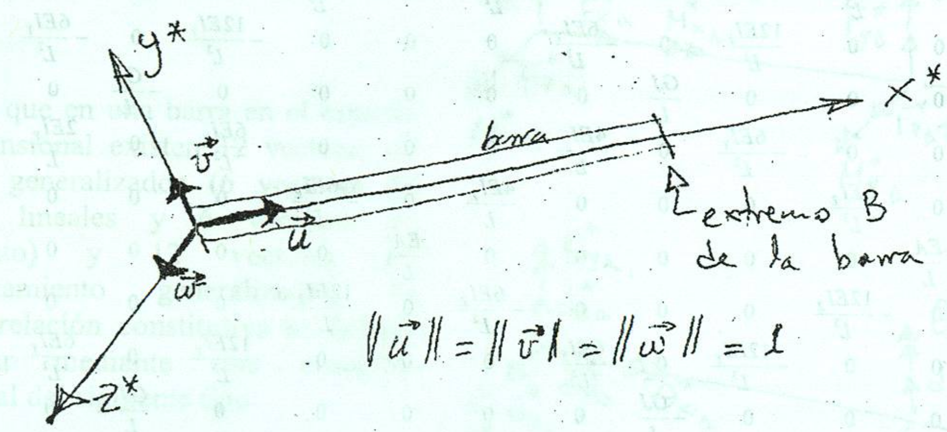
Para realizar esta operación, primero definiremos un sistema de 3 vectores ortogonales unitarios, alineados con los ejes de coordenadas locales de cada barra:



El vector $\vec{u}$ es el vector $\vec{b}$ unitario de barra que definimos en el capítulo 3 para las armaduras en el espacio tridimensional:

$$\vec{u} = \vec{b} = \frac{\Delta x}{L}\cdot i + \frac{\Delta y}{L}\cdot j + \frac{\Delta z}{L}\cdot k$$

el vector $\vec{w}$ se obtiene fácilmente, realizando el producto cruz:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$$

Así, el verdadero problema es encontrar el vector $\vec{v}$.

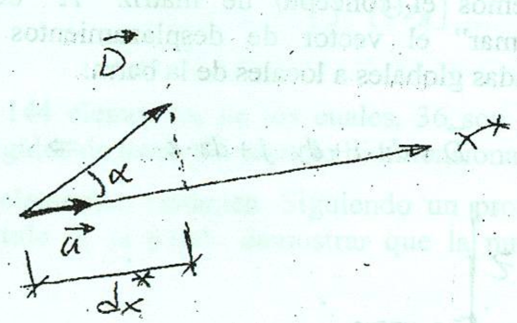
Por lo pronto, dejaremos pendiente este problema, y supondremos que lo podemos calcular.

Ahora, podemos realizar la transformación del vector $\vec{D}$ de la siguiente forma (este mismo camino seguimos en el capítulo 3):

La componente de $\vec{D}$ sobre el eje local x^* es:

$$dx^* = \vec{u}\cdot\vec{D}$$

$$si \quad \left\|\vec{u}\right\| = 1$$



entonces:

$$dx^* = \left\|\vec{u}\right\|\cdot\left\|\vec{D}\right\|\cdot\cos\alpha$$

$$¡\quad dx^* = \left\|\vec{D}\right\|\cdot\cos\alpha \quad !$$

las otras dos componentes son:

$$dy^* = \vec{v}\cdot\vec{D}$$

$$dz^* = \vec{w}\cdot\vec{D}$$

En notación matricial:

$$\begin{Bmatrix} dx^* \\ dy^* \\ dz^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} \qquad (\textit{en notación compacta}) \quad \Rightarrow \quad \vec{D^*} = \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix} \cdot \vec{D}$$

$$o \quad D^* = A \cdot D$$

$$donde \quad A = \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix}$$

así, una vez conocidos los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, la transformación de vectores desplazamiento es inmediata.

