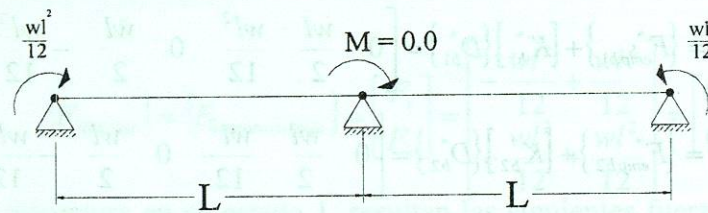


$$\{F_{ficticias}\} = \{F_{empotramiento}\} = \begin{Bmatrix} F_3 \\ F_6 \\ F_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +\frac{wl^2}{12} \\ 0 \\ -\frac{wl^2}{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +133.3333 \\ 0 \\ -133.3333 \end{Bmatrix}$$

Estructura en el estado 2. Las fuerzas ficticias con signo contrario, actuarán sobre la

$$\{F_U\} = -\{F_{ficticias}\} = \begin{Bmatrix} -133.333333 \\ 0 \\ +133.333333 \end{Bmatrix}$$

estructura en su estado 2:



Si revisamos la ecuación matricial completa que ensamblamos en el ejemplo 4.1.1, podemos identificar a los vectores desplazamiento  $D_3$ ,  $D_6$  y  $D_9$  como los correspondientes a los grados de libertad en esta estructura. Así que tomaremos esa ecuación matricial y la reordenaremos para separar los terminos asociados a los grados de libertad de los demás. Además, si consideramos que los vectores desplazamientos restringidos son todos de magnitud cero, podemos escribir:

$$\begin{Bmatrix} F_3 \\ F_6 \\ F_9 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_3 \\ D_6 \\ D_9 \end{Bmatrix}$$

Sustituyendo los valores propuestos en este ejemplo:

$$K_{11u} = EI \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

El vector-solución de desplazamiento es:

$$[D_u] = [K_{11u}]^{-1} \cdot [F_U] = \begin{bmatrix} -133.3 \\ 0 \\ 133.3 \end{bmatrix} \frac{1}{EI}$$

Las fuerzas en los extremos de las barras se pueden calcular con la ecuación matricial deducida en el artículo 4.1.1.1, sin embargo en este ejemplo se propone una forma abreviada de calcular las fuerzas, aplicable al caso en que solo tenemos giros en los extremos de las barras.

$$\begin{Bmatrix} M_{izq} \\ M_{der} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ominus_{izq} \\ \ominus_{der} \end{Bmatrix}$$

Estos valores se calculan directamente en la etapa de superposición de efectos.

**Superposición de estado 1 y estado 2:**

Fuerzas en los extremos de cada una de las barras.

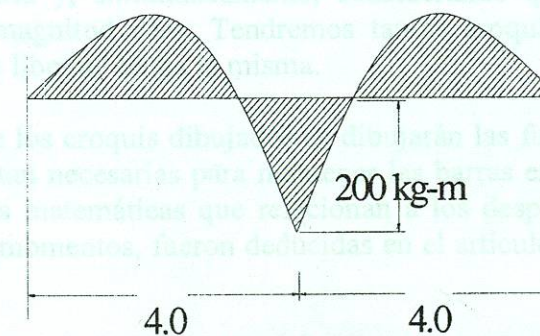
Barra 1.-

$$\begin{Bmatrix} M_{izq} \\ M_{der} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +133.3 \\ -133.3 \end{Bmatrix} + EI \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -133.3 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{EI} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -200 \end{Bmatrix} \text{ kgf.m}$$

Barra 2.-

$$\begin{Bmatrix} M_{izq} \\ M_{der} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +133.3 \\ -133.3 \end{Bmatrix} + EI \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 133.3 \end{bmatrix} \frac{1}{EI} = \begin{Bmatrix} +200 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ kgf.m}$$

Si dibujamos el diagrama de momentos para la viga continua, tendremos:





#### 4.1.3. CONCLUSIONES Y OBSERVACIONES DE LOS CASOS PARA ESTUDIO.

- Los resultados obtenidos son congruentes con los obtenidos al emplear los métodos de análisis aprendidos en cursos anteriores de análisis de estructuras formadas por barras, tales como: área momento, 3 momentos, método de Cross, viga conjugada, etc.

