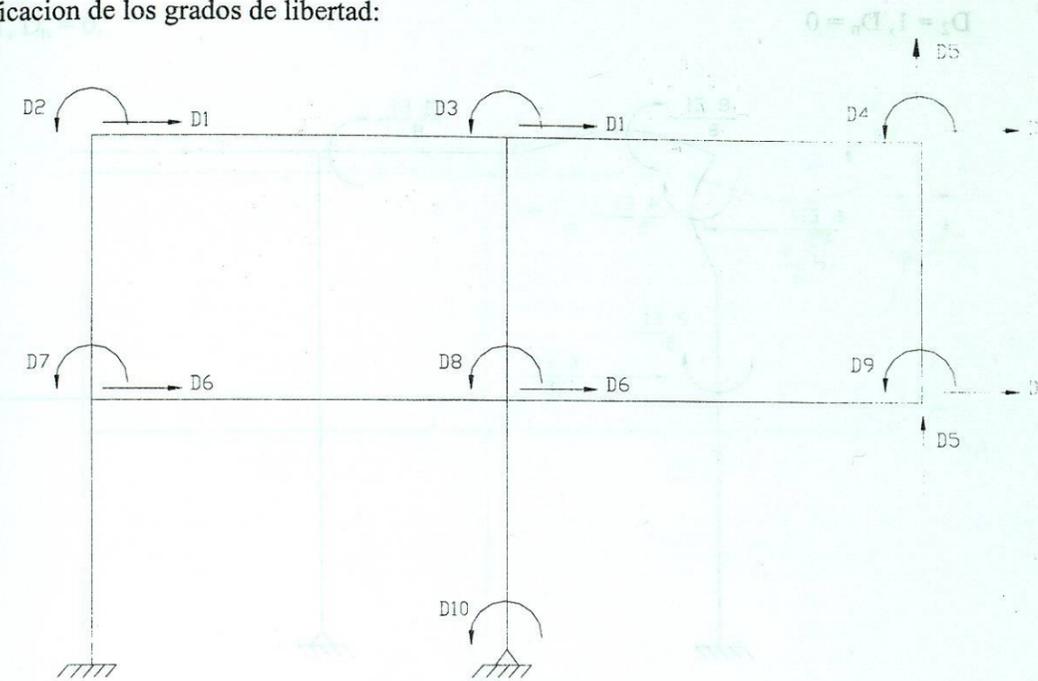


Formación del vector  $F_u$ :

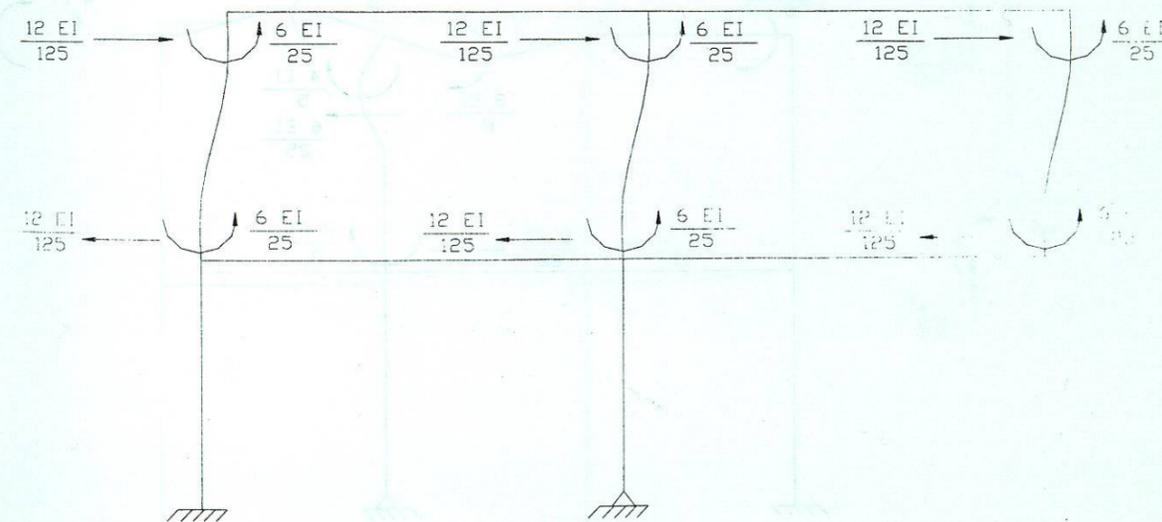
$$F_u = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -11.375 \\ 1.125 \\ 8.625 \\ -19.0 \\ 0.5 \\ -10.66 \\ 0 \\ 10.035 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Identificación de los grados de libertad:

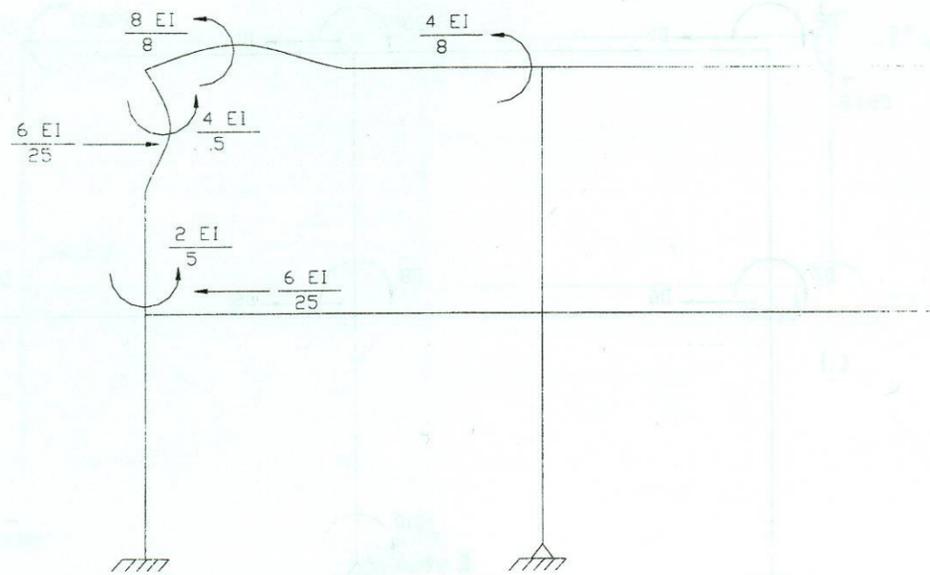


Liberando cada uno de los grados de libertad:

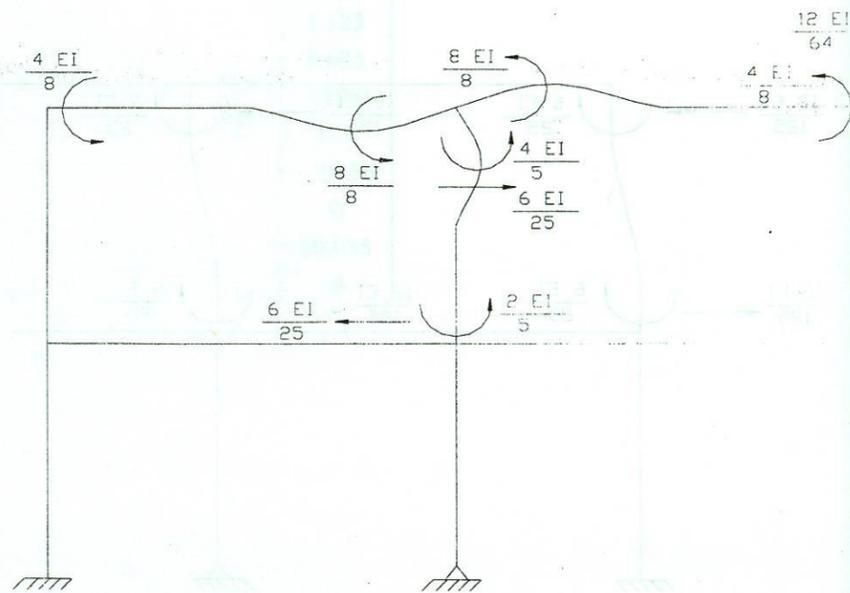
$$D_1 = 1, D_n = 0$$



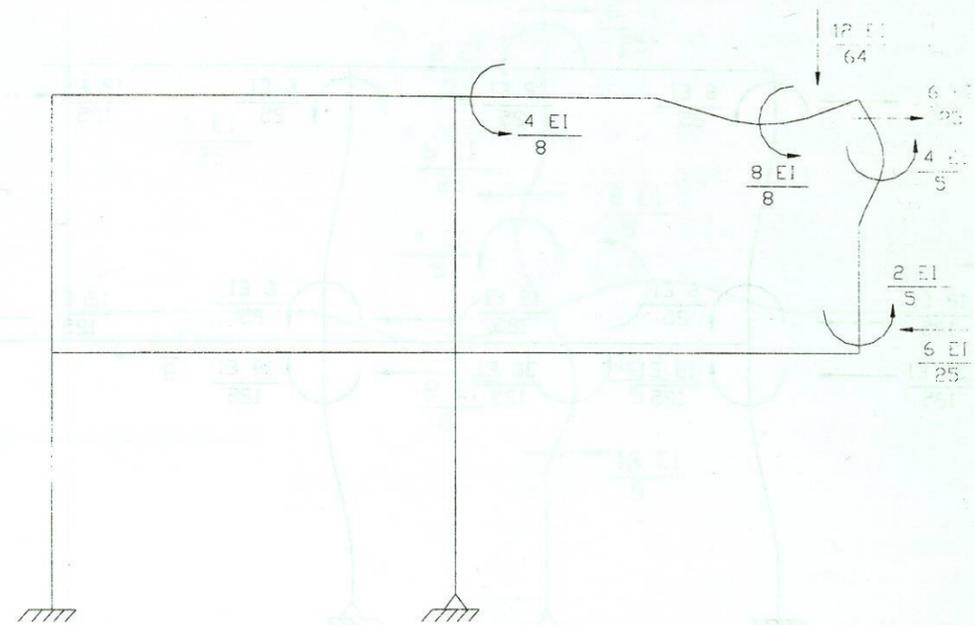
$D_2 = 1, D_n = 0$



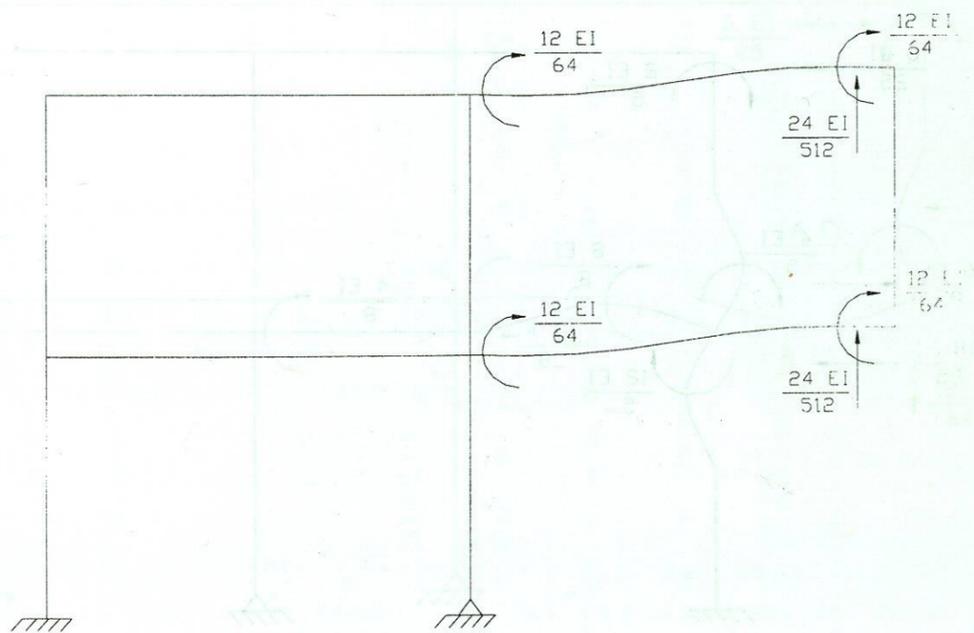
$D_3 = 1, D_n = 0$



