

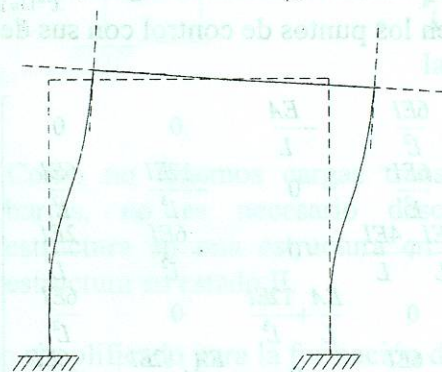
Sustituyendo en el vector de fuerzas $[F_u]$ las magnitudes de las cargas actuantes en los grados de libertad:

$$[F_u] = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema matricial obtenemos el valor del vector de desplazamientos solución:

$$D_u = K_{11u}^{-1} \cdot F_u = \begin{bmatrix} 0.58422620 \\ 0.00151895 \\ -0.00035271 \\ 0.58245382 \\ -0.00151895 \\ -0.00035094 \end{bmatrix} \quad \text{unidades son en centímetros y radianes}$$

Representando gráficamente este resultado la configuración del marco deformado es:



Conocida la magnitud de todos los desplazamientos de los puntos de control, el problema ha quedado cinemáticamente determinado y por lo tanto, podemos calcular las fuerzas en los extremos de las tres barras que forman el marco.

En el caso para estudio descrito en el artículo 4.1.2.4, se propuso calcular las fuerzas en las barras utilizando una matriz de rigidez de barra de 2 renglones y 2 columnas. Con esta matriz y los giros en los extremos de las barras se calcularon solamente los momentos flexionantes en los dos extremos de las barras.

En el ejemplo que estamos trabajando en este artículo, las barras tienen desplazamientos transversales y axiales, además de los giros de sus extremos. Proponemos utilizar la

siguiente ecuación para las barras, expresadas sus componentes en el sistema de coordenadas locales de cada barra:

$$\begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4EI & 2EI \\ L & L \\ 2EI & 4EI \\ L & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta_A + \frac{Dy_A}{L} - \frac{Dy_B}{L} \\ \Theta_B + \frac{Dy_A}{L} - \frac{Dy_B}{L} \end{Bmatrix}$$

Esta *ecuación compacta* (comparada con la matriz de rigidez de barra de 6x6) nos permitirá calcular únicamente los momentos flexionantes en los extremos A y B de la barra. Las fuerzas transversales y axiales deberán calcularse en forma separada, utilizando las ecuaciones de equilibrio estático de los cuerpos rígidos para las fuerzas transversales y la rigidez axial para el cálculo de la fuerza axial.

NOTA: Como es sabido, las deformaciones axiales en la barra no generan momentos flexionantes en la misma (si se ignoran los desplazamientos de *segundo orden*)

Se deja al lector la tarea de demostrar la validez de esta forma compacta del sistema matricial para el cálculo de las fuerzas en los extremos de una barra.

Ahora procederemos al cálculo de los momento flexionantes en los extremos de las tres barras. La matriz de rigidez de barra (en su forma compacta) para las tres barras son idénticas y su valor numérico es:

$$K_b = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} * 102,267,900 \quad \text{unidades en kgf - cm}$$

los momentos flexionantes en cada una de las tres barras son:

BARRA 1:

$$\begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} = [K_b] \cdot \begin{bmatrix} 0 + \frac{0}{1000} - \frac{(-0.5842262)}{1000} \\ -0.00035271 + \frac{0}{1000} - \frac{(-0.5842262)}{1000} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 286344 \\ 214202 \end{bmatrix}$$

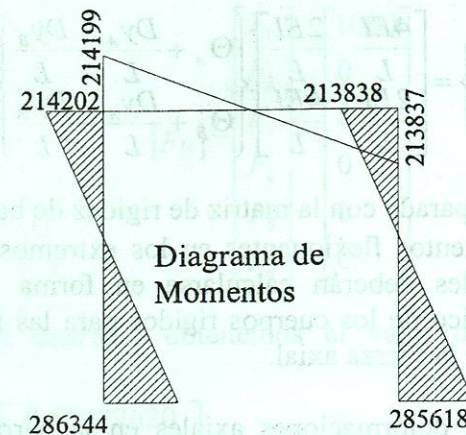
BARRA 2:

$$\begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} = [K_b] \cdot \begin{bmatrix} -0.00035271 + \frac{0.00151895}{1000} - \frac{(-0.00151895)}{1000} \\ -0.00035094 + \frac{0.00151895}{1000} - \frac{(-0.00151895)}{1000} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -214199 \\ -213837 \end{bmatrix}$$

