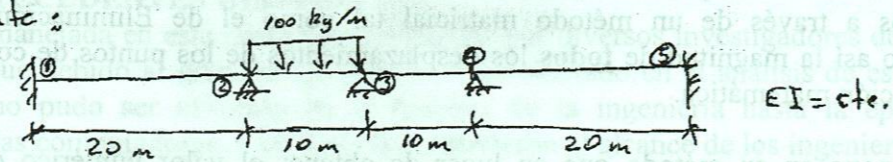
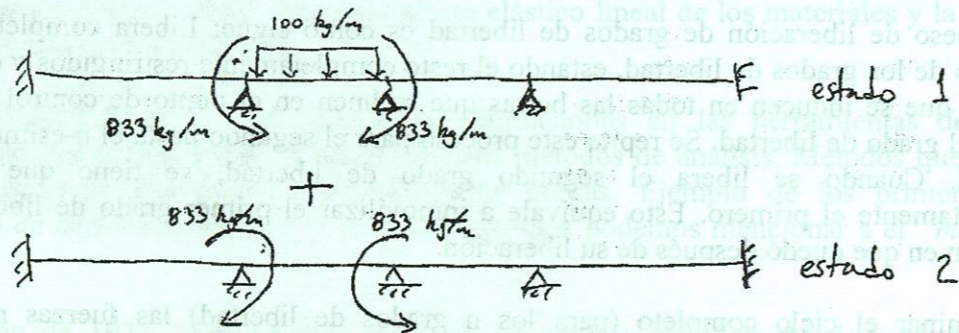


Utilizando el método de Cross, analizaremos la estructura siguiente:



Seguendo el método general desarrollado en este curso, definiremos a la estructura en sus estados 1 y 2.



Enseguida, deberíamos analizar la estructura en estado 2, obteniendo los momentos flexionantes y fuerzas cortantes en los 2 extremos de cada una de las 4 barras.

El método general nos pide formar la matriz de rigidez K_{22} y el vector de fuerzas F_{22} .

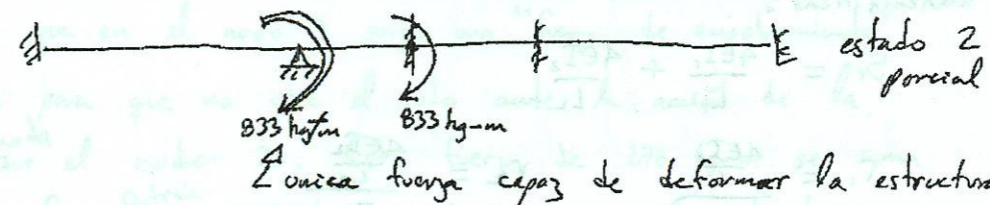
A partir de estas dos matrices, calculamos en una sola operación matemática el vector de desplazamientos solución (Du). Con estos desplazamientos Du, calculamos los momentos y cortantes correspondientes a la estructura en estado 2, los cuales se deben sumar a los de la estructura en estado 1 para obtener las fuerzas internas reales en la estructura original.

El proceso matemático relatado en el párrafo anterior, es manejado por Cross de una manera diferente.

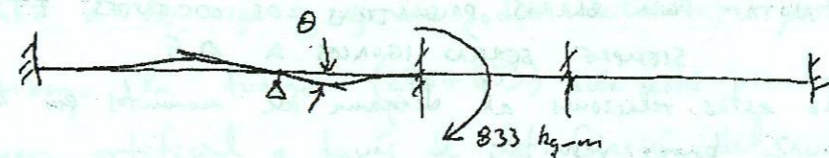
Cross propone calcular los valores solución de Du (4 giros en esta estructura) gradualmente.

SOLUCIÓN DE ESTRUCTURA EN ESTADO 2, UTILIZANDO LA LIBERACIÓN GRADUAL DE LOS GRADOS DE LIBERTAD ARTIFICIALMENTE RESTRINGIDOS EN EL ESTADO 1.

Paso 1: liberamos completamente el grado de libertad 1 (nudo interior izquierdo) y analizamos la estructura resultante como si estuviera en estado 2 parcial.