De esta manera podemos confiar en que este nuevo conjunto de teoremas matemáticos nos permite resolver los problemas que antes resolvíamos y esperamos que nos permitirán atacar problemas que, por su complejidad, antes no podíamos resolver. Esto habrá que comprobarlo en el resto del curso.

- En el proceso de solución obtenemos, necesariamente, los desplazamientos en los extremos de las barras. A diferencia de los métodos de análisis ya conocidos, en los que teníamos que realizar cálculos adicionales para obtener estos desplazamientos.
- A diferencia del caso de las armaduras, en ningún momento tuvimos que realizar transformaciones de sistemas de coordenadas

#### 4.2. PROCEDIMIENTO ALTERNO SIMPLIFICADO PARA LA OBTENCIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ, CONDENSADA A LOS DESPLAZAMIENTOS NO NULOS.

Como se pudo observar en los ejemplos anteriores el proceso necesario para ensamblar la matriz de rigidez global es bastante laborioso.

Si a priori sabemos que nuestro modelo matemático contiene varios vectores de desplazamiento en los puntos de control cuya magnitud es cero, podemos no incluir estos vectores en la formación de la matriz de rigidez. Con esto logramos reducir considerablemente el orden de la matriz de rigidez a ensamblar y tendremos consideradas las condiciones de frontera en nuestra matriz, razón por la cual existirá su inversa (si definimos una estructura estable) y podremos utilizarla para la solución de nuestro problema.

En este artículo se propone un método alternativo simplificado que se puede emplear para la formación de la matriz de rigidez ensamblada. Este método aprovecha algunas propiedades de las matrices que se forman con el método general hasta ahora demostrado, y a partir de estas, se proponen una serie de "atajos matemáticos" que nos permitirán llegar a la misma matriz a la cual llegamos anteriormente,  $K_{11u}$ , de una manera más intuitiva para nuestra mente, acostumbrada más bien a las interpretaciones físicas y no a las matemáticas.

La secuencia de pasos que componen nuestro procedimiento alternativo simplificado son:

1. Identificar y numerar los grados de libertad de nuestra estructura. Desde esta etapa debemos verificar que nuestra estructura no sea un mecanismo, es decir, que sea una estructura estable. Estos grados de libertad están definidos en los puntos de control de la estructura. Recordar que por conveniencia estos puntos de control se fijan en la unión de los tramos rectos de las barras (nudos de conexión), aunque nada nos impide definir puntos de control en posiciones intermedias.
2. Para cada uno de los grados de libertad (uno a la vez) se dibujara un croquis de la estructura en su configuración deformada suponiendo que el grado de libertad tiene una magnitud unitaria y, simultáneamente, considerando que el resto de los grados de libertad tiene magnitud cero. Tendremos tantos croquis de la estructura deformada como grados de libertad tenga la misma.
3. En cada uno de los croquis dibujados se dibujarán las fuerzas en los extremos de cada barra que resultan necesarias para mantener las barras en su configuración deformada. Las expresiones matemáticas que relacionan a los desplazamientos y rotaciones con estas fuerzas y momentos, fueron deducidas en el artículo 4.1.1.1 para el caso de barras prismáticas.
4. Finalmente, procedemos a la formación de la matriz de rigidez  $K_{11u}$ , la cual nos relaciona a los grados de libertad con las fuerzas externas aplicadas en estos mismos grados de libertad.



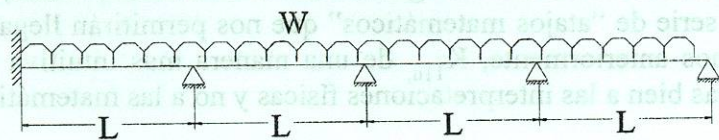
Esta matriz contendrá en la columna i-ésima a las fuerzas que aparecen al hacer igual a 1 la magnitud del grado de libertad i-ésimo. Estas fuerzas se obtienen de los croquis de la estructura deformada elaborados en el paso 3. Mediante ejemplos se clarificará esta parte del procedimiento.

