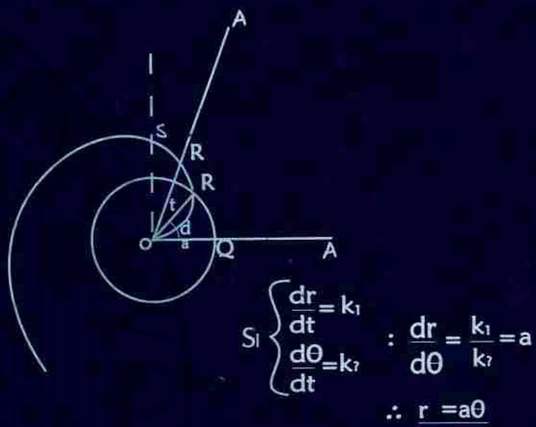
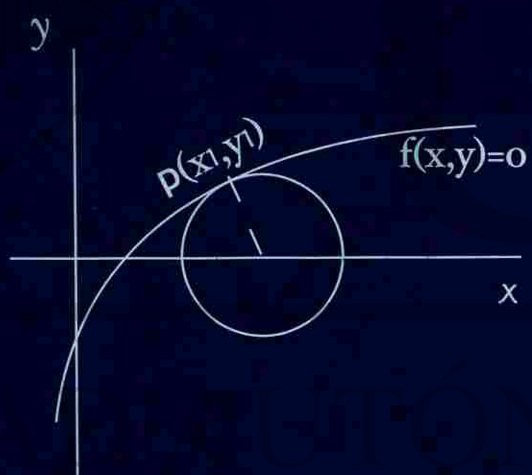
APUNTES PARA EL CURSO

HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS



ARQUÍMEDES



R. DESCARTES

ING. ELADIO SÁENZ QUIROGA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
U.A.N.L.

HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

Rep

APUNTES PARA EL CURSO

HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

ING. ELADIO SÁENZ QUIROGA

FAC. DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

2005

ÍNDICE.

PRÓLOGO.

El propósito de estos apuntes es proporcionar a los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, un texto que les sirva de base para un curso semestral de Historia de las Matemáticas. Al final de cada uno de los capítulos, se incluyen ejercicios que les permitirán revisar sus conocimientos de las matemáticas elementales, así como ubicarse en las diferentes etapas del desarrollo histórico de esta ciencia. Espero que estas notas sean también de utilidad para todos los maestros de matemáticas y para los profesionistas que se interesan en esta ciencia.

Conocer el origen de las matemáticas, a través de los registros escritos de las primeras civilizaciones y su evolución histórica hasta el siglo 20, es de interés para todos los que matematizamos en nuestra actividad diaria.

El origen del hombre se remonta a 3 millones de años. En 1980 fue entregado al museo de Addis Abeba, Etiopía, el esqueleto de una mujer, a quien llamaron Lucy y que vivió hace unos 3 millones de años. Esta edad fue determinada por técnicas recientes de medición sobre las capas de rocas donde se encuentra el fósil:

A) La técnica del potasio 40 radioactivo contenido en los minerales de las rocas, que liberan gas Argón en forma constante a través del tiempo.

B) La técnica del Uranio 238 radio activo que libera plomo y Zircón constante.

El Zinjantropus (el *casi hombre*) de Tangañica, África, que vivió hace 1´750,000 años, de acuerdo con la técnica del carbono C_{14}. El hombre y otros seres, contienen C_{14} en su organismo y lo intercambian por aire mediante la respiración. El carbono C_{14} se distingue del carbono ordinario C_{12} por tener mayor número de electrones y protones en su núcleo y por ser radiactivo. El radio - carbono que se pierde al respirar, se recupera de la atmósfera, de manera que permanece constante hasta que el organismo muere. Se ha comprobado que los restos orgánicos pierden la mitad de su C_{14} cada 5600 años. Entonces, midiendo la radiactividad de los restos orgánicos que se han encontrado en buen estado de conservación, se puede determinar su edad como **n** veces 5 600, si la radiactividad es $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ de la normal en el organismo vivo.

Si r = Radio actividad del organismo vivo

r_t = Radioactividad del fósil

t = Edad del fósil

$\therefore\ r_t = (½)^n\, r$

$t = 5\,600\, n$

Por ejemplo, si $r_t = 0.125\, r$, la edad del fósil se determina de la siguiente manera:

$$r_t = 0.125 \qquad r_t = (1/2)^n\, r$$

$\therefore \quad (1/2)^n = r_t / r = 0.125$

$n \ln 0.5 = \ln 0.125$

$n = (-2.0793 / -0.6931) = 3$

$\therefore \quad t = 3(5{,}600) = 16{,}800$ **Años**

Además del Zinjantropus, se menciona al Australopiteco y posteriormente al Pitecantropus Erectus de Java y el Sinantropus de Pekín que vivieron en las zonas tropicales hace casi un millón de años. Más adelante encontramos al hombre de Heidelberg, el de Neanderthal y finalmente al de Cromagnon llamado Homo Sapiens, que aparece hace unos 40,000 años. En América, la presencia más antigua del hombre se remota a unos 10,000 años.