Considerando que la barra tiene dos extremos y en cada uno tiene 3 vectores de desplazamiento de traslación y 3 vectores de rotación, podemos definir la siguiente relación:

$$\begin{Bmatrix} dx_A^* \\ dy_A^* \\ dz_A^* \\ \Theta x_A^* \\ \Theta y_A^* \\ \Theta z_A^* \\ dx_B^* \\ dy_B^* \\ dz_B^* \\ \Theta x_B^* \\ \Theta y_B^* \\ \Theta z_B^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{u} & 0 & 0 & 0 \\ \vec{v} & 0 & 0 & 0 \\ \vec{w} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vec{u} & 0 & 0 \\ 0 & \vec{v} & 0 & 0 \\ 0 & \vec{w} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vec{u} & 0 \\ 0 & 0 & \vec{v} & 0 \\ 0 & 0 & \vec{w} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vec{u} \\ 0 & 0 & 0 & \vec{v} \\ 0 & 0 & 0 & \vec{w} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_A \\ dy_A \\ dz_A \\ \Theta x_A \\ \Theta y_A \\ \Theta z_A \\ dx_B \\ dy_B \\ dz_B \\ \Theta x_B \\ \Theta y_B \\ \Theta z_B \end{Bmatrix}$$

de manera compacta: $D_b^* = A_b \cdot D_b$

donde: D_b^* = desplazamientos de los extremos de la barra, en coordenadas locales .

D_b = desplazamientos de los extremos de la barra, en coordenadas globales .

Se puede demostrar que:

$$F_b = A_b^T \cdot F_b^*$$

Finalmente podemos expresar la oposición que ofrece cada barra a ser deformada, componentes de fuerza referidas a un mismo sistema de referencia, el sistema x, y, z de ejes de coordenadas globales.

Para una barra cualquiera, sustituyendo $F_b^* = k_b^* \cdot D^*$ y $D^* = A_b \cdot D_b$ en la ecuación anterior, resulta:

$$F_b = \left[A_b^T \cdot k_b^* \cdot A_b\right] \cdot D_b$$

si denominamos a $k_b = A_b^T \cdot k_b^* \cdot A_b$ como la matriz de rigidez global de la barra, entonces:

$$F_b = k_b \cdot D_b$$

ecuación que define a un conjunto de 12 vectores de fuerza paralelos a los ejes globales x, y, z.

Ahora estamos listos para formar la matriz de rigidez ensamblada, sumando las *oposiciones* de todas las barras, calculadas con la ecuación anterior.

PASO 4. Cálculo de la magnitud de los grados de libertad.

A partir de aquí, se sigue el mismo procedimiento para manipular la ecuación matricial resultante del ensamble del paso anterior.

Así obtendremos: $F_U = K_{11U} \cdot D_U + K_{12R} \cdot D_R$,

de donde podremos calcular: $D_U = K_{11U}^{-1}(F_U - K_{12R} \cdot D_R)$,

conocido D_U, se podrán calcular las reacciones mediante la ecuación:

$$F_R = K_{21U} \cdot D_U + K_{22R} \cdot D_R$$

PASO 5. Cálculo de las fuerzas en los extremos de cada una de las barras.

Las fuerzas en los 2 extremos de cada barra, se podrá calcular a partir de la ecuación:

$$F_b^* = k_b^* \cdot D_b^* = k_b^* \cdot A_b \cdot D_b$$

Donde los componentes del vector D_b se obtienen directamente del vector D_U, calculado en el paso anterior.

Obtención de vectores unitarios $\vec{v}$ y $\vec{w}$

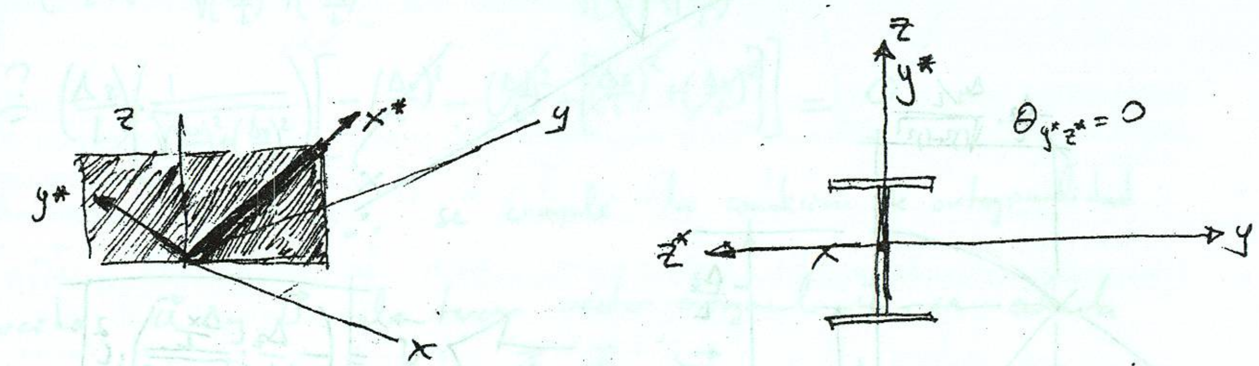
Antes de aplicar el procedimiento descrito, terminaremos el asunto pendiente del cálculo de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

Los componentes del vector $\vec{v}$ están determinados por el giro de la barra alrededor de su eje longitudinal, X^*, respecto a algún origen convencional.