Al terminar la secuencia de pasos propuesta tendremos lo necesario para, una vez calculado el vector de fuerzas actuantes en los grados de libertad, proceder a calcular el vector de desplazamientos con la expresión:

$$[D_U] = [K_{11u}]^{-1} \cdot [F_U]$$

**4.2.1. CASO PARA ESTUDIO: VIGA CONTINUA DE 4 CLAROS**

Como primer ejemplo de aplicación del método alternativo simplificado, resolveremos una viga continua. Elegimos este ejemplo para así poder comparar fácilmente los resultados con los que obtendríamos al utilizar el método general.

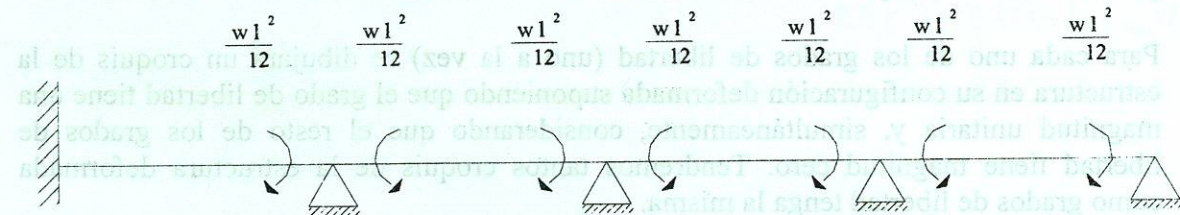


Hipótesis de trabajo:

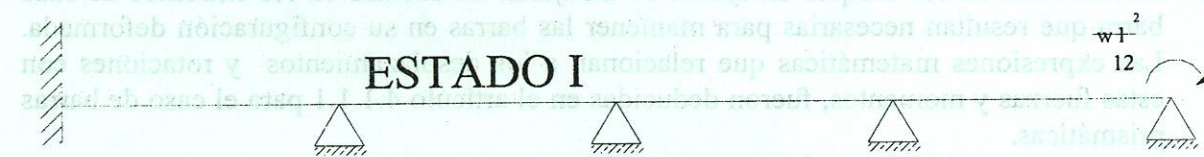
- Las barras no se deforman axialmente
- no hay desplazamientos verticales en los apoyos

Objetivo: analizar completamente la estructura.

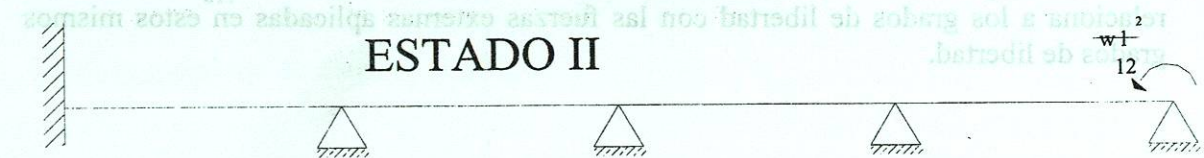
Las fuerzas ficticias introducidas en el estado 1 son:



Cuya resultante es:

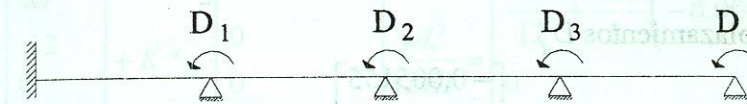


Por lo tanto, las fuerzas necesarias en el estado 2 son:

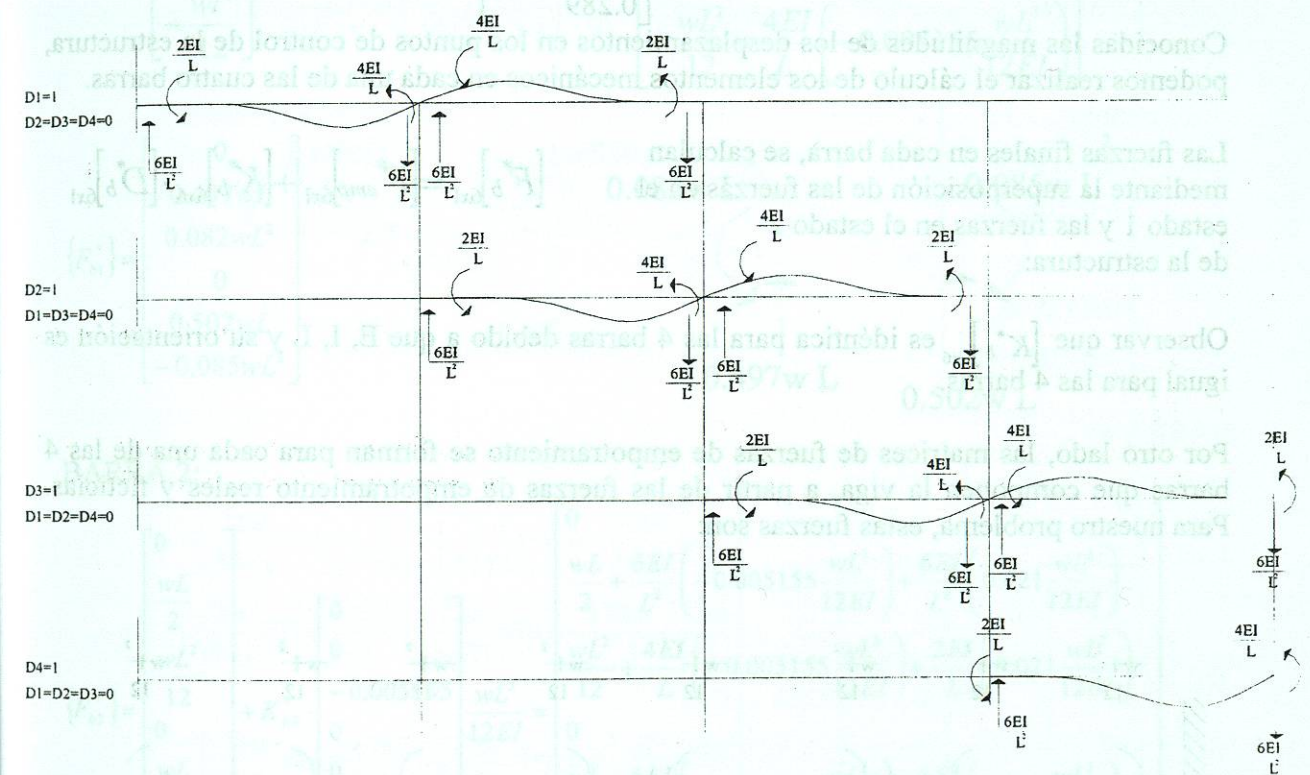


Para poder resolver la estructura en su estado 2, debemos obtener la matriz de rigidez  $K_{11u}$  que nos permita calcular las magnitudes de los diferentes grados de libertad. El cálculo de la matriz de rigidez lo realizaremos a través del uso del método alternativo simplificado.

Paso 1: identificación de todos los grados de libertad existentes en la viga de acuerdo a las hipótesis de trabajo aceptadas.



Pasos 2 y 3: croquis de las deformadas de la viga para cada uno de los grados de libertad tomando un valor unitario y el resto un valor de cero.



Paso 4: Formación de la matriz de rigidez  $[K_{11u}]$  que nos relaciona a  $F_u$  con  $D_u$ .

La primera columna se obtiene de los valores establecidos en el croquis de la deformada cuando  $D_1 = 1$ , las demás columnas se obtienen de manera análoga.

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix}$$



Aquí termina la aplicación del método alterno simplificado. Los siguientes pasos corresponden a la secuencia de pasos requeridos por el método general de rigideces.

El vector de fuerzas  $[F_u]$  actuante sobre la estructura que estamos analizando en su estado 2 es:

$$F_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & w \cdot L^2 \end{bmatrix}^T$$

Calculo del vector de desplazamientos  $D_u$

$$\Rightarrow D_u = [K_{11u}]^{-1} \cdot F_u = \begin{bmatrix} -0.005155 \\ 0.021 \\ -0.077 \\ 0.289 \end{bmatrix} \frac{wL^2}{12} \cdot \frac{L}{EI}$$