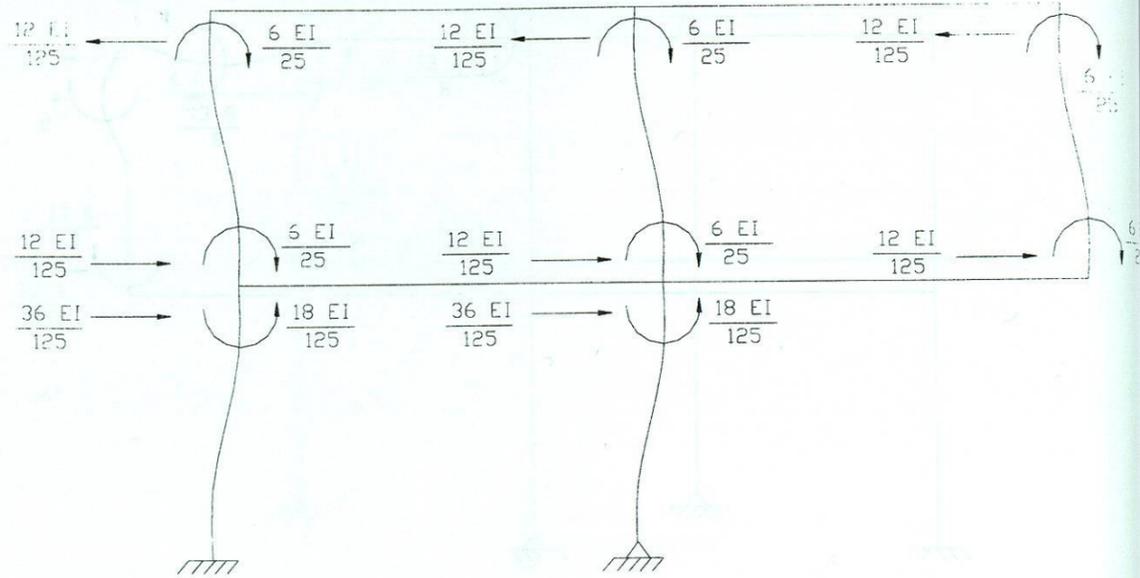
$D_4 = 1, D_n = 0$



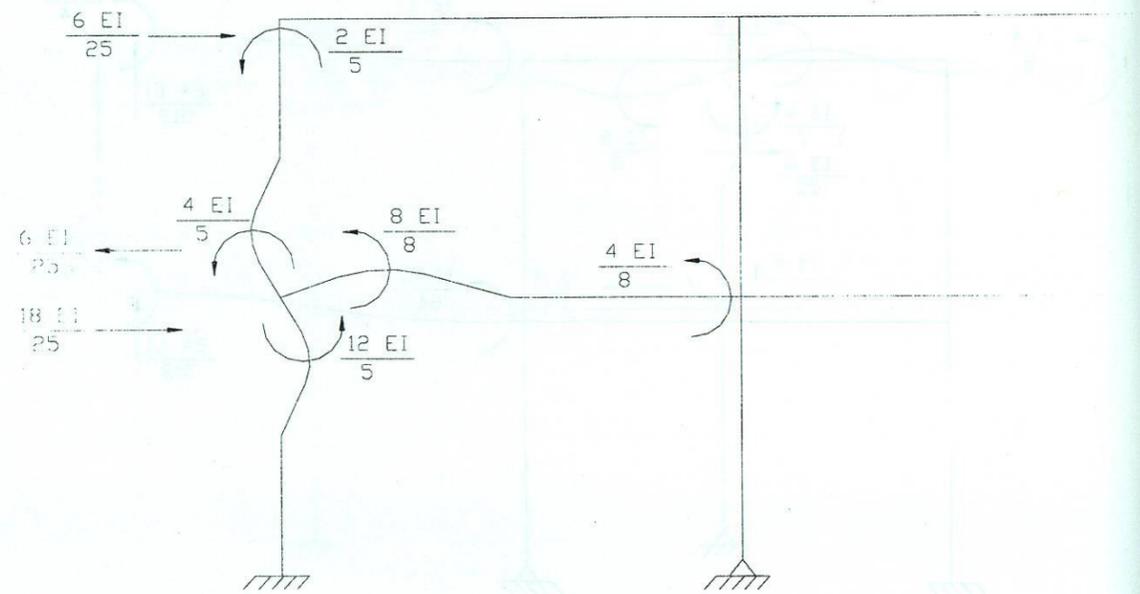
$D_5 = 1, D_n = 0$



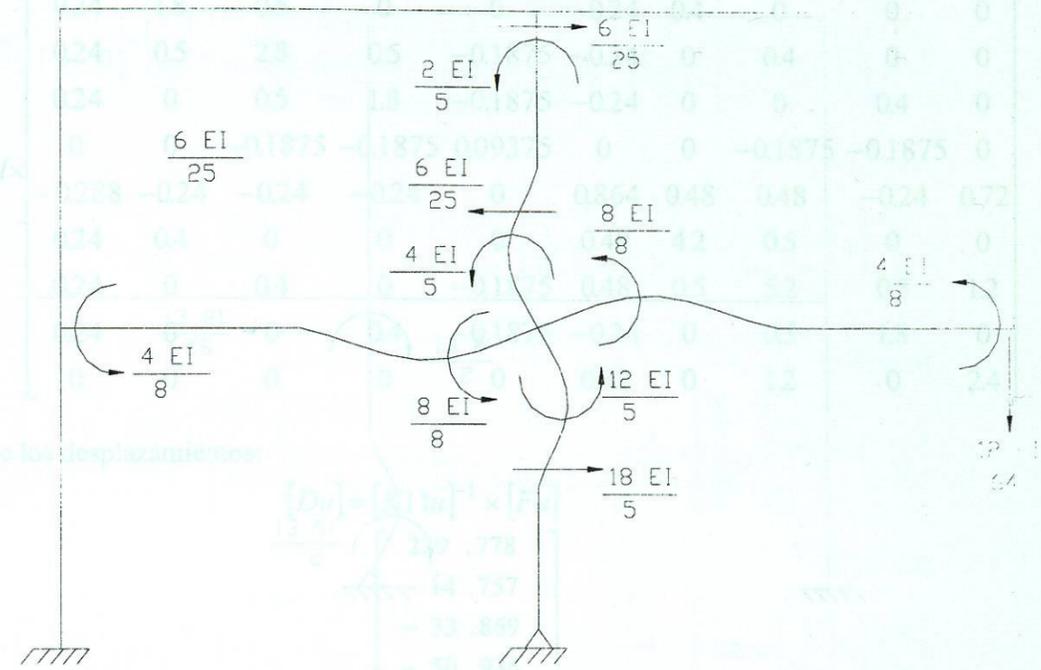
$D_6 = 1, D_n = 0$