BARRA 3:

$$\begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} = [K_b] \cdot \begin{bmatrix} 0 + \frac{0}{1000} - \frac{(-0.58245382)}{1000} \\ -0.00035094 + \frac{0}{1000} - \frac{(-0.58245382)}{1000} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 285618 \\ 213838 \end{bmatrix}$$

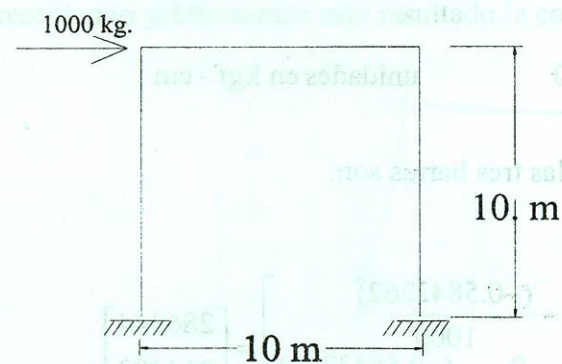
Con estos valores de momentos podemos dibujar el diagrama de momentos flexionantes:



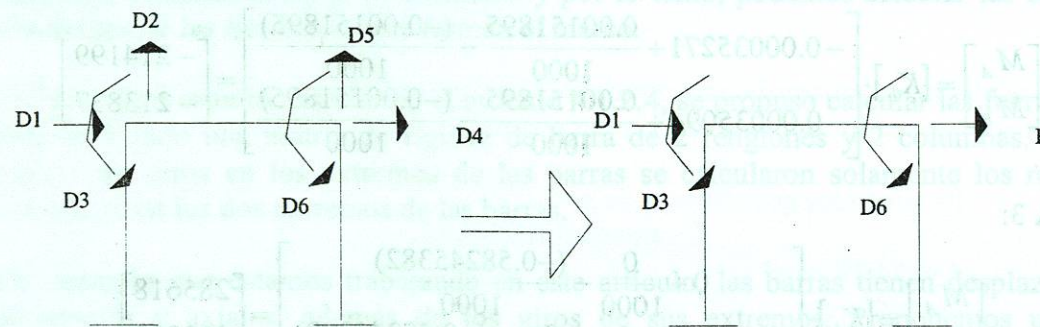
Ahora, volveremos a analizar el mismo marco considerando que las barras no se deforman axialmente. Los valores del diagrama de momentos se compararán con los valores presentados en el diagrama para el caso del marco en que se consideraron las deformaciones axiales.

Hipótesis de trabajo:

- Las barras NO se deforman axialmente.
- Área e Inercia son iguales en las tres barras.



Debido a la hipótesis de que las barras no se deforman axialmente, los grados de libertad se reducen de 6 a 3, tal como se muestra en el diagrama siguiente:



Como la viga no se deforma axialmente, el grado de libertad D_4 tiene que ser igual al grado de libertad D_1 .

En consecuencia, el sistema matricial se reduce a:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_3 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} + \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_3 \\ D_6 \end{bmatrix}$$

Se deja al lector la demostración mediante el método alterno simplificado.

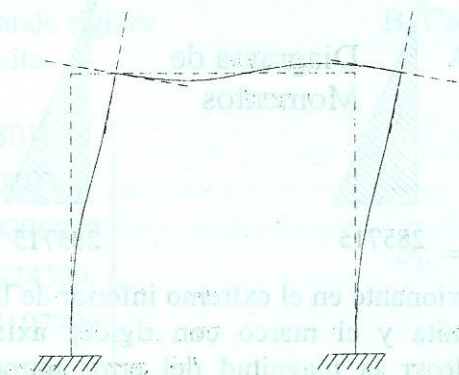
Sustituyendo en el vector de fuerzas $[F_u]$ las magnitudes de las cargas actuantes en los grados de libertad:

$$F_u = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_3 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema matricial obtenemos el valor del vector de desplazamientos solución:

$$D_u = K_{11U}^{-1} \cdot F_u = \begin{bmatrix} 0.58203805 \\ -0.00034922 \\ -0.00034922 \end{bmatrix} \quad \text{unidades son en centímetros y radianes}$$

Representando gráficamente este resultado la configuración del marco deformado es:



Ahora procederemos al cálculo de los momento flexionantes en los extremos de las tres barras.

