

$$R_A = 4,031.4 \text{ Kg.}$$

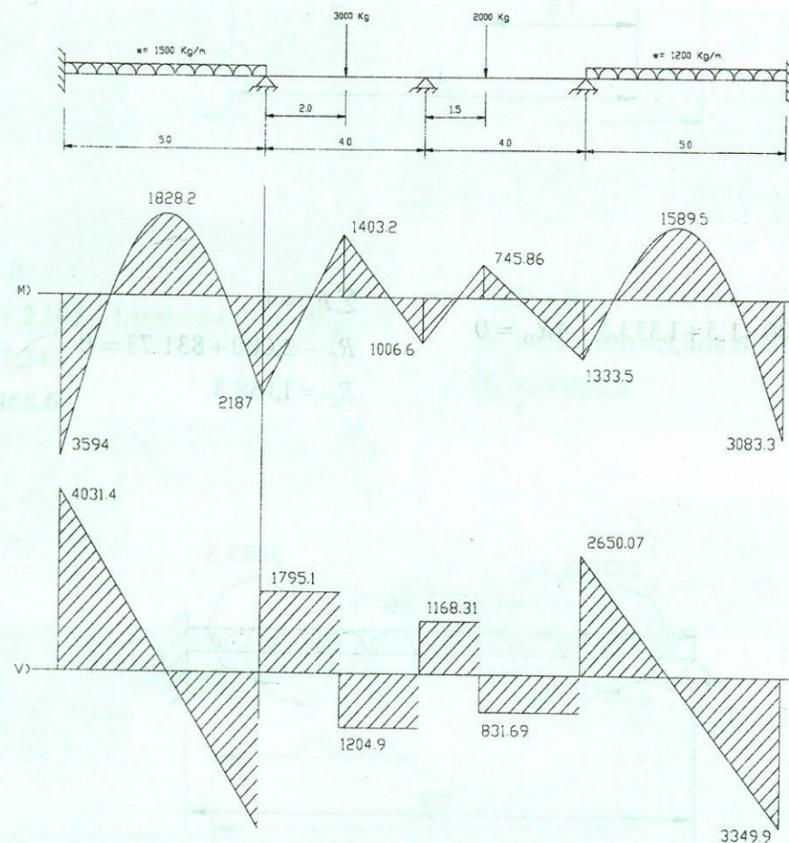
$$R_B = 3,468.6 + 1,795.1 = 5,263.7 \text{ Kg.}$$

$$R_C = 1,204.9 + 1,168.3 = 2,373.2 \text{ Kg.}$$

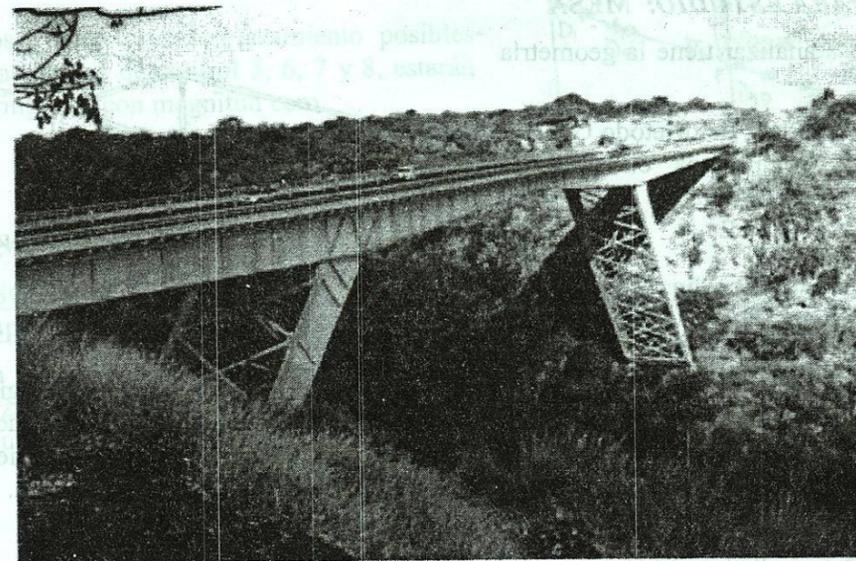
$$R_D = 831.73 + 2650.04 = 3,481.77 \text{ Kg.}$$

$$R_E = 3,349.96 \text{ Kg.}$$

Diagramas de corte y momentos:



## ESTRUCTURAS TIPO MARCO RÍGIDO EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL



### 5.0 INTRODUCCIÓN

Para facilitar el aprendizaje por parte del lector iniciamos la presentación del método general de rigideces con los casos de estructuras existentes en el hipotético espacio bidimensional, a pesar del hecho de que los seres humanos percibimos y vivimos el espacio tridimensional. Esta simplificación permitió entre otras cosas, trabajar con matrices de rigidez de barra de dimensiones bastante menores a las que hubiéramos tenido que manejar en el espacio tridimensional y en general tuvimos que manejar menos números.

Uno de los mayores problemas introducidos al modelar estructuras en el espacio bidimensional es que no se pueden simular efectos de torsión en las barras que forman la estructura ni tampoco en la estructura trabajando como un todo. Típicamente en el caso que se presenta cuando una estructura es sometida a la acción de un sismo.