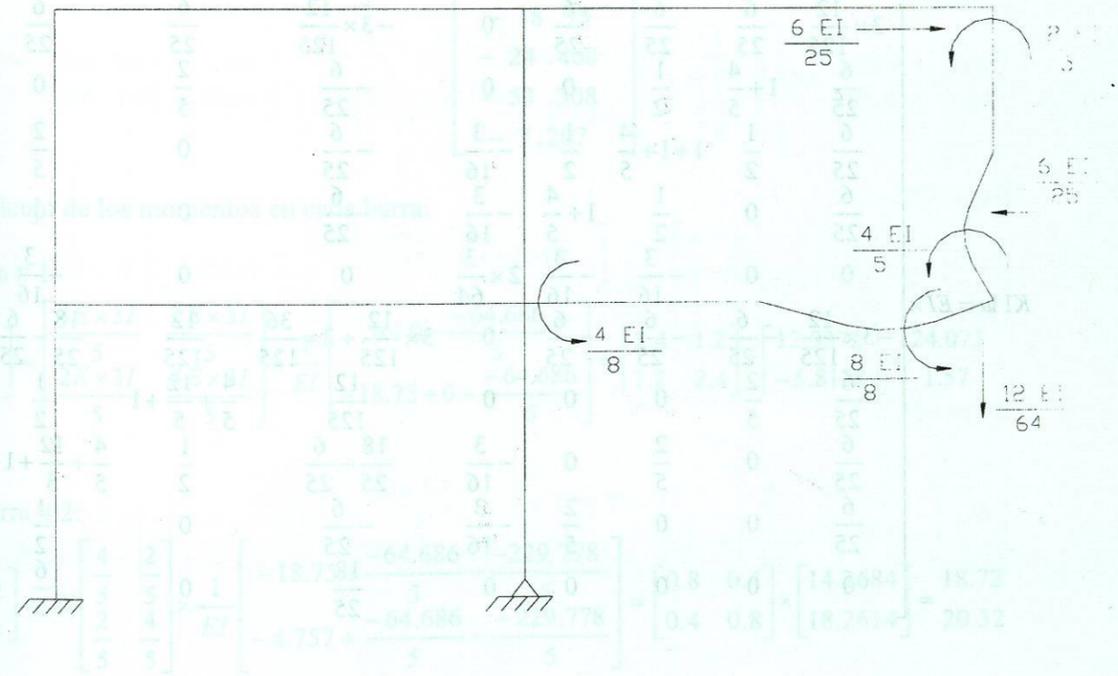
$D_7 = 1, D_n = 0$



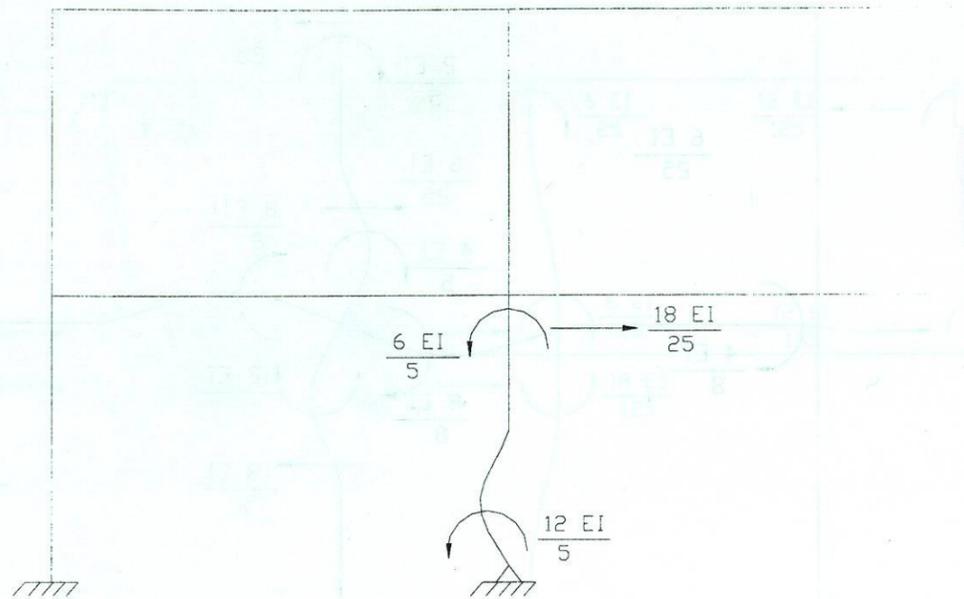
$D_8 = 1, D_n = 0$



$D_9 = 1, D_n = 0$



$D_{10} = 1, D_n = 0$



Formacion de la matriz  $K1u$ :