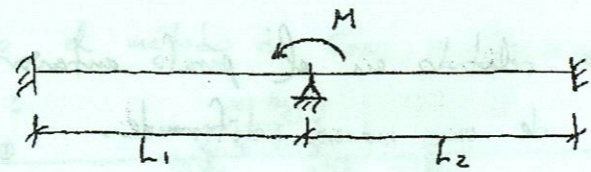
Después de liberar el nodo, la fuerza ficticia en el nodo 2 se cambia de signo y actúa sobre la estructura deformandola.



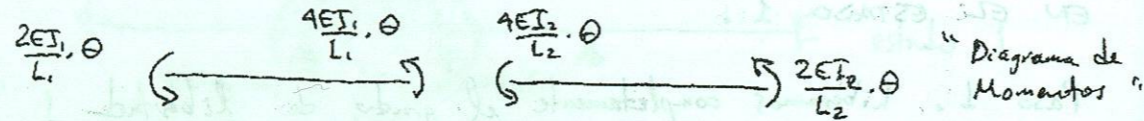
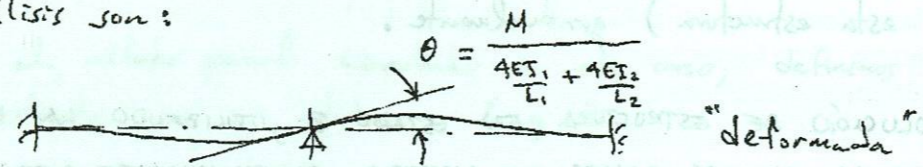
Así, hemos convertido el problema de análisis en el de una viga continua de dos clavos con sus extremos empotrados.

Para poder calcular la magnitud del giro θ y las fuerzas de empotramiento inducidas, haremos las siguientes observaciones:

Solución de subestructura



Esta estructura ya fue resuelta en este curso y los resultados del análisis son:



El método de Cross propone las siguientes relaciones matemáticas:

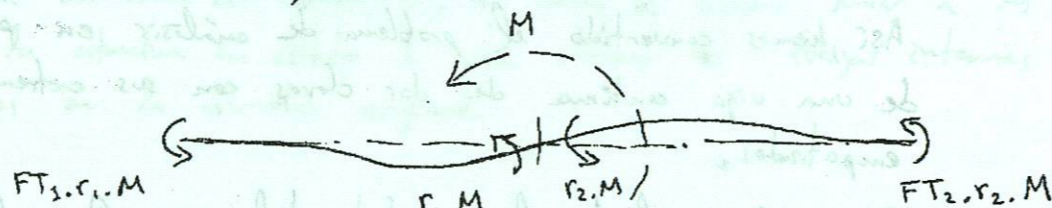
$$S_r = \frac{4EI_1}{L_1} + \frac{4EI_2}{L_2}$$

$$r_1 = \frac{4EI_1}{L_1} \quad r_2 = \frac{4EI_2}{L_2}$$

$$FT_1 = \frac{2EI_1/L_1}{4EI_1/L_1} = 0.5 \quad FT_2 = \frac{2EI_2/L_2}{4EI_2/L_2} = 0.5$$

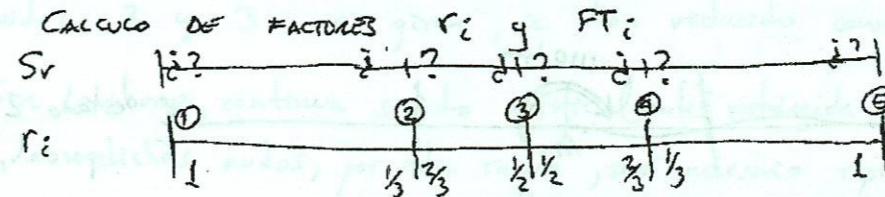
NOTA: PARA BARRAS PRISMÁTICAS, LOS COEFICIENTES FT SIEMPRE SERÁN IGUALES A 0.5

Aplicando estas relaciones al diagrama de momentos en los extremos de las 2 barras, resulta:



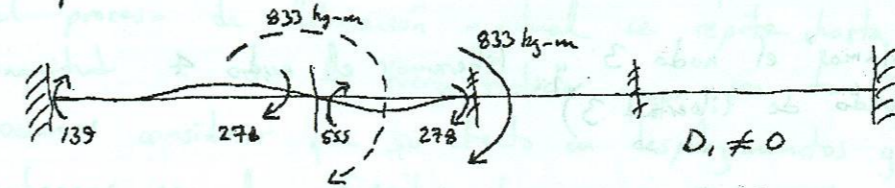
$$\text{Comprobación: } r_1 \cdot M = \frac{4EI_1}{L_1} \cdot M = \frac{4EI_1}{L_1} \cdot \frac{M}{\frac{4EI_1}{L_1} + \frac{4EI_2}{L_2}} = \frac{4EI_1}{L_1} \cdot \theta$$

Aplicando estas observaciones a la solución de nuestro problema, tenemos:



FTi = 0.5 (según se demostró)

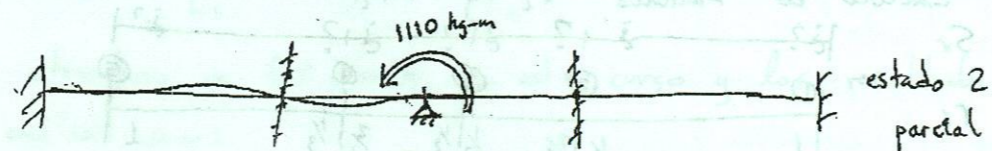
Finalmente, calculamos las fuerzas reducidas al librear el grado de libertad 1.



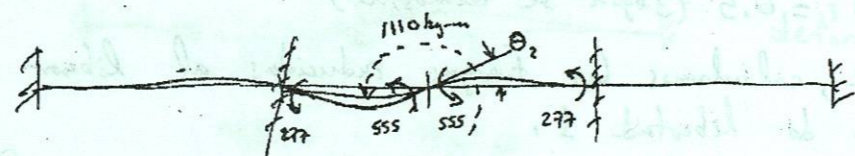
Observar que en el nodo 3 surge una "fuerza de empotramiento" necesaria para que no gire el nodo ante la acción de la fuerza ^{liberada} en el nodo 2. Esta fuerza de 278 kg-m se suma con la fuerza ^{Activa} de 833 kg-m introducida en la estructura en estado 1.

Además, la fuerza fricción en el nodo 3 ha actuado deformando a la viga y ya no podrá deformarla posteriormente. Sin embargo la fuerza (278+833) aún está siendo "contenida" de manera artificial a través de la fijación del nodo 3,

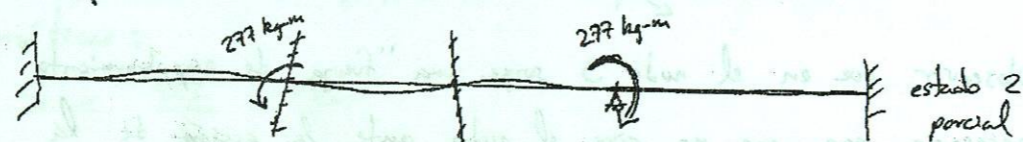
Paso 2. "Fijamos" el nudo 2 y liberamos el nudo 3 (grado de libertad 2)



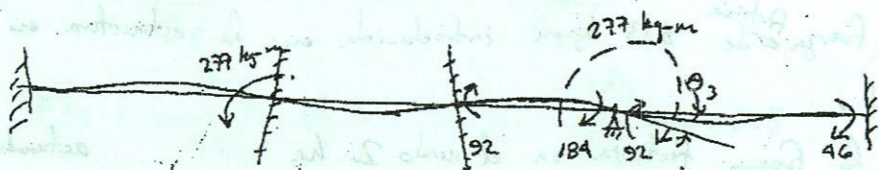
después de actuar la fuerza liberada:



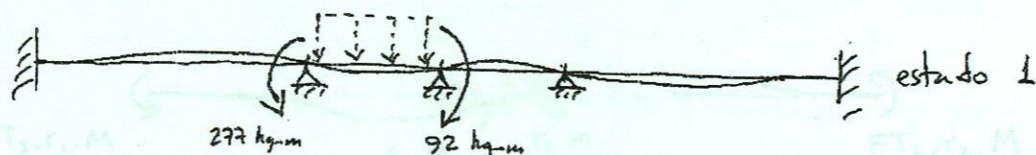
Paso 3. "Fijamos" el nudo 3 y liberamos el nudo 4 (grado de libertad 3)



después de actuar la fuerza liberada:



Así, después de este proceso de liberación no simultánea de los 3 grados de libertad, la estructura en estado 1 resultante es:



En este nuevo estado 1, la viga continua se encuentra deformada y las fuerzas ficticias necesarias para que sus nudos 2 y 3 no giren, se han reducido considerablemente.

Sin embargo, continua siendo artificialmente restringida al giro en dichos nudos, por esta razón, será necesario repetir el proceso de liberación gradual de los grados de libertad. Obteniendo una curva elástica diferente y fuerzas ficticias posiblemente menores.

El proceso de liberación gradual se repite hasta que la magnitud de la fuerza ficticia mayor sea tan pequeña que podamos considerar que su efecto en desplazamientos y fuerzas internas sea lo suficientemente pequeño para poder ser ignorado.

El proceso cíclico de 3 pasos descrito, se puede "mecanizar" y replantear de la siguiente forma:

MÉTODO DE CROSS (forma mecanizada)

Paso 1. Suponemos empotrados todos los grados de libertad y calculamos los momentos de empotramiento necesarios. (fuerzas ficticias en estado 1)

Paso 2. En un primer ciclo ("pasada") recorremos uno a uno los grados de libertad de la estructura y en cada uno realizamos las siguientes operaciones:

operación #1. Calcular el momento resultante en el grado de libertad. A este momento M_R lo denominaremos "Momento de desequilibrio" (fuerza ficticia resultante)

Si $M_R = 0$ continuar con la operación #3.

operación #2. Calcular el momento actuante $M_a = -M_R$ y "permitir" que el grado de libertad exista. (dejar girar libremente el nudo)

De esta manera, se generan momentos internos a las barras que se unen en el nudo en que existe el grado de libertad "liberado".

Para el cálculo de los momentos internos, utilizamos las observaciones realizadas en el paso 1 de la primera versión del método de Cross.

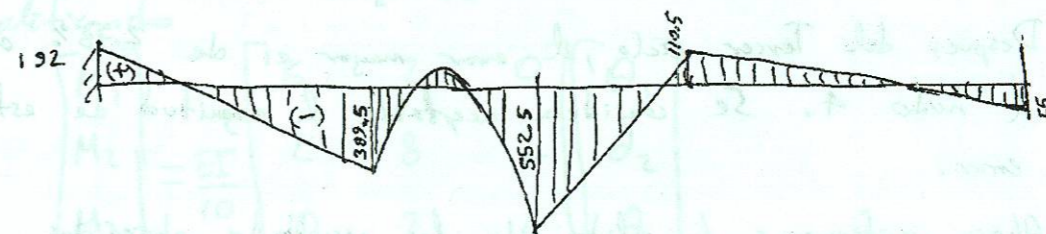
operación #3. Pasar al siguiente nudo en turno dentro de este primer ciclo:

NOTA: El siguiente nudo podría tener adccionado un momento "transportado" desde los nudos a los cuales se conecta y que ya han sido liberados.

operación #4. Al terminar un ciclo completo, verificaremos la magnitud máxima absoluta del momento M_R en cada nudo. Si esta magnitud es menor al error máximo admisible, podremos detener el procedimiento de cálculo, en caso contrario, deberemos iniciar un nuevo ciclo.