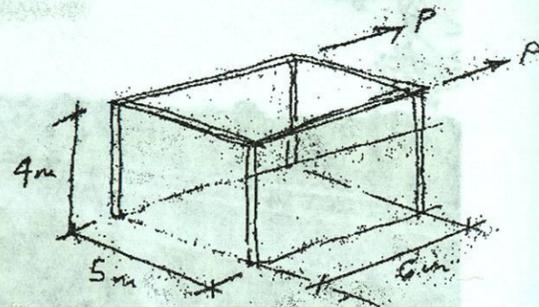
Otro problema importante que introdujimos fue el de tener que determinar cual es el "marco representativo" del comportamiento de la estructura completa, además de tener que calcular las fuerzas actuantes sobre este "marco típico". En el caso de naves industriales en que sus "marcos" están ligeramente acoplados, resulta menor el error introducido al modelar toda la estructura con un "marco representativo" en la dirección del marco. En estructuras con "marcos" fuertemente acoplados tales como los edificios de oficinas, este error se vuelve fuertemente significativo, tal como ha sido demostrado en diversos estudios realizados por investigadores del comportamiento de estructuras sometidas a acciones sísmicas.

En este capítulo se presenta la teoría completa sin la restricción artificial del espacio bidimensional.

**5.1 CASO PARA ESTUDIO: MESA**

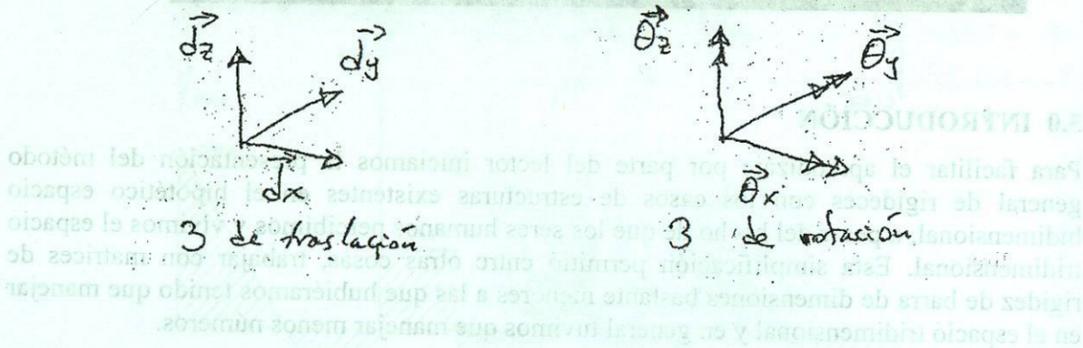
La estructura a analizar tiene la geometría indicada:

Si aplicamos las ideas del Método General de Rigideces, seguiremos el siguiente procedimiento para analizarla:

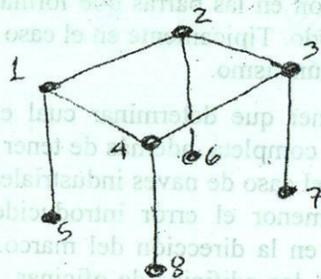


**PASO 1. Identificamos los grados de libertad**

Aquí nos encontramos la primera diferencia respecto a las estructuras tipo marco rígido en el espacio bidimensional. Antes necesitamos 3 vectores-desplazamiento (2 de traslación y uno de rotación) para definir el cambio de posición de un punto material cualquiera de nuestra estructura. Ahora necesitaremos 6 vectores-desplazamiento para el mismo fin.



Así, si definimos los puntos de control indicados, tendremos un total de:



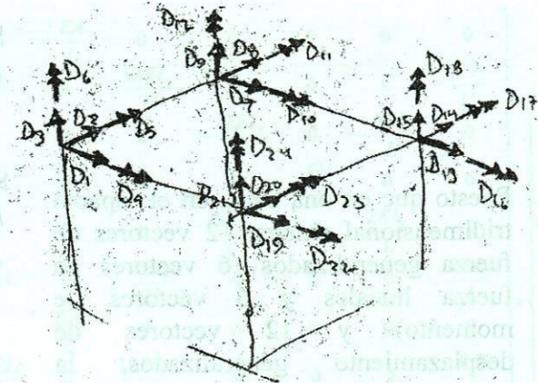
8 puntos X 6 vectores posibles = 48 vectores posibles

De estos 48 vectores, algunos deberán estar restringidos, de manera que el sistema sea estable.

Si la base de las cuatro columnas está empotrada, los grados de libertad serán:

24 grados de libertad

y los 24 vectores-desplazamiento posibles en los puntos de control 5, 6, 7 y 8, estarán restringidos, con magnitud cero.