$$K1u = EI \times \begin{bmatrix} 3 \times \frac{12}{125} & \frac{6}{25} & \frac{6}{25} & \frac{6}{25} & 0 & -3 \times \frac{12}{125} & \frac{6}{25} & \frac{6}{25} & \frac{6}{25} \\ \frac{6}{25} & 1 + \frac{4}{5} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{6}{25} & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ \frac{6}{25} & \frac{1}{2} & 1 + 1 + \frac{4}{5} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{16} & -\frac{6}{25} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{6}{25} & 0 & \frac{1}{2} & 1 + \frac{4}{5} & -\frac{3}{16} & -\frac{6}{25} & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{16} & -\frac{3}{16} & 2 \times \frac{3}{64} & 0 & 0 & -\frac{3}{16} & -\frac{3}{16} \\ -3 \times \frac{12}{125} & -\frac{6}{25} & -\frac{6}{25} & -\frac{6}{25} & 0 & 3 \times \frac{12}{125} + 2 \times \frac{36}{125} & \frac{12}{125} & \frac{18}{25} - \frac{6}{25} & -\frac{6}{25} \\ \frac{6}{25} & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{125} & \frac{4}{5} + \frac{12}{5} + 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{6}{25} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & -\frac{3}{16} & \frac{18}{25} - \frac{6}{25} & \frac{1}{2} & \frac{4}{5} + \frac{12}{5} + 1 + 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{6}{25} & 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{16} & -\frac{6}{25} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{4}{5} + 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{18}{25} & 0 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} + 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{18}{25} & 0 & \frac{6}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

$$K1u = EI \times \begin{bmatrix} 0.288 & 0.24 & 0.24 & 0.24 & 0 & -0.288 & 0.24 & 0.24 & 0.24 & 0 \\ 0.24 & 1.8 & 0.5 & 0 & 0 & -0.24 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0.24 & 0.5 & 2.8 & 0.5 & -0.1875 & -0.24 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.24 & 0 & 0.5 & 1.8 & -0.1875 & -0.24 & 0 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1875 & -0.1875 & 0.09375 & 0 & 0 & -0.1875 & -0.1875 & 0 \\ -0.288 & -0.24 & -0.24 & -0.24 & 0 & 0.864 & 0.48 & 0.48 & -0.24 & 0.72 \\ 0.24 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.48 & 4.2 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.24 & 0 & 0.4 & 0 & -0.1875 & 0.48 & 0.5 & 5.2 & 0.5 & 1.2 \\ 0.24 & 0 & 0 & 0.4 & -0.1875 & -0.24 & 0 & 0.5 & 1.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.72 & 0 & 1.2 & 0 & 2.4 \end{bmatrix}$$

Calculo de los desplazamientos:

$$[Du] = [K1u]^{-1} \times [Fu]$$

$$Du = \begin{bmatrix} 229.778 \\ -14.757 \\ -33.869 \\ -50.936 \\ -527.709 \\ 64.686 \\ -18.75 \\ -24.408 \\ -53.308 \\ -7.207 \end{bmatrix}$$

Calculo de los momentos en cada barra:

Barra # 1:

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4E \times 3I}{5} & \frac{2E \times 3I}{5} \\ \frac{2E \times 3I}{5} & \frac{4E \times 3I}{5} \end{bmatrix} \times \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 0 + 0 - \frac{-64.686}{5} \\ -18.75 + 0 - \frac{-64.686}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4 & 1.2 \\ 1.2 & 2.4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 12.9372 \\ -5.8128 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24.073 \\ 1.57 \end{bmatrix}$$

Barra # 2:

$$\begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \times \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} -18.75 + \frac{-64.686}{5} - \frac{-229.778}{5} \\ -4.757 + \frac{-64.686}{5} - \frac{-229.778}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 14.2684 \\ 18.2614 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18.72 \\ 20.32 \end{bmatrix}$$

Barra # 3:

$$\begin{bmatrix} M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.375 \\ -9.125 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4E \times 2I & 2E \times 2I \\ 2E \times 2I & 4E \times 2I \end{bmatrix} \times \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} -14.757 + 0 - 0 \\ -33.869 + 0 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.375 \\ -9.125 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -14.757 \\ -33.869 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20.3 \\ -50.3 \end{bmatrix}$$

Barra # 4:

$$\begin{bmatrix} M_2 \\ M_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.66 \\ -10.66 \end{bmatrix} + EI \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \times \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} -18.75 + 0 - 0 \\ -24.408 + 0 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.66 \\ -10.66 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -18.75 \\ -24.408 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20.29 \\ -44.44 \end{bmatrix}$$

Barra # 5:

$$\begin{bmatrix} M_6 \\ M_4 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \times \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} -24.408 + \frac{-64.686}{5} - \frac{-229.778}{5} \\ -33.869 + \frac{-64.686}{5} - \frac{-229.778}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8.614 \\ -0.8506 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.55 \\ 2.76 \end{bmatrix}$$