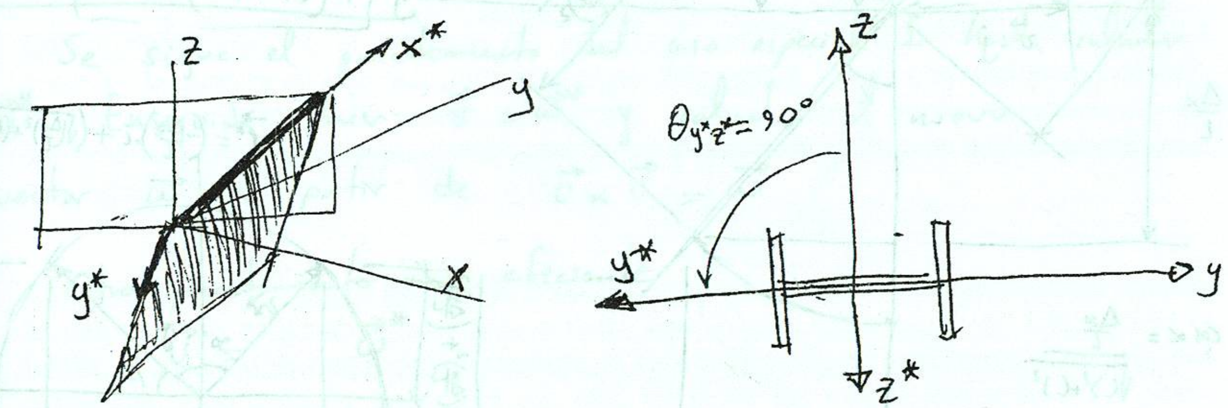
Cálculo del vector $\vec{v}$

Se calculará el vector $\vec{v}$ para dos casos especiales:

1. Ejes X^*-Y^* están contenidos en un plano perpendicular a ejes X-Y globales.



2. Ejes X^*-Y^* están contenidos en un plano perpendicular al plano descrito en el caso 1.



Enseguida se analiza el caso especial 1.

Donde los componentes del vector D_r se obtienen directamente del vector D_r, calculado en el paso anterior.

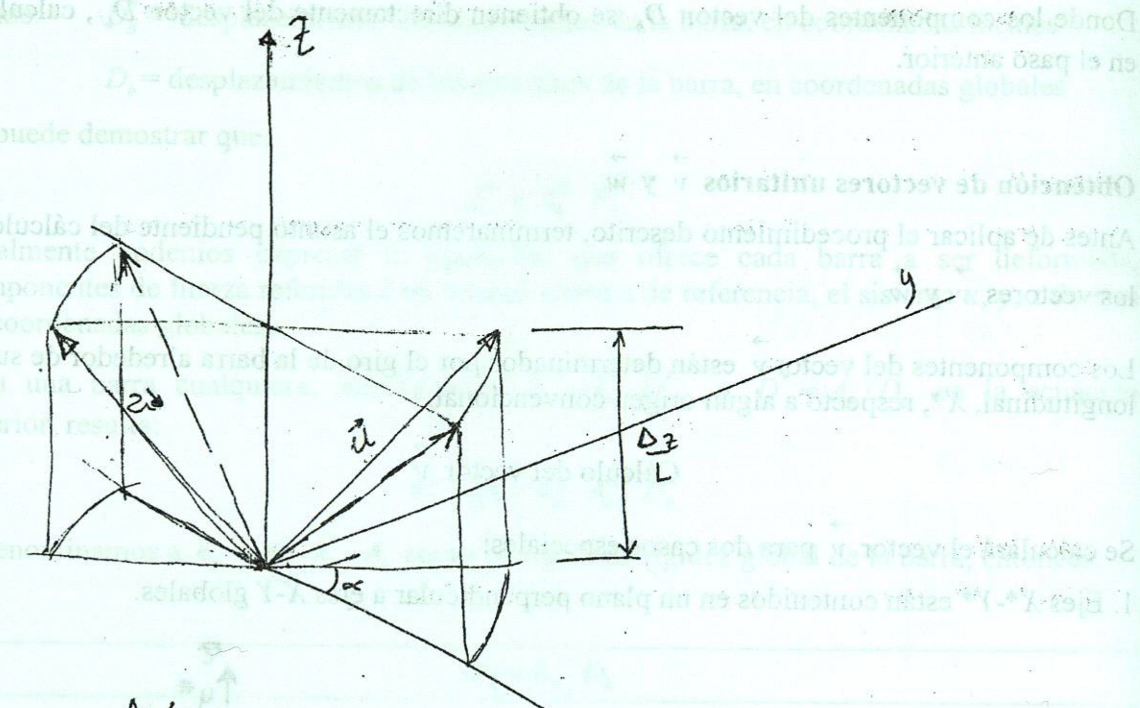
Obtención de vectores unitarios $\vec v$ y $\vec w$