El Homo Sapiens empieza a dejar registros escritos hace unos 7000 años en Babilonia y Egipto, de manera que para estudiar la historia de las matemáticas, empezaremos con las manifestaciones escritas de estas civilizaciones de la Edad de Bronce (90% Cu y 10% Sn). Para seguir la evolución histórica de las matemáticas se utilizan los escritos disponibles, ubicados geográfica y cronológicamente con el apoyo de otras ciencias auxiliares.

La primera civilización que formaliza las matemáticas es la de los Griegos (600 - 300 A. C.) quienes ya cuentan con el alfabeto inventado hacia el 800 A. C., que permite poner orden en la comunicación oral y escrita. La posibilidad de expresarse con claridad, permite pensar con claridad y así surgen las escuelas de filosofía con un notable desarrollo de las matemáticas y del conocimiento en general.

Después de los griegos, se presenta un período oscuro que empieza a manifestarse durante el Imperio Romano y se extiende a través del Imperio Árabe hasta el siglo XIII, cuando se fundan las primeras universidades europeas que propician el renacimiento de los siglos XVI y XVII. En el siglo XVI se desarrolla el Álgebra Simbólica y en el siglo XVII se formalizan la Geometría Analítica, el Cálculo y la metodología de la Ciencia, que reafirman a las matemáticas como el fundamento de todas las ciencias.

Durante el siglo XVIII, se utilizan ampliamente las poderosas herramientas del Álgebra, Geometría Analítica y Cálculo y en el siglo XIX se liberan estas matemáticas fundamentales, dando paso al Álgebra Abstracta, las Geometrías no-Euclidianas, el Análisis Matemático, las Álgebras Lineales, la Lógica Matemática, la Teoría de Conjuntos, la Aritmética Transfinita y otras ramas de las matemáticas que continúan desarrollándose en el siglo XX.

En el siglo XX, nace la Topología y la Computación Electrónica que propician la proliferación de una gran diversidad de campos de investigación en matemáticas y en todas las demás ciencias.

Los eventos y personajes que, a mi juicio, son más relevantes en este proceso histórico de las matemáticas, se presentan en 10 capítulos que pueden ser cubiertos en un curso semestral de 15 ó 16 semanas.

La realización de estos apuntes se ha logrado gracias al apoyo que he recibido de las autoridades de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, de mis compañeros maestros y de mis ex-alumnos, que me han alentado en mi trabajo. En particular, al Lic. e Ing. Raúl Montemayor, al Lic. Israel Garza y al Ing. y Lic. Rafael Serna (+), les expreso mi agradecimiento por mi reincorporación al cuerpo docente de la Facultad y por su confianza en mis actividades académicas. Además, expreso mi agradecimiento a las secretarias María A. Garza y Guadalupe E. Martínez y a las estudiantes de computación Ana Lucía Guerrero y Laura Marcela Cantú, por su paciente labor de copiado e impresión. Para esta Edición 2003, extiendo mi agradecimiento a la maestra Carmen del Rosario de la Fuente García, actual Directora de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, al Ing. Oscar Recio Cantú, ex-director y actualizador de los disquetes al equipo actual, a la secretaria Alma Nora Vielma Fuentes y a la C. P. Sofía Herminia de la Paz Zúñiga, por su apoyo en la elaboración del texto 2005.

Por último expreso mi reconocimiento a los autores de los siguientes libros, que me han ilustrado para la realización de esta obra.

1. Howard Eves: An Introduction to the History of Mathematics. Holt, Rinehart, Winston.
2. James R. Newman: The World of Mathematics. (4 volúmenes, 6 en español) Simon and Schuster.
3. E. T. Bell: Men of Mathematics. Simon and Schuster.
4. J. E. Hofmann: Historia de las Matemáticas. (3 volúmenes). U.T.H.E.A. Máxico.
5. W. C. Dampier: Historia de la Ciencia, y su relación con la Filosofía y la Religión. Editorial Tecnos. Madrid,
6. N. Bourbaki: Elementos de Historia de las Matemáticas. Alianza Editorial (Madrid).
7. T. K. Dewey y T. I. Williams: Historia de la Tecnología. (3 volúmenes) Siglo XXI. México.
8. A. Sestier: Historia de las Matemáticas. Editorial Limusa.
9. K. Ribnikov: Historia de las Matemáticas Editorial Mir, Moscu
10. Mariano Perero: Historia e Historias de Matemáticas Editorial Iberoamerica. México

CAPÍTULO 1

ORIGEN DE LAS MATEMÁTICAS. SISTEMAS DE NÚMEROS.