Barra # 6:

$$\begin{bmatrix} M_4 \\ M_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \end{bmatrix} + EI \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \times \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} -33.869 + 0 - \frac{-527.709}{8} \\ -50.936 + 0 - \frac{-527.709}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 32.0946 \\ 15.0276 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47.6 \\ 23.0 \end{bmatrix}$$

Barra # 7:

$$\begin{bmatrix} M_8 \\ M_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.625 \\ -0.625 \end{bmatrix} + EI \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \times \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} -53.308 + \frac{-64.686}{5} - \frac{-229.778}{5} \\ -50.936 + \frac{-64.686}{5} - \frac{-229.778}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.625 \\ -0.625 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -20.2896 \\ -17.9176 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17.9176 \\ -20.2896 \end{bmatrix}$$

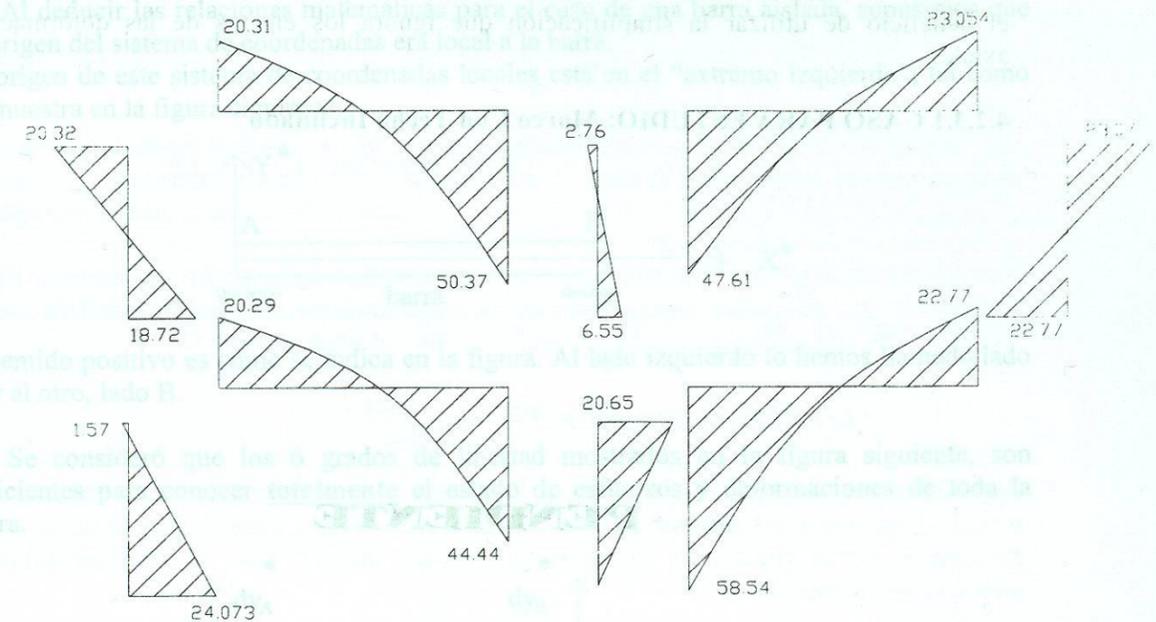
Barra # 8:

$$\begin{bmatrix} M_6 \\ M_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.66 \\ -10.66 \end{bmatrix} + EI \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \times \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} -24.408 + 0 - \frac{-527.709}{8} \\ -53.308 + 0 - \frac{-527.709}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.66 \\ -10.66 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 41.5556 \\ 12.6556 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41.5556 \\ 12.6556 \end{bmatrix}$$

Barra # 9:

$$\begin{bmatrix} M_7 \\ M_6 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \times \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} -7.207 + 0 - \frac{-64.686}{5} \\ -24.408 + 0 - \frac{-64.686}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4 & 1.2 \\ 1.2 & 2.4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5.7302 \\ -11.4708 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.012 \\ -20.6 \end{bmatrix}$$

Diagrama de momentos:



3.- Debido a estos desplazamientos aparecen 4 fuerzas asociadas a cada uno de ellos, resultando un sistema de ecuaciones lineales simultáneas.

NOTA: Atención (\*) índices, refiriendo al sistema local de coordenadas.

4.- Al resolver sistemas estructurales del tipo de vigas continuas, la fuerza de dos maneras:

- a) a través del Método General de Rigideces
- b) a través del Método de Rigideces Algebras Simplificado.

4.2.3. MARCOS CON BARRAS NO ORTOGONALES

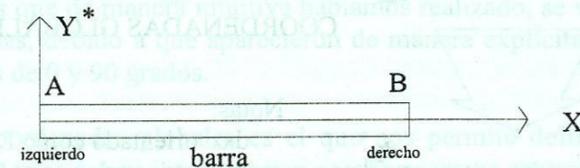
Ahora probaremos la efectividad del método alterno simplificado en las estructuras en que sus barras no están alineadas o a 90 grados unas con respecto a otras. También probaremos el beneficio de utilizar la simplificación que ignora los efectos de las deformaciones axiales.

4.2.3.1 CASO PARA ESTUDIO: Marco Con Techo Inclinado

**PENDIENTE**

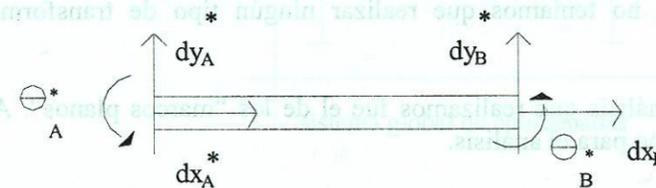
4.2.4. OBSERVACIONES ACERCA DE LA DEDUCCIÓN DE LAS RELACIONES MATEMÁTICAS ENTRE LOS DESPLAZAMIENTOS DE LOS PUNTOS DE CONTROL Y LAS FUERZAS EN LOS MISMOS.