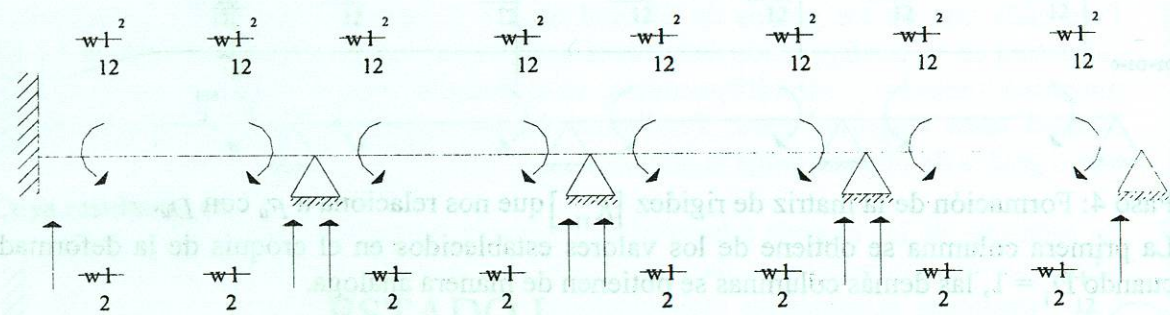
Conocidas las magnitudes de los desplazamientos en los puntos de control de la estructura, podemos realizar el cálculo de los elementos mecánicos en cada una de las cuatro barras.

Las fuerzas finales en cada barra, se calculan mediante la superposición de las fuerzas en el estado 1 y las fuerzas en el estado 2 de la estructura:

$$[F^*_b]_{6 \times 1} = [F^*_{emp}]_{6 \times 1} + [K^*_b]_{6 \times 6} \cdot [D^*_b]_{6 \times 1}$$

Observar que  $[K^*_b]_{6 \times 6}$  es idéntica para las 4 barras debido a que E, I, L y su orientación es igual para las 4 barras.

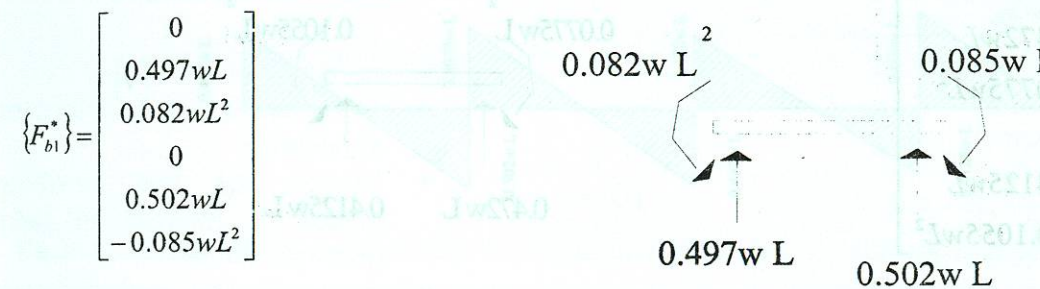
Por otro lado, las matrices de fuerzas de empotramiento se forman para cada una de las 4 barras que componen la viga, a partir de las fuerzas de empotramiento reales y ficticias. Para nuestro problema, estas fuerzas son:



A partir de esta información, las fuerzas resultantes de la superposición del estado I con el estado II son las descritas a continuación para cada una de las cuatro barras:

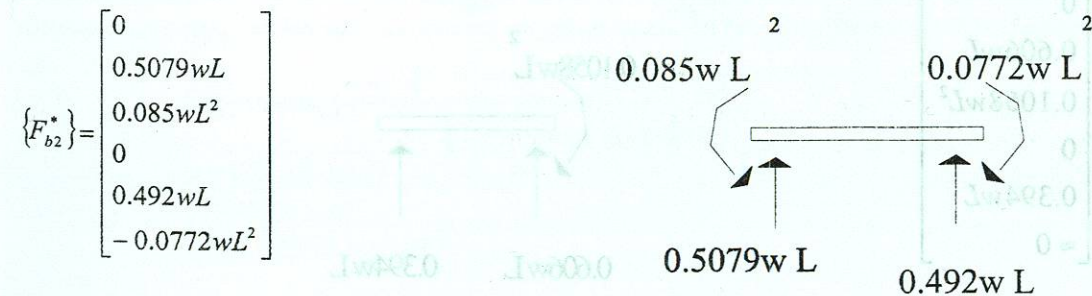
BARRA 1:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{wL}{2} \\ \frac{wL^2}{12} \\ 0 \\ \frac{wL}{2} \\ -\frac{wL^2}{12} \end{bmatrix} + K^*_{b1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.005155 \end{bmatrix} \frac{wL^3}{12EI} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{wL}{2} + \frac{6EI}{L^2} \left( -0.005155 \frac{wL^3}{12EI} \right) \\ \frac{wL^2}{12} + \frac{2EI}{L} \left( -0.005155 \frac{wL^3}{12EI} \right) \\ 0 \\ \frac{wL}{2} - \frac{6EI}{L^2} \left( -0.005155 \frac{wL^3}{12EI} \right) \\ -\frac{wL^2}{12} + \frac{4EI}{L} \left( -0.005155 \frac{wL^3}{12EI} \right) \end{bmatrix}$$