FORMA TABULADA DEL MÉTODO DE CROSS "MECANIZADO"

	NUDO 1	NUDO 2		NUDO 3		NUDO 4		NUDO 5
factor f_i	NO ES NECESARIO	1/3	2/3	1/2	1/2	2/3	1/3	NO ES NECESARIO
Fuerzas de empotramiento (FEM)	0 kg-m	0	833 kg-m	-833 kg-m	0	0	0	0
CICLO # 1	-139	-278	-555	-278				
		277	555	555	277			
				-92	-184	-92		
CICLO # 2	-46	-92	-184	-92				
		46	92	92	46			
				-15	-31	-15		
CICLO # 3	-7	-15	-30	-15				
		7	15	15	7			
				-1	-3	-3		
Sumatoria de Momentos	-192	-385	394	-556	549	113	-108	-55
error		1.8%	1.8%	0.18%		2.78%		



En este ejemplo, podemos observar que al terminar el tercer ciclo de liberación de grados de libertad, la fuerza ficticia mayor remanente es de 7 kg-cm en el nudo 2.

El momento final en la estructura real (no la del estado 1 o la del estado 2) se calcula sumando las F.E.M. en los extremos de cada una de las 4 barras con los correspondientes momentos inducidos durante el proceso de liberación de los nudos.

Por ejemplo en el extremo izquierdo de la barra 2:

$$M_{real} = \underbrace{833 \text{ kg-m}}_{\text{Estado 1}} + \underbrace{(-555 + 277 - 184 + 46 - 30 + 7)}_{\text{Estados 2 parciales!}} \text{ kg-m}$$

$$M_{real} = 394 \text{ kg-m}$$

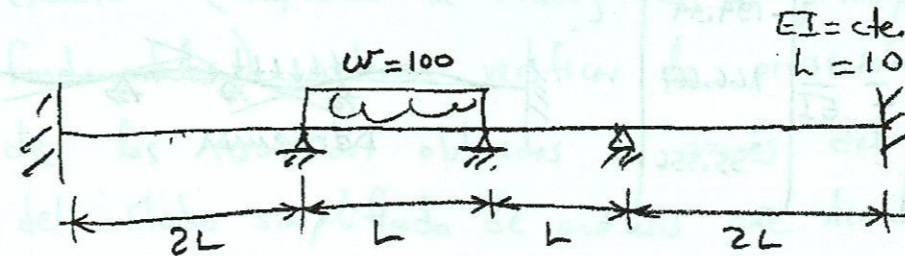
Si calculamos el error introducido por la fuerza ficticia no "absorbida" por desplazamientos en la viga:

$$\text{error en nudo 2} \Rightarrow \frac{7 \text{ kg-cm}}{394 \text{ kg-cm}} \times 100 = 1.8\%$$

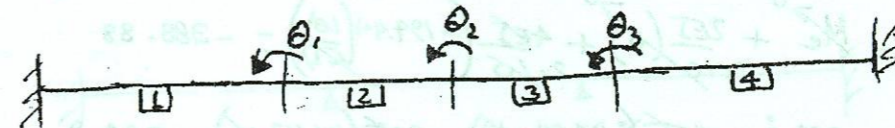
Después del Tercer ciclo, el error mayor es de 2.78% en el nudo 4. Se considera aceptable la magnitud de este error.

Ahora, verificaremos la validez de los resultados obtenidos mediante el método de Cross. Compararemos estos resultados contra los obtenidos mediante la aplicación del método general de rigideces que hemos desarrollado en este mismo curso.

EJEMPLO RESUELTO CON LOS TEOREMAS EN SU FORMA GENERAL



PASO 1 IDENTIFICAR GRADOS DE LIBERTAD



PASO 2 FORMAR MATRIZ DE RIGIDEZ

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4EI/L + 4EI/2L & 2EI/L & 0 \\ 2EI/L & 4EI/L + 4EI/L & 2EI/L \\ 0 & 2EI/L & 4EI/L + 4EI/2L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

simplificando

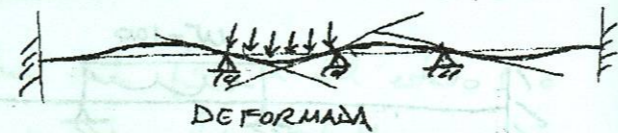
$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \frac{EI}{10} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