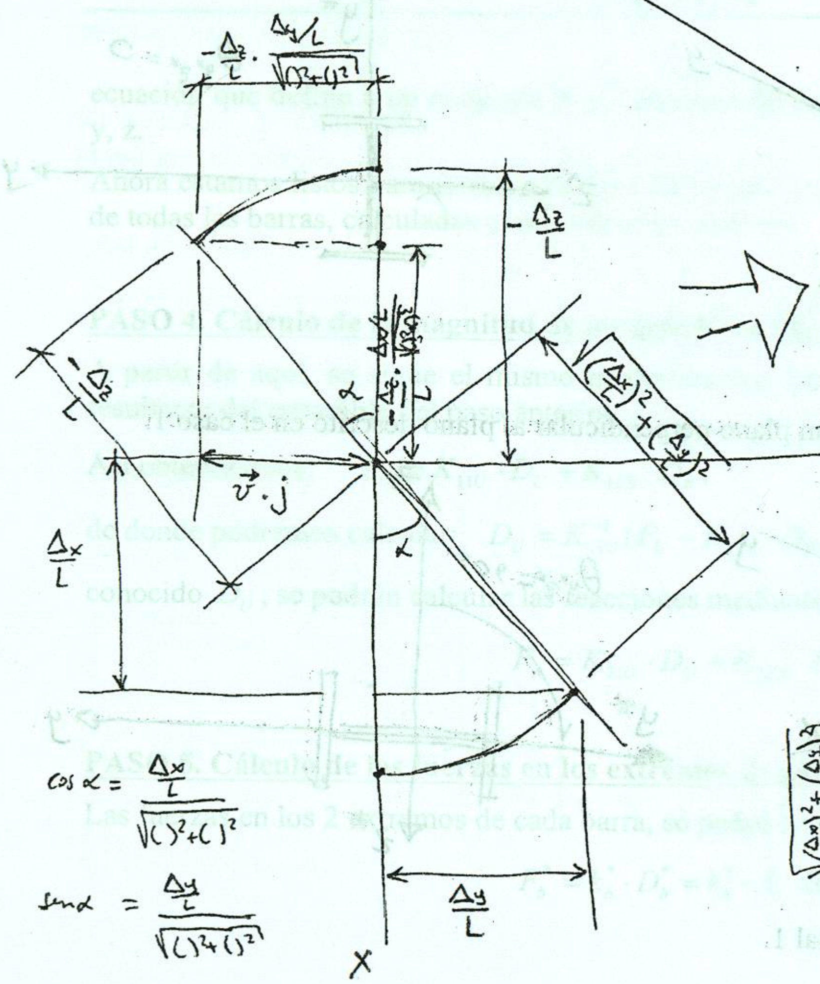
Antes de aplicar el procedimiento descrito, terminaremos el asunto pendiente del cálculo de los vectores $\vec v$ y $\vec w$.

Las componentes del vector $\vec v$, están determinadas por el giro de la barra alrededor de su eje longitudinal, X^*, respecto a alguna convención.