BARRA 2:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{wL}{2} \\ \frac{wL^2}{12} \\ 0 \\ \frac{wL}{2} \\ -\frac{wL^2}{12} \end{bmatrix} + K^*_{b2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.005155 \\ 0 \\ 0 \\ 0.021 \end{bmatrix} \frac{wL^3}{12EI} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{wL}{2} + \frac{6EI}{L^2} \left( -0.005155 \frac{wL^3}{12EI} \right) + \frac{6EI}{L^2} \left( 0.021 \frac{wL^3}{12EI} \right) \\ \frac{wL^2}{12} + \frac{4EI}{L} \left( -0.005155 \frac{wL^3}{12EI} \right) + \frac{2EI}{L} \left( 0.021 \frac{wL^3}{12EI} \right) \\ 0 \\ \frac{wL}{2} - \frac{6EI}{L^2} \left( -0.005155 \frac{wL^3}{12EI} \right) - \frac{6EI}{L^2} \left( 0.021 \frac{wL^3}{12EI} \right) \\ -\frac{wL^2}{12} + \frac{2EI}{L} \left( -0.005155 \frac{wL^3}{12EI} \right) + \frac{4EI}{L} \left( 0.021 \frac{wL^3}{12EI} \right) \end{bmatrix}$$

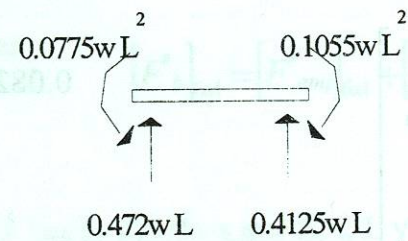




BARRA 3:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{wl}{2} \\ \frac{wl^2}{12} \\ 0 \\ \frac{wl}{2} \\ -\frac{wl^2}{12} \end{Bmatrix} + K_{b3}^* \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.021 \\ 0 \\ 0 \\ -0.077 \end{Bmatrix} \frac{wL^3}{12EI} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{wl}{2} + \frac{6EI}{L^2} \left( 0.021 \frac{wL^3}{12EI} \right) + \frac{6EI}{L^2} \left( -0.077 \frac{wL^3}{12EI} \right) \\ \frac{wL^2}{12} + \frac{4EI}{L} \left( -0.021 \frac{wL^3}{12EI} \right) + \frac{2EI}{L} \left( -0.077 \frac{wL^3}{12EI} \right) \\ 0 \\ \frac{wl}{2} - \frac{6EI}{L^2} \left( 0.021 \frac{wL^3}{12EI} \right) - \frac{6EI}{L^2} \left( -0.077 \frac{wL^3}{12EI} \right) \\ -\frac{wL^2}{12} + \frac{2EI}{L} \left( 0.021 \frac{wL^3}{12EI} \right) + \frac{4EI}{L} \left( -0.077 \frac{wL^3}{12EI} \right) \end{Bmatrix}$$

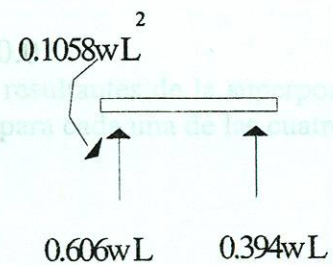
$$\{F_{b3}^*\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.472wL \\ 0.0775wL^2 \\ 0 \\ 0.4125wL \\ -0.1055wL^2 \end{Bmatrix}$$