PASO 3 FORMAR VECTOR DE FUERZAS SOBRE NUDO

$$[M_a] = -[M_r] = - \begin{bmatrix} +wL^2/12 \\ -wL^2/12 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} +833.3 \\ -833.3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

PASO 4 CALCULAR $[\theta] = K^{-1} [M_a]$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \frac{10}{EI} \begin{bmatrix} -194.44 \\ 166.667 \\ -55.556 \end{bmatrix}$$



PASO 5 CALCULAR FUERZAS EN EXTREMOS DE BARRAS

$$M_{i1} = M_e^0 + \frac{4EI}{2 \times 10} (\theta_1) + \frac{2EI}{2 \times 10} \left(\frac{-194.44 \times 10}{EI} \right) = -194.44$$

$$M_{d1} = M_e^0 + \frac{2EI}{2 \times 10} (\theta_1) + \frac{4EI}{2 \times 10} \left(\frac{-194.44 \times 10}{EI} \right) = -388.88$$

$$M_{i2} = 833.3 + \frac{4EI}{10} \left(\frac{-194.44 \times 10}{EI} \right) + \frac{2EI}{10} \left(\frac{166.667 \times 10}{EI} \right) = 388.9$$

$$M_{d2} = -833.3 + \frac{2EI}{10} \left(\frac{-194.44 \times 10}{EI} \right) + \frac{4EI}{10} \left(\frac{166.667 \times 10}{EI} \right) = -555.55$$

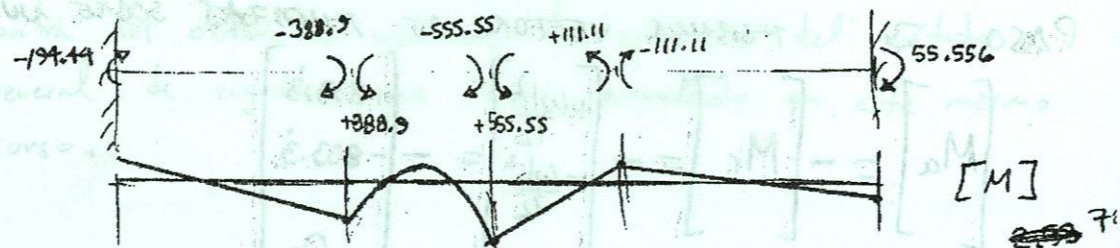
$$M_{i3} = M_e^0 + \frac{4EI}{10} \left(\frac{166.667 \times 10}{EI} \right) + \frac{2EI}{10} \left(\frac{-55.556 \times 10}{EI} \right) = 555.55$$

$$M_{d3} = M_e^0 + \frac{2EI}{10} \left(\frac{166.667 \times 10}{EI} \right) + \frac{4EI}{10} \left(\frac{-55.556 \times 10}{EI} \right) = 111.11$$

$$M_{i4} = M_e^0 + \frac{4EI}{2 \times 10} \left(\frac{-55.556 \times 10}{EI} \right) + \frac{2EI}{2 \times 10} (0) = -111.11$$

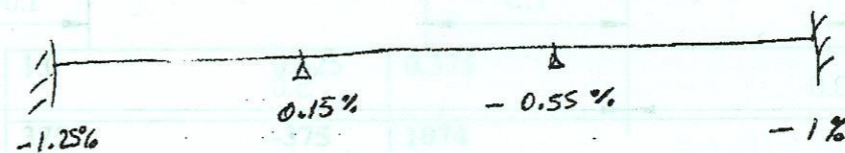
$$M_{d4} = M_e^0 + \frac{2EI}{2 \times 10} \left(\frac{-55.556 \times 10}{EI} \right) + \frac{4EI}{2 \times 10} (0) = -55.556$$

GRÁFICAMENTE:



Con los resultados obtenidos de este análisis "exacto" (aceptando la validez de los principios fundamentales) podemos verificar la precisión de los resultados obtenidos a través del uso del método simplificado de análisis que hemos planteado en esta sección del curso.