BARRA 1:

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} = [K_b] \cdot \begin{bmatrix} 0 + \frac{0}{1000} - \frac{(-0.58203805)}{1000} \\ -0.00034922 + \frac{0}{1000} - \frac{(-0.58203805)}{1000} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 285715 \\ 214287 \end{bmatrix}$$

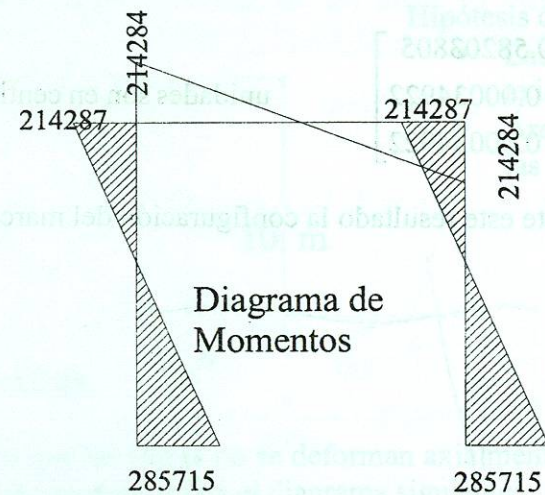
BARRA 2:

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} = [K_b] \cdot \begin{bmatrix} -0.00034922 + \frac{0}{1000} - \frac{0}{1000} \\ -0.00034922 + \frac{0}{1000} - \frac{0}{1000} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -214284 \\ -214284 \end{bmatrix}$$

BARRA 3:

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} = [K_b] \cdot \begin{bmatrix} 0 + \frac{0}{1000} - \frac{(-0.58203805)}{1000} \\ -0.00034922 + \frac{0}{1000} - \frac{(-0.58203805)}{1000} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 285715 \\ 214287 \end{bmatrix}$$

Con estos valores de momentos podemos dibujar el diagrama de momentos flexionantes:



Comparando el momento flexionante en el extremo inferior de la columna izquierda para el marco con rigidez axial finita y el marco con rigidez axial infinita (no deformable axialmente) podemos establecer la magnitud del error introducido voluntariamente al simplificar el problema mediante la aceptación de la hipótesis de no deformabilidad axial de las barras.

$$error = \left(\frac{285715}{286344} - 1 \right) * 100 = 0.22\%$$

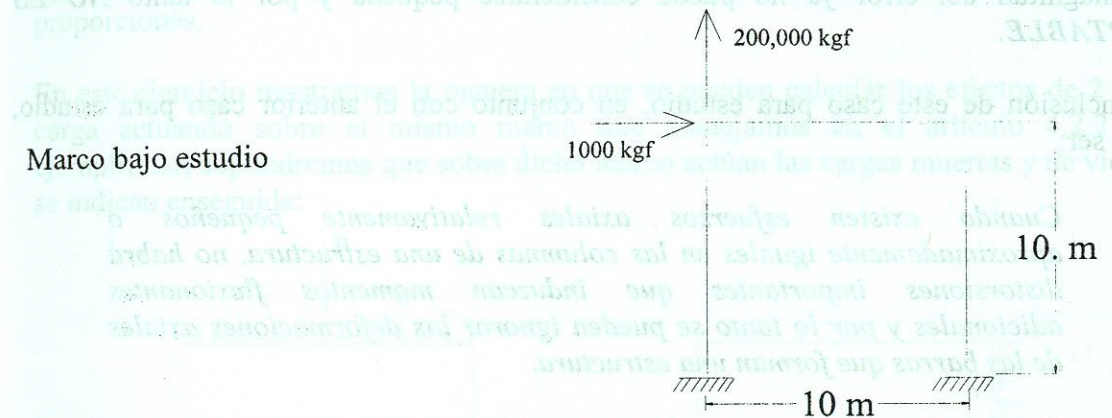
Considerando los niveles de incertidumbre existentes en la determinación de las propiedades geométricas de las estructuras, las propiedades mecánicas de los materiales y

la magnitud de las acciones a las que estará sometida durante su vida útil; este nivel de error es muy pequeño y por lo tanto es aceptable.

Una conclusión posible de este caso para estudio es:

Se puede ignorar la deformación axial de las barras que forman una estructura, lo cual conduce a un problema matemáticamente menos laborioso y por lo tanto más conveniente para el ingeniero que tiene que realizar el análisis estructural.