BARRA 4:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{wl}{2} \\ \frac{wl^2}{12} \\ 0 \\ \frac{wl}{2} \\ -\frac{wl^2}{12} \end{Bmatrix} + K_{b4}^* \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.077 \\ 0 \\ 0 \\ 0.289 \end{Bmatrix} \frac{wL^3}{12EI} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{wl}{2} + \frac{6EI}{L^2} \left( -0.077 \frac{wL^3}{12EI} \right) + \frac{6EI}{L^2} \left( 0.289 \frac{wL^3}{12EI} \right) \\ \frac{wL^2}{12} + \frac{4EI}{L} \left( -0.077 \frac{wL^3}{12EI} \right) + \frac{2EI}{L} \left( 0.289 \frac{wL^3}{12EI} \right) \\ 0 \\ \frac{wl}{2} - \frac{6EI}{L^2} \left( -0.077 \frac{wL^3}{12EI} \right) - \frac{6EI}{L^2} \left( 0.289 \frac{wL^3}{12EI} \right) \\ -\frac{wL^2}{12} + \frac{2EI}{L} \left( -0.077 \frac{wL^3}{12EI} \right) + \frac{4EI}{L} \left( 0.289 \frac{wL^3}{12EI} \right) \end{Bmatrix}$$

$$\{F_{b4}^*\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.606wL \\ 0.1058wL^2 \\ 0 \\ 0.394wL \\ \approx 0 \end{Bmatrix}$$



Representación gráfica de los resultados obtenidos:

Reacciones en los apoyos de la viga:

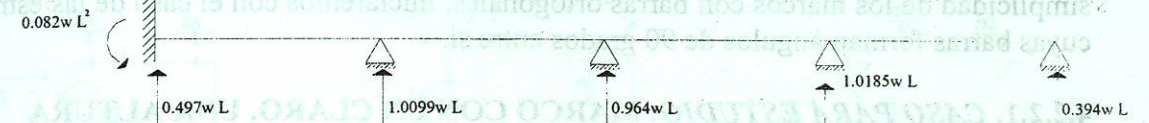


Diagrama de momentos flexionantes

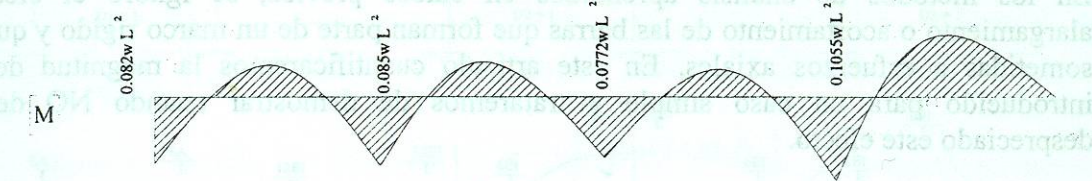
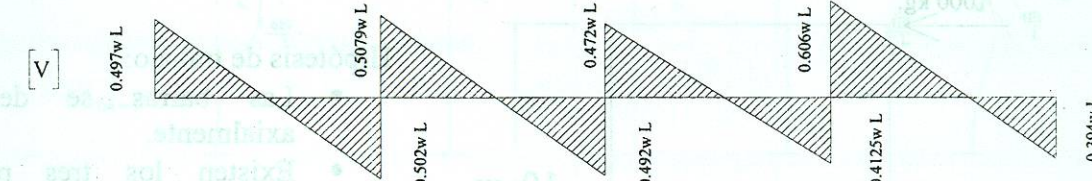


Diagrama de fuerzas cortantes



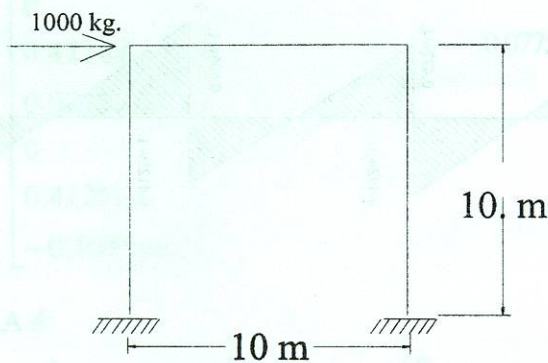


4.2.2. MARCOS CON BARRAS ORTOGONALES

El método alternativo simplificado propuesto y probado en el artículo anterior lo utilizaremos ahora en estructuras en las que sus barras NO están alineadas. Debido a la relativa simplicidad de los marcos con barras ortogonales, iniciaremos con el caso de las estructuras cuyas barras forman ángulos de 90 grados entre si.