1.1 INTRODUCCIÓN.

Para estudiar la evolución histórica de las Matemáticas, consideramos un marco de referencia, constituido por el tiempo y el espacio. El espacio es el mundo en que vivimos y el tiempo es desde alrededor del 4 000 A. C., hasta nuestros días, unos 6 000 años. Principalmente seguiremos la trayectoria de la civilización que hemos heredado, es decir, empezaremos en Medio Oriente con Babilonia y Egipto, después Europa, que inicia con los Griegos, la Edad Media, el Renacimiento y la transición al siglo XX.

Dentro de este marco de referencia, la fuente principal de información son los registros escritos que a su vez han sido una de las fuerzas más poderosas de desarrollo científico, complementado en las últimas décadas con registros orales y visuales que han propiciado el extraordinario avance de la época actual. Sin embargo, antes del presente siglo, los medios de comunicación evolucionaron muy lentamente: El alfabeto, que permite la comunicación oral y escrita ordenada, se inventó alrededor del año 850 A. C., la imprenta de caracteres móviles fue inventada hace poco más de 500 años y la producción industrial de papel se inició a partir de la segunda mitad del siglo pasado.

1.2 PRINCIPALES CIVILIZACIONES ANTIGUAS.

Las siguientes son las civilizaciones del medio oriente más antiguas que nos proporcionan fuentes de información, a través de registros escritos:

A) BABILONIA. Empieza alrededor del año 4 500 A. C., en la región de la Mesopotamia, entre los ríos Tigris y Éufrates en el suroeste de Asia y actualmente corresponde a los países Irán, Irak y Kwait.

B) EGIPTO. Empieza alrededor del año 4 000 A. C., a lo largo del río Nilo, en el noreste de África.

Las otras civilizaciones importantes del Oriente antiguo con escasas fuentes de información son:

C) INDIA. Entre los ríos Indo y Ganges, en el sur centro de Asia.

D) CHINA. Entre los ríos Hoang-Ho (Rio Amarillo) y el Yang-Tse-Kiang, en el oriente de Asia. Las fuentes originales de esta civilización se perdieron cuando el Emperador Shi – Huang - Ti (213 A. C.) ordenó que se quemaran todos los libros para iniciar una nueva civilización que les permitiera defenderse de los ataques y saqueos de los Bárbaros.

1.3 HIPÓTESIS SOBRE EL INICIO DE LAS MATEMÁTICAS.

La hipótesis más aceptada, establece que las matemáticas surgieron de las necesidades prácticas de desarrollo de las sociedades primitivas, la organización de la agricultura, control de siembras y ríos, sistemas de riego, construcciones y comercio. Otra hipótesis atribuye el origen de las Matemáticas a través de revelaciones místicas y rituales religiosos, pero esto es poco aceptado en el medio científico, donde se considera que el hombre inteligente busca los recursos necesarios para enfrentar el medio que lo rodea físicamente, socialmente, políticamente, etc.

Las fuentes de información más antiguas son las tabletas de arcilla cocida de los Babilonios y los papiros de Egipto. Las cortezas de árbol y bambú de China y la India son casi ininteligibles por la destrucción del tiempo.

1.4 CONTEO PRIMITIVO.

Una hipótesis sobre el origen del conteo primitivo, se basa en la observación de tribus que conservan la forma de vida y organización social de hace miles de años, así como en el estudio de la característica natural del hombre de empezar a contar antes que aprender a escribir y aún antes de empezar a hablar y de algunas especies de animales en los que se ha encontrado evidencia experimental de que pueden "contar" pequeños conjuntos impulsados por instintos naturales que se manifiestan ante situaciones especiales. Por ejemplo, una tribu de pigmeos africanos emite un sonido parecido a la letra o para identificar un conjunto de un elemento; para un conjunto de 2 objetos dicen oa, para el 4 oa-oa, etc., asociando correspondencias uno a uno entre estos sonidos y los objetos.

Un ejemplo de un animal que " cuenta" es el del cuervo que ha sido sometido al siguiente experimento para cazarlo: se construye una caseta en el centro del huerto que frecuenta un cuervo y estando el cuervo en el huerto, se dirigen hasta la caseta para ocultarse en ella el cazador y otra persona. El cuervo se retira, observando la caseta a distancia prudente. Se retira una persona de la caseta y el cuervo permanece alejado hasta que se retira la segunda persona. Este experimento se repite con 3 y 4 personas y el cuervo no se acerca al huerto hasta que ha salido la última persona. Al realizar el experimento con 5 ó más personas, el cuervo pierde la cuenta y se acerca cuando todavía hay alguna persona dentro de la caseta.