Antes de aceptar ciegamente esta conclusión, estudiaremos enseguida un caso extremo en el que una de las barras (la columna izquierda) está sometida a una carga axial sustancialmente mayor que el resto de las barras.



Aplicando los sistemas matriciales obtenidos en el marco del problema anterior, podemos calcular los siguientes vectores de desplazamiento solución:

- A) Considerando rigidez Axial finita
- B) Considerando rigidez Axial infinita

$$D_u = \begin{bmatrix} 0.88801638 \\ 0.71080368 \\ -0.00096029 \\ 0.88624399 \\ -0.00107796 \\ -0.00095852 \end{bmatrix} \quad D_v = \begin{bmatrix} 0.58203805 \\ -0.00034922 \\ -0.00034922 \end{bmatrix}$$

Calculamos ahora los momentos flexionantes en el extremo superior de la columna izquierda para los casos A y B:

Caso A

$$M_A = 4 \frac{EI}{L} (-0.00096029) + 6 \frac{EI}{L^2} (0.88801638) = 152066 \text{ kgf} - \text{cm}$$

Caso B

$$M_B = 4 \frac{EI}{L} (-0.00034922) + 6 \frac{EI}{L^2} (0.58203805) = 214287 \text{ kgf} \cdot \text{cm}$$

Si hubiéramos despreciado las deformaciones axiales, la fuerza de 200,000 kgf no hubiera sido considerada en la formación del vector de cargas F_U y entonces el análisis daría los mismos momentos flexionantes que en el caso del marco sin la carga vertical. Esta última afirmación debe ser reflexionada cuidadosamente por el lector.

Basados en los resultados recién obtenidos, calcularemos la magnitud del error introducido voluntariamente al suponer que no se deforman axialmente las barras:

$$\text{error} = \left(\frac{214287}{152066} - 1 \right) * 100 = 40.91\%$$

Esta magnitud del error ya no puede considerarse pequeña y por lo tanto **NO ES ACEPTABLE**.

La conclusión de este caso para estudio, en conjunto con el anterior caso para estudio, podría ser:

Cuando existen esfuerzos axiales relativamente pequeños o aproximadamente iguales en las columnas de una estructura, no habrá distorsiones importantes que induzcan momentos flexionantes adicionales y por lo tanto se pueden ignorar las deformaciones axiales de las barras que forman una estructura.

Por otro lado, si no se cumplen las condiciones mencionadas, NO debe suponerse la indeformabilidad axial de las barras.

Estas condiciones se cumplen generalmente en las estructuras de poca altura, tales como las naves industriales típicas y los edificios de pocos pisos.

En los casos para estudio y ejemplos en que aplicamos el método alterno simplificado estaremos utilizando la hipótesis de que las barras no se deforman axialmente. Esto lo haremos así para simplificar la solución de los sistemas matriciales y concentrarnos en las características especiales de los diferentes tipos de problemas.

Debe quedar claro que no procederemos así porque sea la manera más correcta o cercana a la realidad en lo que se refiere al efecto de la deformación axial que sufren las barras al ser sometidas a cargas, solo lo haremos por simplicidad académica.

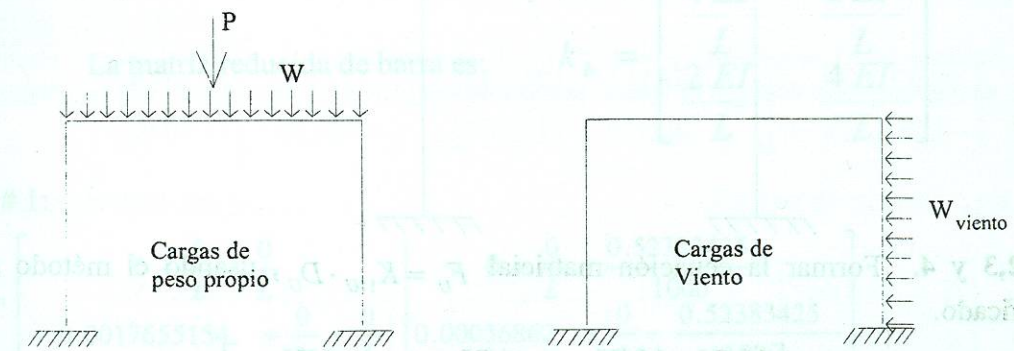
4.2.2.2. CASO PARA ESTUDIO: MARCO CON UN CLARO, UNA ALTURA Y CARGAS EN LAS BARRAS

Como es sabido, sobre las estructuras actúan a lo largo de su vida útil diferentes tipos de cargas. Por ejemplo:

- Cargas de peso propio o cargas muertas.
- Cargas vivas, debidas a las cargas móviles tales como las del mobiliario en un edificio o el tránsito de automóviles sobre la calzada de un puente.
- Cargas accidentales, tales como las inducidas por el viento o por la ocurrencia de un evento sísmico.