1.- Al deducir las relaciones matemáticas para el caso de una barra aislada, supusimos que el origen del sistema de coordenadas era local a la barra. El origen de este sistema de coordenadas locales está en el "extremo izquierdo", tal como se muestra en la figura siguiente:



el sentido positivo es como se indica en la figura. Al lado izquierdo lo hemos llamado lado A y al otro, lado B.

2.- Se consideró que los 6 grados de libertad mostrados en la figura siguiente, son suficientes para conocer totalmente el estado de esfuerzos y deformaciones de toda la barra.



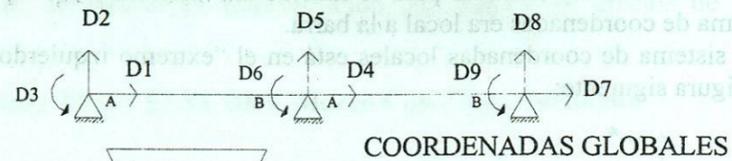
3.- Debido a estos desplazamientos aparecen 6 fuerzas asociadas a cada uno de ellos, resultando un sistema de ecuaciones lineales simultáneas:

$$\begin{bmatrix} F_{*xA} \\ V_{*A} \\ M_{*A} \\ F_{*xB} \\ V_{*B} \\ M_{*B} \end{bmatrix} = [K_{*barra}]_{6 \times 6} \cdot \begin{bmatrix} d_{*xA} \\ d_{*yA} \\ \theta_{*A} \\ d_{*xB} \\ d_{*yB} \\ \theta_{*B} \end{bmatrix}$$

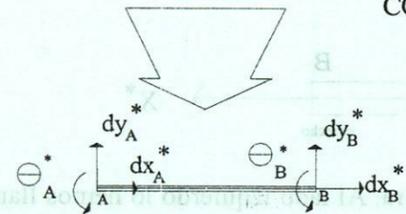
NOTA: Asterisco (\*) indica: referido al sistema local de coordenadas.

- 4.- Al resolver sistemas estructurales del tipo de vigas continuas, lo hicimos de dos maneras:
- a) a través del Método General de Rigideces
  - b) a través del Método de Rigideces Alterno Simplificado.

De la primer manera, encontramos que el "ensamble" de las matrices de rigidez de todas las barras puede realizarse de manera directa. Esto es debido a que el sistema de coordenadas local de todas y cada una de las barras, puede orientarse de tal manera que coincidan con la orientación del sistema global de referencia. Observar la figura:



COORDENADAS GLOBALES



COORDENADAS LOCALES

Notas:

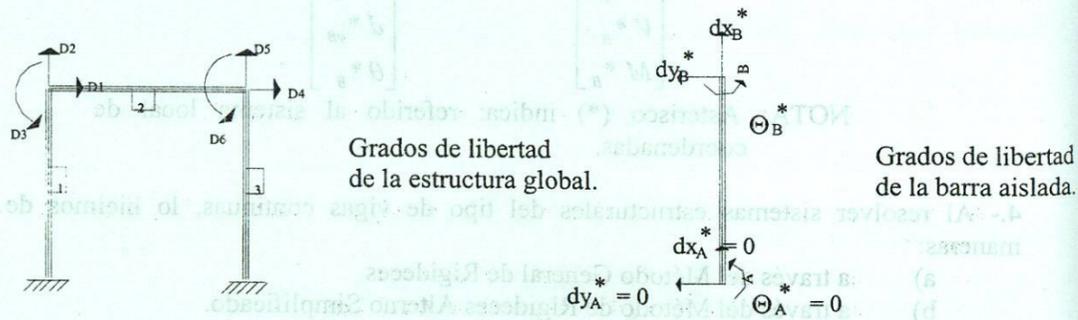
- $dx_A$  orientado como D1
- $dy_A$  orientado como D2
- $\Theta_A$  orientado como D3
- ...
- etc

Posteriormente, propusimos el Método de Rigideces Alterno Simplificado. A través de este método llegamos a los mismos resultados, realizando menos trabajo. Descubrimos que si seguíamos ciertas reglas, no teníamos que realizar ningún tipo de transformación de sistemas de coordenadas.

5.- El siguiente tipo de análisis que realizamos fue el de los "marcos planos". Aquí solo utilizamos el método alterno para el análisis.

En estos problemas nos encontramos con que los sistemas de coordenadas local de la barra y el global de toda la estructura ya no coincidían en orientación. Esto nos obligó a realizar transformaciones del sistema de referencia de una manera intuitiva y basándonos en la inspección de los dibujos con la deformada de la estructura para cada grado de libertad.

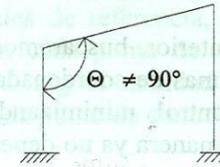
Ejemplo:



Grados de libertad de la estructura global.

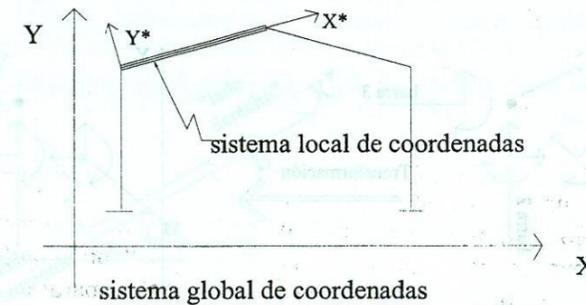
Grados de libertad de la barra aislada.

cuando el análisis se extendió al caso de los marcos no-ortogonales, ejemplo:



Las transformaciones que de manera intuitiva habíamos realizado, se volvieron mucho más complejas y laboriosas, debido a que aparecieron de manera explícita los senos y cosenos de ángulos diferentes de 0 y 90 grados.

