecto del vector de giro  $\Theta_B^*$  en el extremo B.

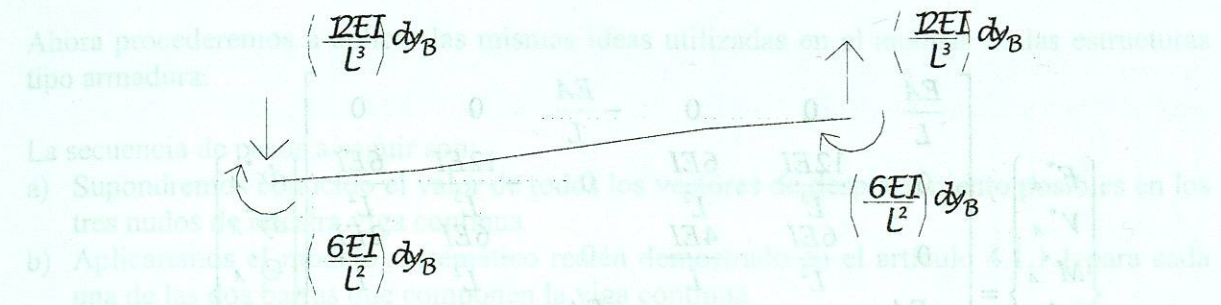
Las reacciones se pueden obtener por analogía con los resultados obtenidos cuando ocurre el giro en el extremo A, las reacciones son:



5) efecto del vector de desplazamiento transversal  $dy_B^*$  en el extremo B.

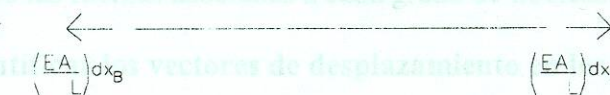
Las reacciones generadas por el desplazamiento transversal del extremo B son:

4.1.1.2. Aplicación de las ecuaciones algebraicas de las reacciones



6) efecto del vector de desplazamiento axial  $dx_B^*$  en el extremo B.

Las reacciones generadas al ocurrir el desplazamiento axial del extremo B son:



b) Superposición de los efectos de los 6 vectores de desplazamiento.

Conocido el efecto de cada vector de desplazamiento actuando independientemente, realizamos la superposición de sus efectos para obtener la magnitud de los vectores de fuerzas generalizadas asociadas a la existencia simultánea de los 6 vectores. De esta suma de efectos resultan las ecuaciones algebraicas siguientes:

Fuerzas axiales

$$F_A = \frac{EA}{L} \cdot dx_A - \frac{EA}{L} \cdot dx_B$$

$$F_B = -\frac{EA}{L} \cdot dx_A + \frac{EA}{L} \cdot dx_B$$

Fuerzas cortantes

$$V_A = \frac{12EI}{L^3} \cdot dy_A + \frac{6EI}{L^2} \cdot \Theta_A - \frac{12EI}{L^3} \cdot dy_B + \frac{6EI}{L^2} \cdot \Theta_B$$

$$V_B = -\frac{12EI}{L^3} \cdot dy_A - \frac{6EI}{L^2} \cdot \Theta_A + \frac{12EI}{L^3} \cdot dy_B - \frac{6EI}{L^2} \cdot \Theta_B$$

Momentos flexionantes

$$M_A = \frac{6EI}{L^2} \cdot dy_A + \frac{4EI}{L} \cdot \Theta_A - \frac{6EI}{L^2} \cdot dy_B + \frac{2EI}{L} \cdot \Theta_B$$

$$M_B = \frac{6EI}{L^2} \cdot dy_A + \frac{2EI}{L} \cdot \Theta_A - \frac{6EI}{L^2} \cdot dy_B + \frac{4EI}{L} \cdot \Theta_B$$

Expresadas estas ecuaciones algebraicas en notación matricial extendida:

$$\begin{Bmatrix} F^*_A \\ V^*_A \\ M^*_A \\ F^*_B \\ V^*_B \\ M^*_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx^*_A \\ dy^*_A \\ \Theta^*_A \\ dx^*_B \\ dy^*_B \\ \Theta^*_B \end{Bmatrix}$$

Y en notación matricial compacta:

$$\{F^*\} = [k] \cdot \{D^*\}$$

Esta última expresión es análoga a la utilizada en el caso de las barras con rigidez axial únicamente:

$$p = k \cdot e$$

Para las barras de armaduras,  $k$  es un escalar,  
para las barras de marcos en el espacio bidimensional  
 $[k]$  es una matriz de 6 renglones y 6 columnas.

#### 4.1.1.2. Aplicación del método general de análisis

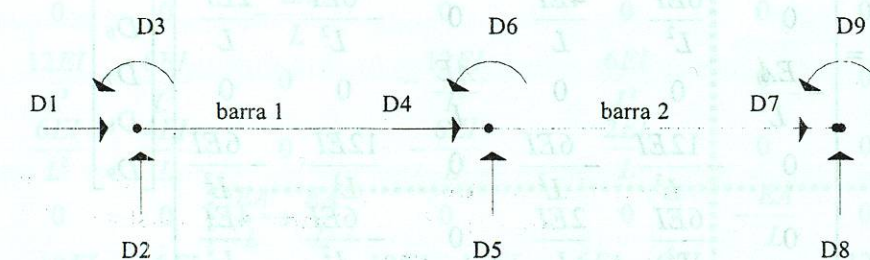
Ahora procederemos a aplicar las mismas ideas utilizadas en el análisis de las estructuras tipo armadura.

La secuencia de pasos a seguir son:

- Supondremos conocido el valor de todos los vectores de desplazamiento posibles en los tres nudos de nuestra viga continua
- Aplicaremos el modelo matemático recién demostrado en el artículo 4.1.1.1 para cada una de las dos barras que componen la viga continua.
- “Ensamblaremos” (sumaremos) las “resistencias” (rigideces) que oponen las dos barras a ser deformadas, para así obtener la rigidez de “toda” la estructura.
- A partir de este último modelo matemático, podremos calcular los desplazamientos en los grados de libertad.
- Identificamos los desplazamientos de cada una de las barras en sus extremos A y B
- Calculamos las fuerzas asociadas a cada grado de libertad.

##### 4.1.1.2.1. Identificar los vectores de desplazamiento en los puntos de control.

Cuando analizamos armaduras, aprendimos que numerando primero los grados de libertad y posteriormente los vectores desplazamiento restringidos, logramos evitar la operación de reacomodo de renglones y columnas. Sin embargo, en este primer caso de estudio de marcos rígidos, etiquetaremos vectores desplazamiento sin tomar en cuenta esta simplificación, tal como se indica en la figura siguiente:



##### 4.1.1.2.2. Ensamblar matriz de rigidez global de la estructura

Primero deberemos obtener las rigideces de cada una de las dos barras. Calculamos estas rigideces a través del uso del modelo matemático recién demostrado:

Así, para la barra 1 se puede obtener la siguiente ecuación matricial que nos relaciona a los desplazamientos en coordenadas locales con las fuerzas en los extremos en coordenadas locales, las cuales necesariamente deben aparecer para que la barra pueda mantener la configuración deformada propuesta.