En el diseño de estas estructuras es práctica común calcular los efectos de los diferentes tipos de cargas de manera separada, para posteriormente sumar sus efectos en diferentes proporciones.

En este ejercicio mostramos la manera en que se pueden calcular los efectos de 2 tipos de carga actuando sobre el mismo marco que manejamos en el artículo 4.2.2.1. Para ejemplificar, supondremos que sobre dicho marco actúan las cargas muertas y de viento que se indican enseguida:



donde:

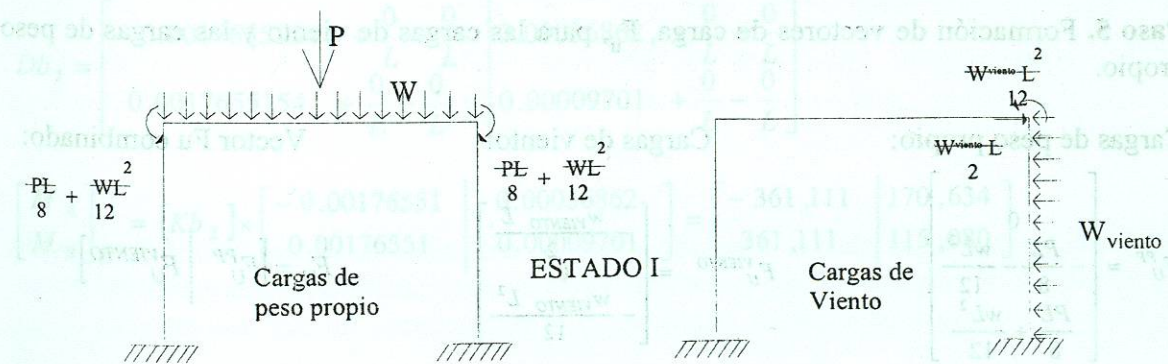
$$P = 2000 \text{ kgf}$$

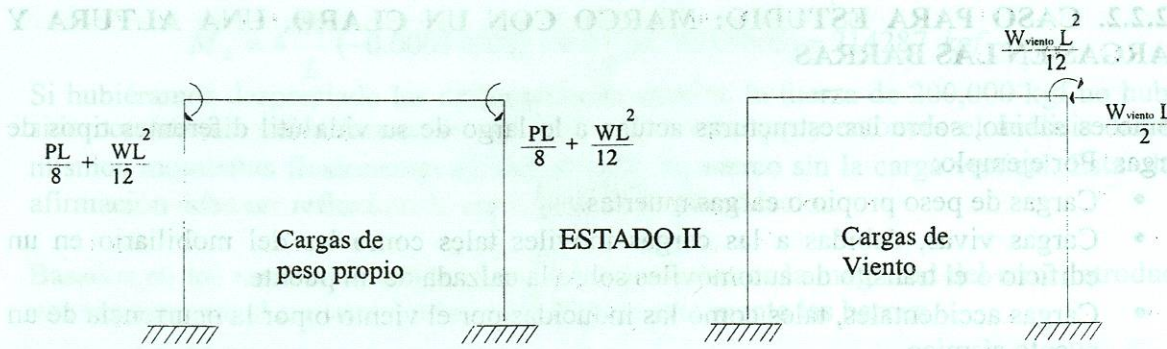
$$W = 10 \text{ kgf/cm}$$

$$W_{\text{viento}} = 2 \text{ kgf/cm}$$

Hipótesis: No hay deformaciones axiales

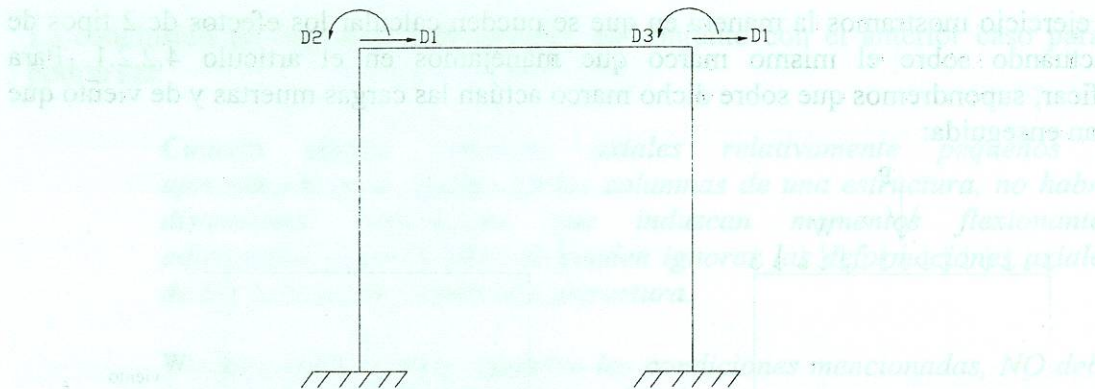
Debido a que tenemos cargas transversales en las barras, será necesario descomponer a ambos marcos en estructuras en estado I y estructuras en estado II.





SOLUCION DE ESTRUCTURAS EN ESTADO 2:

Paso 1. Identificar los grados de libertad, suponiendo, que las barras **NO** se deforman axialmente.



Paso 2,3 y 4. Formar la ecuación matricial $F_U = K_{11U} \cdot D_U$, usando el método alternativo simplificado.

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} + \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}$$

Paso 5. Formación de vectores de carga, F_U , para las cargas de viento y las cargas de peso propio.

Cargas de peso propio:

$$F_U^{PP} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{PL}{8} - \frac{wL^2}{12} \\ \frac{PL}{8} + \frac{wL^2}{12} \end{bmatrix}$$

Cargas de viento:

$$F_U^{VIENTO} = \begin{bmatrix} -\frac{w_{VIENTO} L}{2} \\ 0 \\ -\frac{w_{VIENTO} L^2}{12} \end{bmatrix}$$

Vector F_U combinado:

$$F_U = \begin{bmatrix} F_U^{PP} \\ F_U^{VIENTO} \end{bmatrix}$$

Paso 6. Calculo de D_U a partir de $F_U = K_{11U} \cdot D_U$

Sustituyendo las propiedades geométricas del perfil IPR 18"x7 1/2"x105.65 kg./m. (Manual AHMSA)

$$A = 134.19 \text{ cm}^2.$$

$$I = 48,699 \text{ cm}^4.$$

$$E = 2,100,000 \text{ kg/cm}^2.$$

en la ecuación:

$$\begin{bmatrix} F_U^{PP} \\ F_U^{VIENTO} \end{bmatrix} = [K_{11U}] \cdot \begin{bmatrix} D_U^{PP} \\ D_U^{VIENTO} \end{bmatrix}$$

y despejando D_U :

$$D_U = \begin{bmatrix} D_U^{PP} \\ D_U^{VIENTO} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.52383425 \\ -0.0017655154 & 0.00036862 \\ 0.001765515 & 0.00009701 \end{bmatrix}$$

Paso 7. Calculo de fuerzas en extremos de barra para el estado 2.

La matriz reducida de barra es: $k_b = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$

Barra # 1:

$$Db_1 = \begin{bmatrix} 0 + \frac{0}{L} - \frac{0}{L} & 0 + \frac{0}{L} - \frac{0.52383425}{1000} \\ -0.0017655154 + \frac{0}{L} - \frac{0}{L} & 0.00036862 + \frac{0}{L} - \frac{0.52383425}{1000} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix}_{II} = [K_B] \times \begin{bmatrix} 0 & -0.000523834 \\ -0.0017655154 & -0.000155214 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -361111 & -246033 \\ -722222 & -170637 \end{bmatrix}$$

Barra # 2:

$$Db_2 = \begin{bmatrix} -0.0017655154 + \frac{0}{L} - \frac{0}{L} & 0.00036862 + \frac{0}{L} - \frac{0}{L} \\ 0.0017655154 + \frac{0}{L} - \frac{0}{L} & 0.00009701 + \frac{0}{L} - \frac{0}{L} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix}_{II} = [K_{b2}] \times \begin{bmatrix} -0.00176551 & 0.00036862 \\ 0.00176551 & 0.00009701 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -361,111 & 170,634 \\ 361,111 & 115,080 \end{bmatrix}$$