4.2.2.1. CASO PARA ESTUDIO: MARCO CON UN CLARO, UNA ALTURA

En los métodos de análisis aprendidos en cursos previos, se ignoró el efecto del alargamiento o acortamiento de las barras que forman parte de un marco rígido y que están sometidas a esfuerzos axiales. En este artículo cuantificaremos la magnitud del error introducido para un caso simple y trataremos de demostrar cuando NO debe ser despreciado este efecto.



Hipótesis de trabajo:

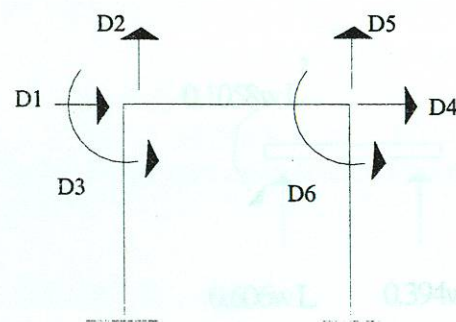
- Las barras se deforman axialmente.
- Existen los tres posibles grados de libertad en cada punto de control.
- Área e Inercia son iguales en las tres barras.

Nota importante: Como no tenemos cargas transversales en las barras, no es necesario descomponer a la estructura en una estructura en estado I y otra estructura en estado II.

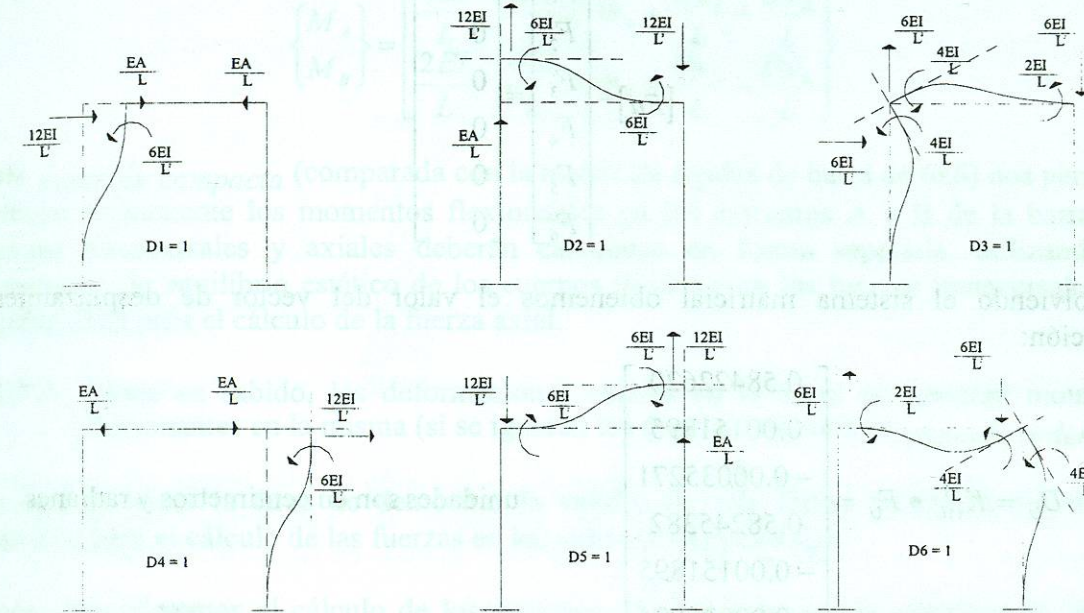
Aplicación del método alternativo simplificado para la formación del sistema matricial:

$$F_U = K_{11U} \cdot D_U$$

Paso 1.- identificar los grados de libertad



Paso 2 y 3: Dibujar croquis de las deformadas del marco para cada uno de los grados de libertad tomando un valor unitario y el resto un valor de cero.



Paso 4.- Ensamblar por inspección la matriz de rigidez  $[k_{11u}]$  y formar el sistema matricial que relaciona a las fuerzas en los puntos de control con sus desplazamientos.

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix}$$

Para sensibilizarnos sobre la magnitud de los parámetros involucrados, tomaremos las dimensiones de perfiles que aparecen en un manual de perfiles fabricados en México.

Propiedades geométricas de perfil IPR 18" X 7 1/2" X 105.65kg/m (manual AHMSA)

$$A=134.19 \text{ cms}^2$$

$$I=48699 \text{ cm}^4$$

$$E=2100000 \text{ kgf/cm}^2$$