Estos ejemplos nos hacen pensar que posiblemente el conteo se inicia por medio de correspondencia uno a uno entre objetos y las manos o los dedos de las manos. Posteriormente, al presentarse la necesidad de contar conjuntos grandes, el conteo se sistematiza, agrupando de diferentes formas en unidades de medida relacionadas con una base que en la mayoría de los casos es 10, esto es, el número de dedos de las manos. De acuerdo con esta hipótesis, los sistemas de numeración tienen su origen hace unos 6 000 años, cuando el hombre empieza a agruparse para formar las primeras sociedades, con una organización en la que se distribuye el trabajo para la obtención de alimento, habitación y vestido, lo cual le impone la necesidad de contar y medir sistemáticamente.

Empieza a marcar las paredes y árboles y a utilizar piedras y palitos para contar objetos, personas, ganado, etc., y a medir sus terrenos y construcciones, de esta manera se inician las Matemáticas con los sistemas de conteo y las técnicas de medición que dan lugar a una "Aritmética" y una "Geometría" intuitivas que se hacen demostrativas a partir del período griego alrededor del año 600 A. C. Con el avance de las organizaciones sociales aparecen diferentes sistemas de números en diferentes lugares del mundo, siendo evidente la importancia que el hombre concede a este asunto para su organización en sociedad.

Hay otra hipótesis que considera que los sistemas de números tuvieron su origen en meditaciones profundas y revelaciones místicas transmitidas durante ritos religiosos, pero esto tiene poca aceptación en el medio científico ya que se considera más razonable que el hombre haya inventado los sistemas de numeración, impulsado por las necesidades naturales y de organización.

1.5 SISTEMAS DE NÚMEROS.

Todos los sistemas de numeración que se han ideado en diferentes lugares y en diferentes épocas tienen un símbolo para la unidad simple 1 y una base b, cuyas potencias: 1, b, b2, b3,.....b",..., son unidades de agrupación de orden 0, 1, 2,......, n,....., que permiten expresar los números en forma

sintetizada por medio de símbolos llamados numerales. Ejemplos de bases que se han utilizado para sistemas de números:

BASE 2 Pigmeos nómadas africanos hasta la actualidad.

BASE 3 Y 4 Tribus de Sudamérica.

BASE 5 Campesinos alemanes hasta 1 800.
Tribus sudamericanas hasta la fecha.

BASE 10
A) Sistemas de jeroglíficos egipcios, 3 400 A. C.
B) Sistema Chino científico, 2 000 A. C.
C) Sistema Hindú-arábigo, 250 A. C.

BASE 12 Desde la prehistoria hasta la fecha para contar meses del año, cantidades por docenas y gruesas, medidas por pies y pulgadas, el tiempo por horas, Parece ser que esta base fue motivada por el número de lunaciones completas de un año.

BASE 20 Sistema Maya, conocido en el siglo XVI en Europa, empezó a usarse antes de la era cristiana y el cero aparece hacia el primer siglo de esta era.

BASE 60 Sistema Cuneiforme Babilonio, 3 500 A. C.

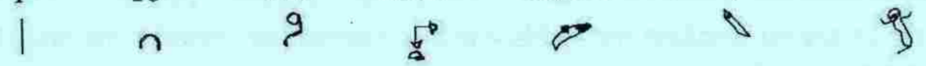
1.6 CLASIFICACIÓN.

Considerando las diferentes formas de expresar los números por medio de numerales, los sistemas de numeración se clasifican en: Sistemas de Agrupación simple, Sistemas Multiplicativos y Sistemas Posicionales.

A) SISTEMAS DE AGRUPACIÓN SIMPLE. Los Sistemas de Agrupación Simple, llamados también aditivos, son aquellos en los que cada número natural se expresa con numerales que corresponden a las unidades de agrupación 1, b, b2, b3,......, bn,... permitiendo repeticiones, cuyos valores se suman para obtener el número. Consideramos algunos ejemplos:

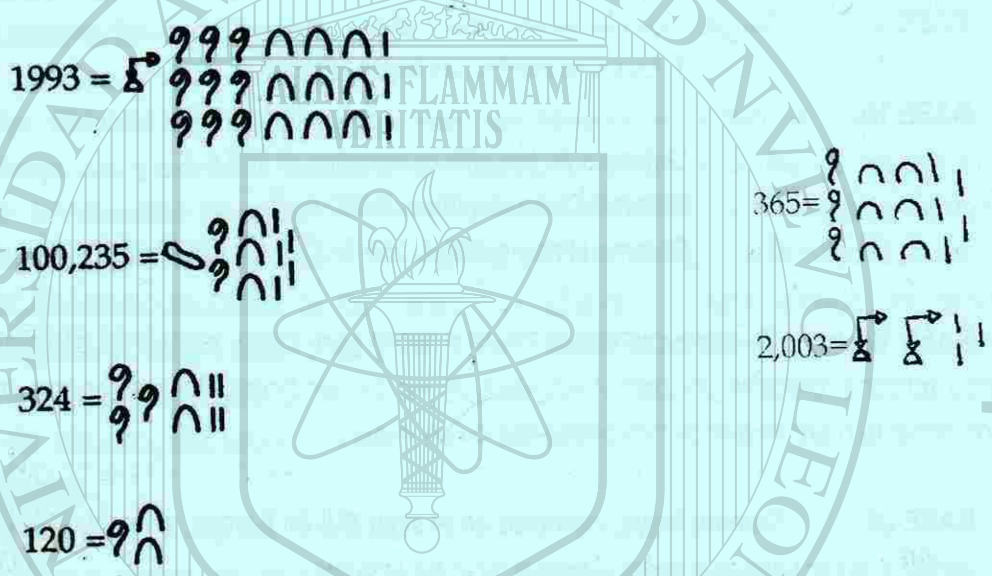
1. Sistema de numeración egipcio: Es un sistema de agrupación simple, base10, cuyos numerales para las unidades de diferentes órdenes son los siguientes jeroglíficos y su significado:

1	10	100	1000	10,000	100,000	1´000,000



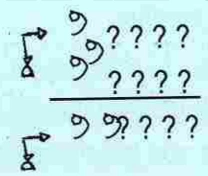
Vara	Yugo	Papiro	Flor de loto	Dedo	Pez	Hombre de rodillas

Veamos algunos números en este sistema:



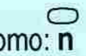
Ejemplo de operaciones en este sistema:
Sumar y multiplicar en jeroglíficos egipcios 46 y 32.

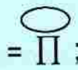
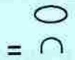
```
        ? ? ? ?                    ? ? ? ?
46 =    ? ? ? ?         46 =       ? ? ? ?
            ? ?                        ? ?
+                        X

32=     ? ? ?           32 =       ? ? ?
          ? ?                        ? ?
________________        ______________

        ? ? ? ?                 ? ? ? ? ? ?
        ? ? ? ?                   ? ? ? ? ?
78=     ? ? ? ?
          ? ? ?
```



1472 = 

Obsérvese que no es necesario un símbolo para el cero y el número de unidades de cada orden se obtiene repitiendo el símbolo correspondiente. Por ejemplo en el penúltimo, son 3 unidades de segundo orden o centenas, 2 unidades de primer orden o decenas y 4 unidades simples. (324).

Los egipcios escribían de derecha a izquierda y consideraron números positivos y negativos utilizando el símbolo  para los positivos y el símbolo  para los negativos. Las fracciones unitarias $\frac{1}{n}$ con n en los naturales, las representaban como: 

Por ejemplo: $\frac{1}{2}$ =  ; $\frac{1}{10}$ =  . Las fracciones con numerador mayor que **1**, las expresaban como sumas de fracciones unitarias. Su escritura era jeroglífica, en la que cada uno de sus símbolos tenía algún significado. En los numerales el 10 es un yugo, el 100 es un papiro enrollado, el 1 000 es una flor de loto, el 10 000 es un dedo apuntando, el 100 000 es un pez y el 1'000 000 es un hombre arrodillado observando el universo.

Los papiros, que constituyen la principal fuente de información de la civilización egipcia antigua, los obtenían del tallo de la caña pappus que crece en abundancia en las riberas del río Nilo. Cortaban el tallo en tiras perpendiculares que presionaban con pesadas piedras, soltando un líquido gomoso, después de lo cual se secaban al sol y finalmente se pulían con piedras. Los registros históricos de los faraones en este material, eran guardados en celdas selladas de las pirámides por lo que se conservaron durante miles de años y actualmente se encuentran en los principales museos de Rusia, Francia e Inglaterra y en algunas universidades de Estados Unidos.

2. Sistema ático de numerales griegos. Los Griegos inventaron varios sistemas de numeración. Este sistema es de agrupación simple, base 10, con símbolos intermedios. Los numerales son los siguientes:

1	5	10	50	100	500	1,000	5,000	10,000	50,000

100,000	500,000	1'000,000	5´000,000

Los símbolos intermedios se forman con la letra pi mayúscula antigua de la cual se cuelga al centro el numeral de una unidad para obtener esa unidad multiplicada por cinco.

Veamos los siguientes números en este sistema:

1,993 = X 𐅅 HHHH 𐅄 ΔΔΔΔ I I I

20,530 = M M 𐅅 ΔΔΔ

2003= X X I I I

306 = HHH Γ I

No se requiere el cero para la representación escrita de los números y los numerales se escriben de izquierda a derecha de mayores a menores.