Se estudian el vector $\vec v$, para dos casos especiales:

1. Ejes X^*-Y^* están contenidos en un plano perpendicular al plano X-Y globales.



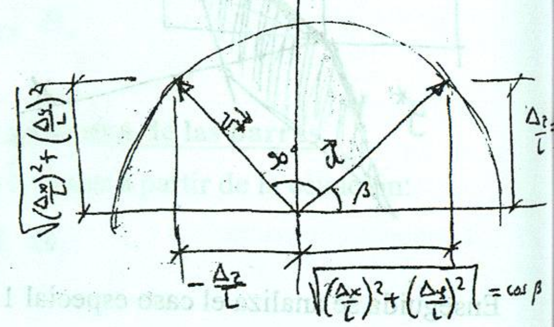


$$\Rightarrow \vec v = \boxed{\left(-\frac{\Delta z}{L}\cdot\frac{\frac{\Delta x}{L}}{\sqrt{()^2+()^2}}\right)\cdot i + \left(-\frac{\Delta z}{L}\cdot\frac{\Delta y/L}{\sqrt{()^2+()^2}}\right)\cdot j + \left(\sqrt{()^2+()^2}\right)\cdot k}$$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\Delta x}{L}}{\sqrt{()^2+()^2}}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\frac{\Delta y}{L}}{\sqrt{()^2+()^2}}$$

2. Ejes X^*-Y^* contenidos en un plano vertical.



$$\vec v^* = \left(-\frac{\Delta z}{L}\right)\cdot i + \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{L}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{L}\right)^2}\cdot k$$

$$-\frac{\Delta z}{L} \qquad \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{L}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{L}\right)^2} = \cos\beta$$

Enseguida se analiza el caso especial 1.

condición especial: barra es colineal con eje Z •

$$\Rightarrow \vec v = -1\cdot i + 0\cdot j + 0\cdot k$$

Prueba de ortogonalidad entre $\vec u$ y $\vec v$

$\vec u \cdot \vec v = 0 \iff$ son ortogonales

$$\vec u\cdot\vec v = \left(\frac{\Delta x}{L}\, i + \frac{\Delta y}{L}\, j + \frac{\Delta z}{L}\, k\right)\cdot\left(-\frac{\Delta z}{L}\,\frac{\Delta x/L}{\sqrt{(\frac{\Delta x}{L})^2+(\frac{\Delta y}{L})^2}}\cdot i - \frac{\Delta z}{L}\,\frac{\Delta y/L}{\sqrt{\quad}}\cdot j + \sqrt{\quad}\cdot k\right)$$

$$0 \stackrel{?}{=} -\left(\frac{\Delta z}{L}\right)\left(\frac{\Delta x}{L}\right)^2\frac{1}{\sqrt{(\frac{\Delta x}{L})^2+(\frac{\Delta y}{L})^2}} - \left(\frac{\Delta z}{L}\right)\left(\frac{\Delta y}{L}\right)^2\frac{1}{\sqrt{(\frac{\Delta x}{L})^2+(\frac{\Delta y}{L})^2}} + \left(\frac{\Delta z}{L}\right)\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{L}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{L}\right)^2}$$

$$0 \stackrel{?}{=} \left(\frac{\Delta z}{L}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{(\frac{\Delta x}{L})^2+(\frac{\Delta y}{L})^2}}\right)\left[-\cancel{\left(\frac{\Delta x}{L}\right)^2} - \cancel{\left(\frac{\Delta y}{L}\right)^2} + \left[\cancel{\left(\frac{\Delta x}{L}\right)^2} + \cancel{\left(\frac{\Delta y}{L}\right)^2}\right]\right] = 0$$

∴ se cumple la condición de ortogonalidad

Conocidos $\vec u$ y $\vec v$ el tercer vector ortogonal, $\vec w$, se calcula a través del producto cruz: $\vec u \times \vec v = \vec w$

CASO ESPECIAL 2

Se sigue el procedimiento del caso especial 1 hasta calcular $\vec w^*$. Enseguida hacer $\vec v = \vec w^*$ y calcular el nuevo vector $\vec w$ a partir de $\vec u \times \vec v = \vec w$