Barra # 3:

$$Db_3 = \begin{bmatrix} 0 + \frac{0}{L} - \frac{0}{L} & 0 + \frac{0}{L} - \frac{0.523839}{1000} \\ 0.001765515 & + \frac{0}{L} - \frac{0}{L} & 0.00009701 & + \frac{0}{L} - \frac{0.523839}{1000} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix}_{II} = [Kb_3] \times \begin{bmatrix} 0 & -0.0005238 \\ 0.001765515 & -0.0004268 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 361,111 & -301,587 \\ 722,222 & -281,745 \end{bmatrix}$$

SUPERPOSICION DE ESTADO DE ESFUERZOS DE ESTADO 1 Y ESTADO 2:

Barra # 1:

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_I + \begin{bmatrix} -361,111 & -246,033 \\ -722,222 & -170,637 \end{bmatrix}_{II} = \begin{bmatrix} -361,111 & -246,033 \\ -722,222 & -170,637 \end{bmatrix}$$

Barra # 2:

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,083,333 & 0 \\ -1,083,333 & 0 \end{bmatrix}_I + \begin{bmatrix} -361,111 & 170,634 \\ 361,111 & 115,080 \end{bmatrix}_{II} = \begin{bmatrix} 722,222 & 170,634 \\ -722,222 & 115,080 \end{bmatrix}$$

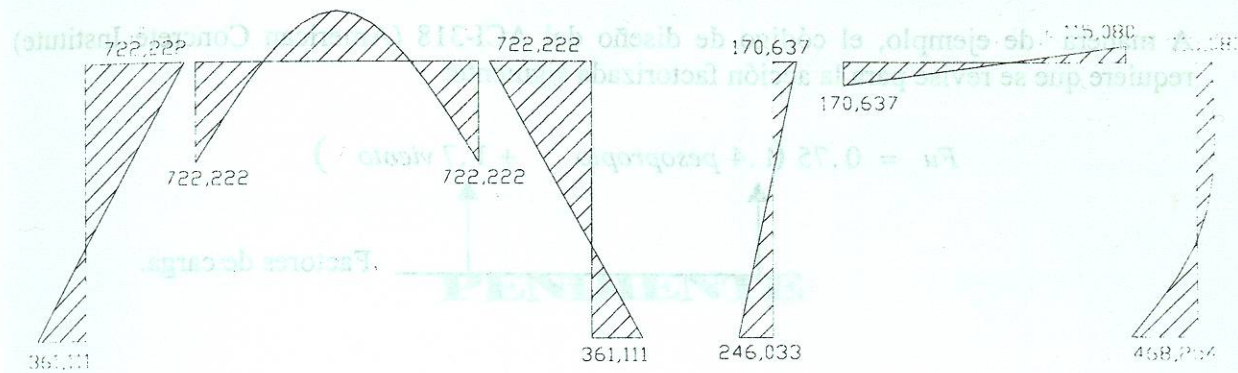
Barra # 3:

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -166,667 \\ 0 & 166,667 \end{bmatrix}_I + \begin{bmatrix} 361,111 & -301,587 \\ 722,222 & -281,745 \end{bmatrix}_{II} = \begin{bmatrix} 361,111 & -468,254 \\ 722,222 & -115,078 \end{bmatrix}$$

Diagramas de momentos:

Cargas de peso propio:

Cargas de viento:

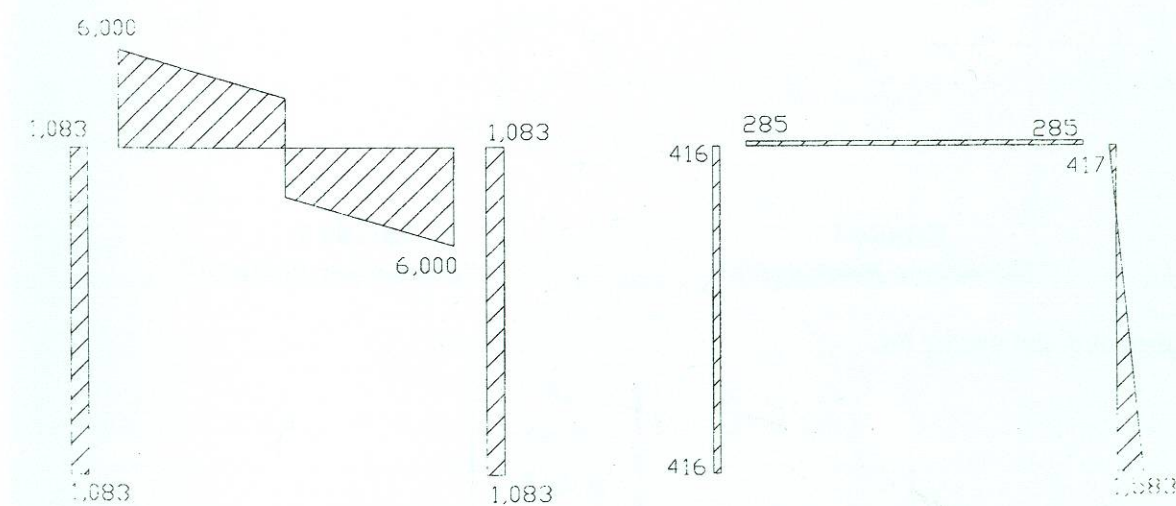


Diagramas de cortantes:

A partir de los momentos en los extremos de las barras y las cargas transversales, resulta simple calcular los diagramas de cortante. Se deja al lector el calculo de los mismos.

Cargas de peso propio:

Cargas de viento:



Ahora, teniendo el estado de esfuerzos inducido por cada uno de los dos tipos de carga, resulta posible realizar combinaciones de carga requeridas por los códigos de diseño, en los que se pide revisar que las combinaciones de acciones, multiplicadas por sus factores de

carga, sean menores que las resistencias, reducidas por los factores de reducción de resistencia:

$$Accion \times F_{actor} C_{arga} < Resistencia \times F_{actor} R_{reduccion}$$

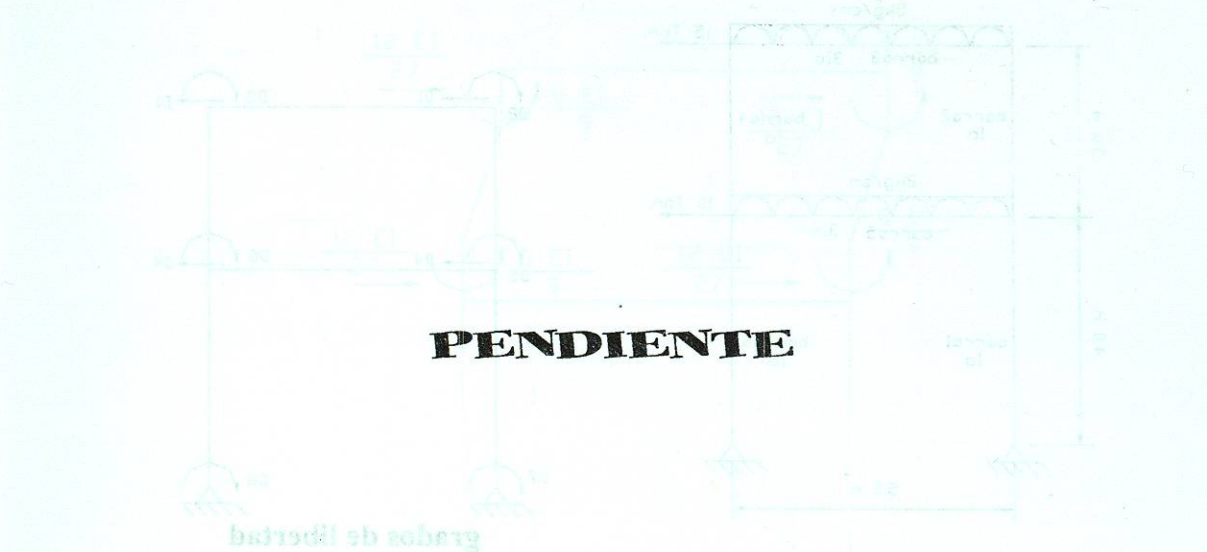
A manera de ejemplo, el código de diseño del ACI-318 (American Concrete Institute) requiere que se revise para la acción factorizada siguiente:

$$F_u = 0.75 (1.4 \text{ peso propio} + 1.7 \text{ viento})$$



4.2.2.3. EJEMPLO ADICIONAL: Marco Con Dos Claros, Una Altura

$D_1 = 1, D_2 = 0$



$$F_u = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0.417 \\ -0.417 \\ 12 \end{bmatrix}$$