7.- El sistema de coordenadas globales es el que nos permite definir la posición en el espacio de todas las barras que se interconectan para formar una estructura.



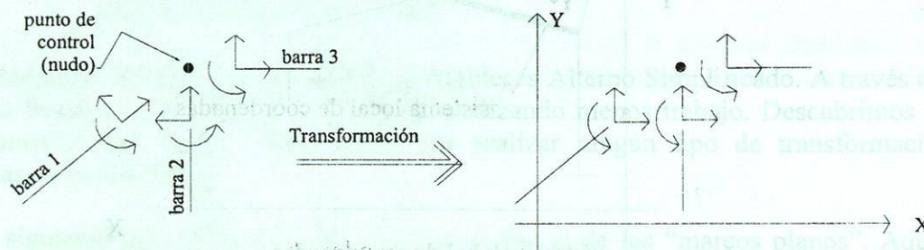
8.- Derivado de los problemas detectados con los marcos planos, y considerando que estos son problemas típicos de la práctica profesional, podemos afirmar que necesitamos un método sistemático y mecánico de realizar las sucesivas transformaciones de sistemas de coordenadas, de manera tal que nuestra labor de inspección de los dibujos pueda ser evitada y decidir la orientación y sentido de cada fuerza que aparece en los extremos de las barras a través del uso de relaciones matemáticas que reduzcan la posibilidad de confusión y que permitan pensar en automatizar el análisis de las estructuras mediante el uso de máquinas computadoras.

**4.3. AMPLIACIÓN FORMAL DEL MÉTODO GENERAL DE RIGIDECES AL CASO GENERAL EN QUE LAS BARRAS NO ESTÁN ALINEADAS**

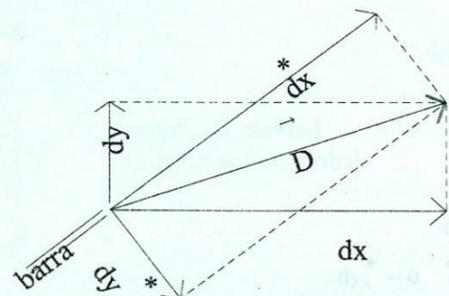
Como se propuso en el artículo anterior, buscaremos ahora la manera de "mecanizar" el proceso de transformación de sistemas de coordenadas para los desplazamientos y fuerzas que aparecen en los puntos de control, minimizando el uso de métodos gráficos en el análisis de las estructuras. De esta manera ya no dependeremos de nuestra intuición para la transformación de estas cantidades vectoriales.

**NATURALEZA DEL PROBLEMA**

Como hemos aprendido, el proceso de análisis de una estructura involucra el ensamble (suma) de las ecuaciones matriciales de rigidez de todas y cada una de las barras que forman la estructura. Para poder realizar esta operación matemática, será necesario transformar los vectores de fuerzas y desplazamientos en los extremos de todas las barras, a vectores paralelos a un sistema de ejes de referencia globales.



Como es sabido, el par de vectores ortogonales de desplazamiento en los extremos de cada barra son las componentes del vector de desplazamiento resultante, que por conveniencia matemática hemos definido. Así, el problema se reduce a representar el vector resultante mediante otro par de vectores ortogonales "girados" un ángulo conocido respecto a la orientación del par ortogonal original (componentes paralelas a los ejes globales de referencia). En la figura siguiente se muestra gráficamente este concepto:

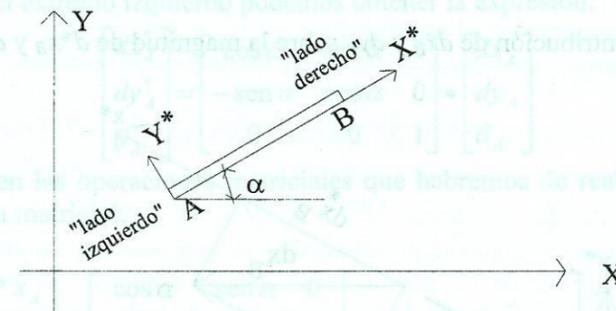


Estrictamente hablando, esta transformación a un mismo sistema de referencia hay que hacerlo en cada punto de control. Esto no implica que en todos los puntos de control se deba utilizar los mismos ejes globales de referencia, es decir, pudieran tener diferentes orientaciones estos ejes comunes en cada punto de control. Claro que hacerlo de esta manera complica el proceso debido a la gran cantidad de sistemas comunes de referencia que tendríamos, uno diferente para cada punto de control.

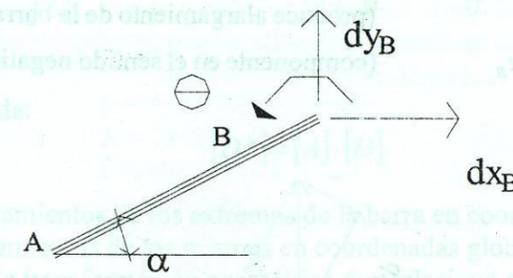
La práctica común es utilizar un mismo sistema común de referencia para todos los puntos de control, el sistema de coordenadas ortogonales globales.

**4.3.1. DEDUCCIÓN DE LA MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN DE VECTORES DE DESPLAZAMIENTO DEL SISTEMA GLOBAL AL LOCAL.**

En el caso general, una barra presenta un ángulo de inclinación con respecto al eje x positivo (medido positivo en contra de las manecillas del reloj). Observar la siguiente figura:



Podemos suponer que, en el caso general, en el extremo B ocurrirán desplazamientos representados por los vectores  $d_{xB}$ ,  $d_{yB}$  y  $\theta_B$



Estos vectores representan el desplazamiento del extremo B de la barra referidos al sistema de coordenadas globales.