**PASO 2. Formar las matrices de rigidez de barra para cada una de las 8 barras que componen la estructura.**

Para las barras en el espacio bidimensional, se encontró que la relación constitutiva entre fuerzas en los dos extremos de una barra y los desplazamientos en los mismos se puede calcular con la ecuación:

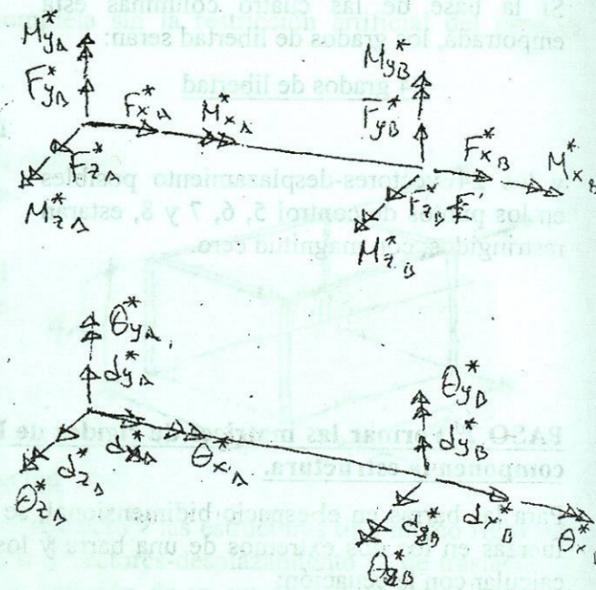
$$\begin{Bmatrix} Fx_A^* \\ Fy_A^* \\ Mz_A^* \\ Fx_B^* \\ Fy_B^* \\ Mz_B^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_A^* \\ dy_A^* \\ \Theta z_A^* \\ dx_B^* \\ dy_B^* \\ \Theta z_B^* \end{Bmatrix}$$

o, en notación compacta  $\Rightarrow F_b^* = k_b^* \cdot D_b^*$

Para las barras en el espacio tridimensional, esta ecuación es insuficiente, ya que no toma en cuenta a:  $dz_A, \Theta x_A, \Theta y_A, dz_B, \Theta x_B, \Theta y_B$ .

Así, deberemos encontrar una nueva relación constitutiva entre fuerzas y desplazamientos.

Puesto que en una barra en el espacio tridimensional existen 12 vectores de fuerza generalizados (6 vectores de fuerza lineales y 6 vectores de momento) y 12 vectores de desplazamiento generalizados, la nueva relación constitutiva se deberá expresar mediante una ecuación matricial del siguiente tipo:



$$\begin{bmatrix} Fx_A^* \\ Fy_A^* \\ Fz_A^* \\ Mx_A^* \\ My_A^* \\ Mz_A^* \\ Fx_B^* \\ Fy_B^* \\ Fz_B^* \\ Mx_B^* \\ My_B^* \\ Mz_B^* \end{bmatrix} = \begin{matrix} \text{Nueva Matriz De} \\ \text{Rigidez De Barra} \end{matrix} \cdot \begin{bmatrix} dx_A^* \\ dy_A^* \\ dz_A^* \\ \theta_{x_A}^* \\ \theta_{y_A}^* \\ \theta_{z_A}^* \\ dx_B^* \\ dy_B^* \\ dz_B^* \\ \theta_{x_B}^* \\ \theta_{y_B}^* \\ \theta_{z_B}^* \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez de barra contiene 144 elementos, de los cuales, 36 son los que ya conocemos para el caso de la matriz de rigidez de barra del espacio bidimensional.

La tarea siguiente es calcular los 108 elementos restantes. Siguiendo un procedimiento análogo al empleado al inicio del capítulo 4, se puede demostrar que la nueva matriz contiene los siguientes elementos:

$$\begin{bmatrix} Fx_A^* \\ Fy_A^* \\ Fz_A^* \\ Mx_A^* \\ My_A^* \\ Mz_A^* \\ Fx_B^* \\ Fy_B^* \\ Fz_B^* \\ Mx_B^* \\ My_B^* \\ Mz_B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_A^* \\ dy_A^* \\ dz_A^* \\ \theta_{x_A}^* \\ \theta_{y_A}^* \\ \theta_{z_A}^* \\ dx_B^* \\ dy_B^* \\ dz_B^* \\ \theta_{x_B}^* \\ \theta_{y_B}^* \\ \theta_{z_B}^* \end{bmatrix}$$

Usando la relación constitutiva para barras en el espacio tridimensional, manejaremos la siguiente ecuación para cada barra:

$$F_{b12 \times 1}^* = k_{b12 \times 12}^* \cdot D_{b12 \times 1}^*$$

Así, calculamos 8 ecuaciones matriciales, una por cada barra que compone la estructura estudiada.

**PASO 3. Ensamble de las rigideces de cada barra para formar la matriz de rigidez ensamblada.**

Análogamente al espacio bidimensional, en general, necesitamos transformar los vectores de fuerza y desplazamiento a un sistema común de referencia para así poder sumar directamente los vectores de cada una de las 8 barras.

Manejaremos el concepto de matriz "A" de transformación, el cual nos permitirá "transformar" el vector de desplazamientos generalizado, de su representación en coordenadas globales a locales de la barra:

$$\vec{D} = dx \cdot i + dy \cdot j + dz \cdot k \Rightarrow \vec{D} = dx^* \cdot u + dy^* \cdot v + dz^* \cdot w$$