Otro sistema de agrupación simple que usaron los Griegos desde el año 450 A. C., es el sistema jónico o cifrado en el cual establecen numerales para cada uno de los conjuntos posibles de unidades de diferentes órdenes: 1, 2, 3, ...9, 10, 20, 30,....., 90, 100, 200, 300,....., 900. Los 27 numerales necesarios son las 24 letras mayúsculas del alfabeto griego más 3 letras obsoletas: S, Q, y A; además definen símbolos y reglas especiales para números grandes. Este sistema tiene la desventaja de que es necesario memorizar un conjunto grande de numerales, pero facilita las operaciones aritméticas comparado con otros sistemas de agrupación simple. Sistemas similares a este fueron utilizados por los Hebreos y los Sirios.

SISTEMA JÓNICO GRIEGO.

Numerales para 1,2,3,...,(b-1),b,2b,3b,....(b-1)b,b^2,$2b^2$,$3b^2$,..... (450 A. C.)

$1 \to \alpha$ __ Alfa	$60 \to \xi$ __ Xi
$2 \to \beta$ __ Beta	$70 \to o$ __ Omicron
$3 \to \gamma$ __ Gama	$80 \to \pi$ __ Pi
$4 \to \delta$ __ Delta	*$90 \to$ ϙ __ Koppa
$5 \to \varepsilon$ __ Epsilon	$100 \to \rho$ __ Ro
*$6 \to \varsigma$ __ Digama	$200 \to \sigma$ __ Sigma
$7 \to \zeta$ __ Zeta	$300 \to \tau$ __ Tau
$8 \to \eta$ __ Eta	$400 \to \upsilon$ __ Upsilon
$9 \to \theta$ __ Teta	$500 \to \phi$ __ Phi
$10 \to \iota$ __ Iota	$600 \to \chi$ __ Chi
$20 \to \kappa$ __ Kappa	$700 \to \psi$ __ Psi
$30 \to \lambda$ __ Lamba	$800 \to \omega$ __ Omega
$40 \to \mu$ __ Mu	*$900 \to$ ϡ __ Sampi
$50 \to \nu$ __ Nu	

Obsoletas *.

Ejemplos: 15 = $\iota\ \varepsilon$

598 = ϕ ϙ η

613= $\chi\ \iota\ \gamma$

Los griegos representaban a los números por magnitudes geométricas. A partir de un origen en una recta y de una unidad de medida para el **1**, trasladaban sucesivamente esta medida con el compás sobre la recta para construir los números naturales o enteros positivos en una dirección y los enteros negativos en la otra dirección. Las fracciones $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ con **a** entero positivo o negativo y **b** número natural, las expresaban como múltiples enteros de fracciones unitarias $\mathbf{a}\left(\frac{1}{b}\right)$, adoptaban una unidad de medida para $\frac{1}{b}$ sobre una recta y la trasladaban a veces con el compás.

Durante un tiempo consideraron que todas las magnitudes geométricas podían construirse con un compás sobre una recta, a partir de una unidad de medida para $\frac{1}{n}$ con **n** en los naturales, es decir, que todos los segmentos de recta eran lo que ahora llamamos números racionales.

3. Números romanos. Sistema similar al griego, de agrupación simple base 10 con símbolos intermedios, representación decreciente horizontal, con cambio de orden en una pareja de símbolos para representar la resta del segundo menos el primero.

Numerales:

I	V	X	L	C	D	M	$\bar{M}$	$\bar{\bar{M}}$	$\bar{\bar{\bar{M}}}$
1	5	10	50	100	500	1,000	10,000	100,000	1´000,000

Ejemplo: Expresar en números romanos y sumar 365 y 1993

2,003 = MMIII

365 = CCCLXV

\+

1 993 = MCMXCIII

2 358 = MMCCCLVIII

B) SISTEMAS MULTIPLICATIVOS. En los sistemas multiplicativos hay 2 conjuntos de símbolos: uno para las unidades simples 1, 2, 3,…(b - 1) y el otro para las unidades de orden b, b2, b3,…, bn,…

Los números que contienen conjunto de unidades de diferentes órdenes, se representan agrupando parejas formadas por un símbolo del primer conjunto con otro del segundo conjunto en orden descendente de las potencias de b, cuyo valor es la multiplicación de los numerales de cada pareja y el número es la suma de esto productos. Consideramos un ejemplo de un sistema de esta clase:

Sistema chino-japonés. Es un sistema multiplicativo de base 10 con los siguientes numerales:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1000
一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百	千

Ejemplos:

1979 = 千
九百
七十
九

204 = 二百
四

En el primer ejemplo hay una sola unidad de millar por lo que no se requiere formar la pareja del 1 con el 1000 y el número se obtiene de arriba abajo como 1(1000) + 9(100) + 7(10) + 9 = 1979.

En el segundo ejemplo se observa que en estos sistemas tampoco se requiere el cero pues el número queda perfectamente expresado como 2(100) + 4 = 204.