Otro procedimiento mas eficiente

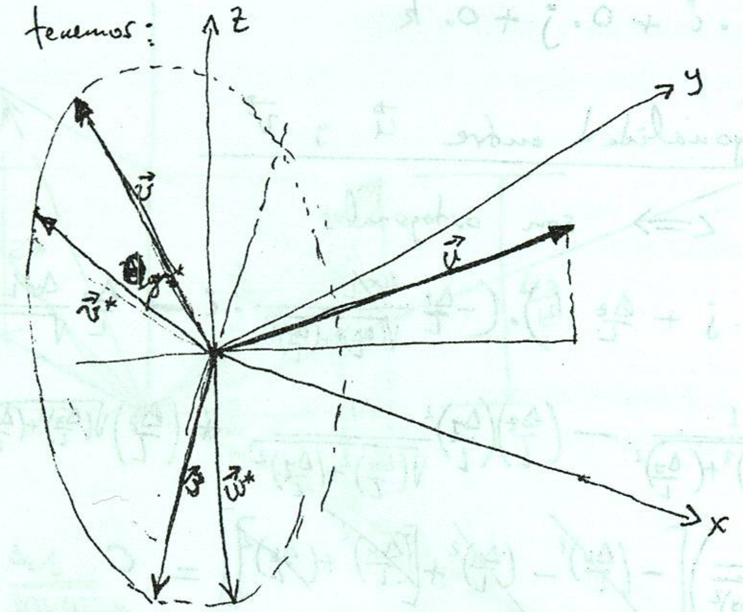
$$\vec v = \vec w^*$$

$$\vec w = -\vec v^*$$

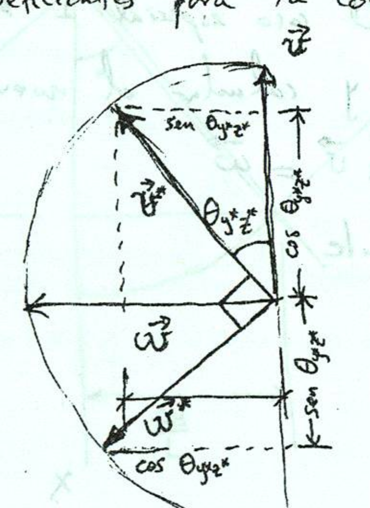
CASO GENERAL DE GIRO $\theta_{yz^*} \neq 0°$ y $\theta_{yz^*} \neq 90°$

Primero calculamos $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ considerando que $\theta_{yz^*} = 0$

así tenemos:



Ahora rotamos los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ el ángulo θ_{yz} especificado para la barra. De esta rotación surgen los vectores $\vec{v}^*$ y $\vec{w}^*$. Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ definen un subespacio en el que tienen que estar contenidos los vectores $\vec{v}^*$ y $\vec{w}^*$, así que estos se pueden calcular mediante una combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Los coeficientes para la combinación se calculan así:



$$\vec{v}^* = \cos\theta \cdot \vec{v} + \operatorname{sen}\theta \cdot \vec{w}$$

$$\vec{w}^* = -\operatorname{sen}\theta \cdot \vec{v} + \cos\theta \cdot \vec{w}$$

GLOSARIO DE TERMINOS TECNICOS

Acción (ver reacción): Se le llama así al fenómeno físico que ocurre cuando interactúan dos cuerpos. Esta interacción puede ser del tipo gravitatorio, inercial, electromagnético.

Ejemplo de acciones gravitatorias es la "atracción" de los cuerpos hacia el centro de gravedad de nuestro planeta.

Ejemplo de acción inercial puede ser la acción del viento (masas de aire en movimiento) sobre la superficie expuesta de los edificios.

Barra: Elemento estructural en que una de sus tres dimensiones es 5 veces mayor que cualquiera de las otras dos. La barra puede ser recta o curva, prismática o no prismática. Durante los cursos previos de mecánica de materiales se ha estudiado intensamente este tipo de elementos, demostrándose la validez de modelos matemáticos que permiten cuantificar las deformaciones y esfuerzos que se originan en el, o los, materiales que la componen cuando es sometida a la acción de diversos tipos de fuerzas.

Barra recta: Barra en que su dimensión mayor es rectilínea. En éste curso analizaremos únicamente barras rectas, aunque debe notarse que la teoría presentada es aplicable a barras no rectas.

Barra recta Prismática: Barra recta en que sus dos dimensiones menores son constantes a lo largo de su dimensión mayor, es decir, su sección transversal no cambia de tamaño.

Barra recta No prismática: Barra recta en que una o sus dos dimensiones menores varían a lo largo de su dimensión mayor, es decir, su sección transversal es variable.

Comportamiento: En el contexto del análisis estructural, se utiliza este término para describir la manera en que reacciona un cuerpo deformable, hecho con cualquier material, cuando es sometido a la acción de fuerzas. Ejemplo: es el modo característico de deformarse y agrietarse de un material tal como el concreto cuando se utiliza para formar una viga en flexión.

Comportamiento elástico lineal: Es el *comportamiento* observado en un material cuando la deformación es directamente proporcional a la fuerza aplicada, y, al desaparecer la fuerza, el material recupera completamente su forma original, sin deformación permanente o residual. Para algunos materiales son casi idénticos los valores numéricos del límite elástico y del límite de proporcionalidad, por lo que a veces son considerados sinónimos.