Magnitud calculada de los errores:

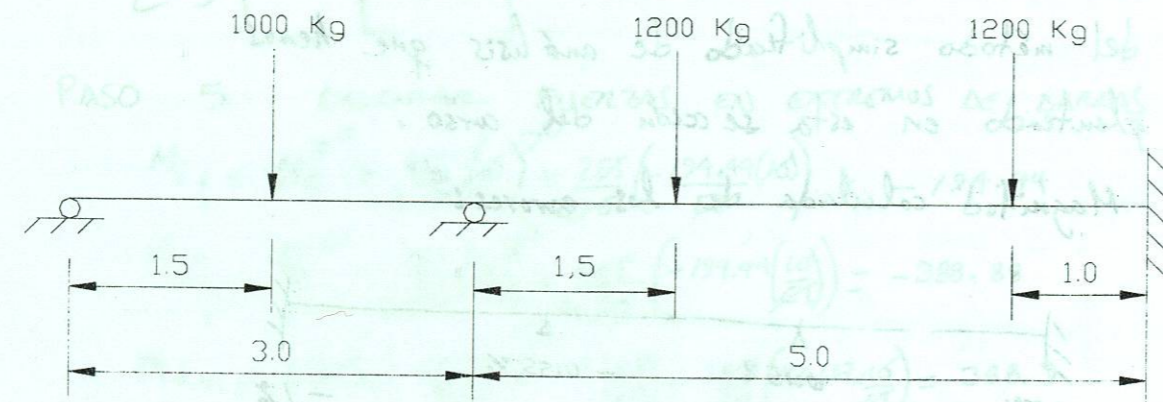


$$\left(\frac{388.9 - 388.9}{388.9} \right) \times 100 = 0.15\% \quad \text{ejemplo de cálculo del error}$$

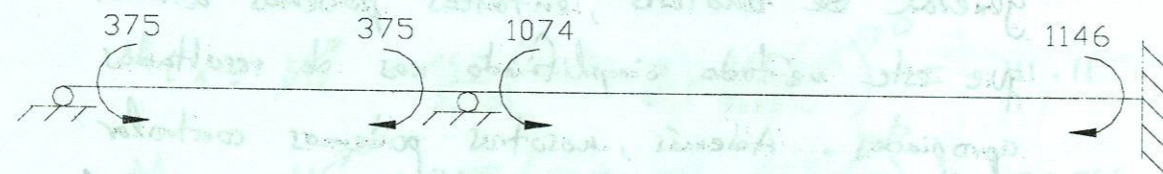
CONCLUSIÓN: Si aceptamos la validez del método general de análisis, entonces podemos afirmar que este método simplificado nos da resultados apropiados. Además, nosotros podemos controlar la magnitud del error a través del uso del número de decimales suficientes.

4.4.4 EJEMPLO ADICIONAL: Viga Continua de dos claros.

Análisis de la viga continua mostrada. Se obtienen las reacciones en los apoyos, y los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes.



Momentos de empotramiento:



$$r = \frac{4EI}{\frac{3}{4EI} + \frac{4EI}{3}} = 1.0 \quad r = \frac{4EI}{\frac{3}{4EI} + \frac{4EI}{5}} = 0.625 \quad r = \frac{4EI}{\frac{5}{4EI} + \frac{4EI}{5}} = 0.375 \quad r = \frac{2EI}{\frac{5}{4EI} + \frac{4EI}{5}} = 0.5$$

Análisis en forma tabular:



r	1.0	0.625	0.375	0.5
FEM	375	-375	1074	-1146
	-375	→ -187.5		
	-159.86	← -319.69	-191.81	→ -95.91
	159.86	→ 79.93		
	-24.98	← -49.96	-29.97	→ -14.99
	24.98	→ 12.49		
	-3.91	← -7.81	-4.69	→ -2.35
	3.91	→ 1.96		
	-0.615	← -1.23	-0.74	→ -0.37
	0.615	→ 0.31		
	-0.09	← -0.19	-0.12	→ -0.06
Σ	≈ 0	-846.69	846.67	-1259.68