C) SISTEMAS POSICIONALES. En los sistemas posicionales se utilizan numerales para los números menores que la base b incluyendo el cero, aún cuando los primeros sistemas de este tipo no tenían símbolo para el cero, estos resultaban deficientes y complicados en las operaciones. Entonces, se requieren símbolos para 0, 1, 2, 3,..., (b - 1).

Cada número natural es una sucesión ordenada de estos símbolos, permitiendo repeticiones, donde el primer símbolo de derecha a izquierda, representa unidades simples; el segundo, unidades de primer orden, es decir, es un múltiplo de **b**; El tercero es múltiplo de $\mathbf{b^2}$; de manera que la representación de un número por la sucesión: $a_na_{n-1}....a_1a_0$ corresponde a la suma: $a_nb^n + a_{n-1}b^{n-1} + ... +a_1b+a_0$, es decir, es un polinomio de potencias de la base **b**. Esta representación es similar a la de los sistemas multiplicativos, pero en un sistema posicional no se requieren símbolos para las potencias de la base y la identificación de las unidades de diferentes órdenes la proporciona la posición de cada numeral en la sucesión ordenada.

Además, en un sistema posicional, es necesario el símbolo para el cero, para indicar la ausencia de unidades de determinado orden y conservar el valor posicional de los demás símbolos de la sucesión ordenada. Para los números fraccionarios se utiliza un punto que separa la parte entera de la parte fraccionaria en la sucesión ordenada, de manera que a la derecha del punto el primer símbolo corresponde a unidades de orden -1, es decir un múltiplo de la fracción unitaria $b^{-1} = \frac{1}{b}$, el segundo es un múltiplo de $b^{-2} = \frac{1}{b^2}$ etc.. En general se tiene lo siguiente:

$$a_na_{n-1}...a_1a_0.a_{-1}a_{-2}....=a_nb^n+...+a_1b+a_0+a_{-1}b^{-1}+....$$

Para los negativos se antepone el signo (-) completando el sistema posicional de base ***b***.

Consideremos algunos ejemplos:

1. Sistema Cuneiforme Babilonio. La antigua civilización Babilonia, alrededor del año 3000 A. C., empezó a registrar por medio de su escritura con caracteres en forma de cuñas, lo que consideraban importante.

Desde la segunda mitad del siglo pasado hasta la fecha se han desenterrado más de 500,000 tabletas de arcilla cocida grabadas, de las cuales 300 son exclusivamente matemáticas. De acuerdo con esta fuente de información, inventaron un sistema de numeración posicional base 60 sin cero, combinado con agrupación simple base 10 para los numerales necesarios. Los símbolos para los numerales del 1 al 59 eran los siguientes:

1	10
∇	

Además, utilizan el símbolo  para indicar restas y simplificar sus numerales. Por ejemplo:

Para números mayores que 59, el sistema es posicional, base 60. Por ejemplo:

1993 = (33) (60) + 13 = <<< ▽▽▽ <▽▽▽ = (33,13)$_{60}$

2003 = 33 (60) + 23 = (33, 23)$_{60}$ = ▽▽▽ ▽▽▽

El sistema base 10 de agrupación simple para los numerales y la falta del cero dificulta la expresión escrita de los números y las operaciones aritméticas.

2. Sistema Maya. Los Mayas inventaron un sistema de numeración posicional base 20, combinado con agrupación simple, base 5, para los numerales. Este sistema es similar al de los babilonios pero tiene la importante diferencia de que incluye al cero en sus numerales. Los símbolos para obtener los numerales del 1 al 19 por agrupación simple, base 5, son los siguientes: 1 =. ; 5= --. Por ejemplo:

12= $\ddot{=}$ 6= $\dot{\_}$ 18 = $\dddot{\equiv}$

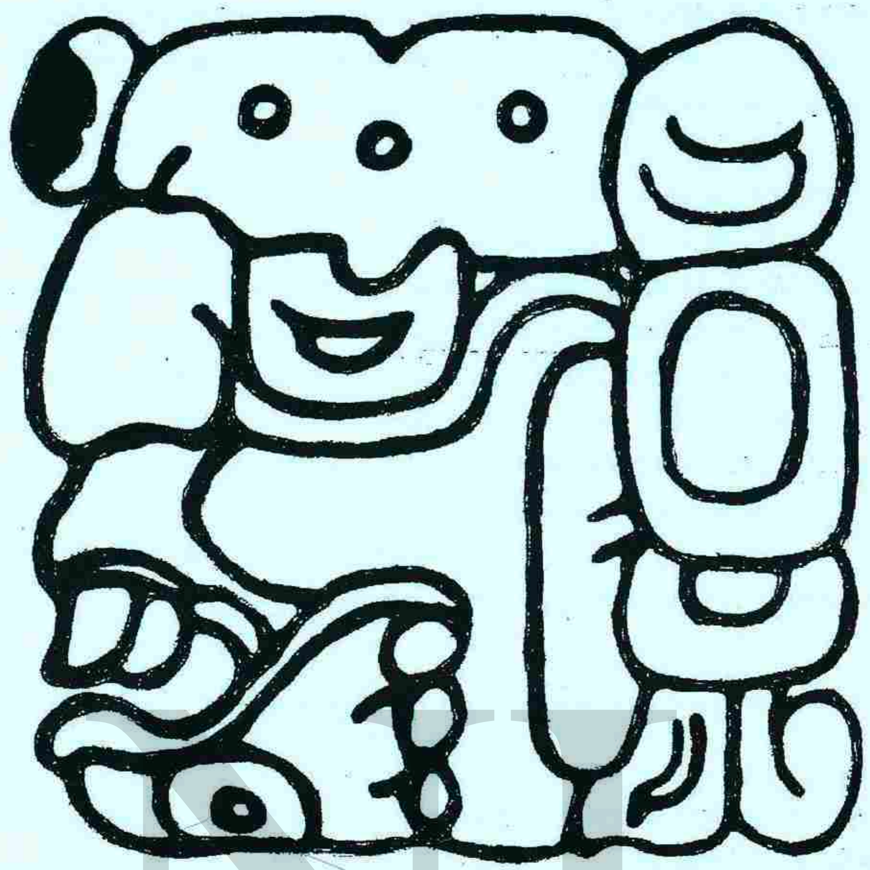
El símbolo para el cero es ⬭. Para los números mayores que 19 el sistema es posicional base 20, aunque en algunos registros aparecen las unidades de segundo orden como múltiplos de 18 (20). Por ejemplo, en el sistema puramente vigesimal:

$1993 = 4(20^2) + 19(20) + 13 =$ .... $\dddot{\equiv}$ $\dddot{=}$ $= (4,19,13)_{20}$

$806 = 2(20^2) + 0(20) + 6 =$ .. ⬭ $\dot{-}$ $= (2,0,6)_{20}$

2003= (5, 0, 3)$_{20}$ = -- ⬭...

La importancia del cero en el sistema maya es un avance enorme, por lo que se le dedica una representación de complicados jeroglíficos para ser grabado en templos y palacios



Un cero maya, pintado en un mural de nuestra Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León.

3. Sistema Chino. Los chinos desarrollaron también un sistema de numeración posicional, base 10, con agrupación simple base 5 para los numerales del 1 al 9 sin el cero y con 2 símbolos para cada numeral que utilizaban según que el numeral ocupara posición par ó impar en la sucesión ordenada. Este sistema se llama Chino-Científico y no se sabe cuando lo empezaron a usar porque en la civilización China antigua como en la India, los Mayas y otras, las fuentes de información son escasas y no están debidamente ubicadas en el tiempo.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Posiciones impares:	I	II	III	IIII	IIIII	T	TT	TTT	TTTT	0

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Posiciones pares:	–	=	≡	≣	☰	⊥	⊥	⊥	⊥	0

4. Sistema Hindú-Arábigo. Es nuestro actual sistema posicional de números, base 10. El registro más antiguo que se conoce es una inscripción de sus numerales, sin incluir el cero, en las columnas del palacio del Rey Asoka, en la India, alrededor del año 250 A. C.

De acuerdo con algunos historiadores, el símbolo para el cero fue introducido por los hindúes aproximadamente 100 años antes de nuestra era, sin embargo, el primer registro escrito del cero aparece hasta el siglo IX, época en que se difundió este sistema de números en Europa a través de una traducción al latín del libro del árabe, Al-Khöwarizmi, en el que se proponen procesos sistemáticos para realizar las operaciones aritméticas. Los numerales originales de los hindúes evolucionaron a través del tiempo hasta tomar su forma actual al inicio del Renacimiento. Como en todos los sistemas posicionales, en este sistema cada número se expresa como una sucesión ordenada de sus numerales 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, permitiendo repeticiones. Por ejemplo:

$$1992 = 1(10^3) + 9(10^2) + 9(10) + 2 = 1000 + 9(100) + 9(10) + 2$$

$$21.32 = 2(10) + 1 + 3(10\text{-}1) + 2(10\text{-}2) = 2(10+1) + 1 + 3\left(\frac{1}{10}\right) + 2\left(\frac{1}{100}\right)$$

En el primer ejemplo se tiene un millar, 9 centenas y 2 unidades. En el segundo hay 2 decenas, 1 unidad, 3 décimas y 2 centésimas.

A partir del sistema Hindú-Arábigo decimal posicional, que ha sido adoptado casi universalmente, existen actualmente una gran variedad de sistemas de pesas y medidas de longitudes, áreas volúmenes y hasta en los sistemas monetarios, con diferentes bases para las unidades de agrupación, a pesar de los esfuerzos que se han realizado para establecer sistemas universales que faciliten la comunicación internacional en todo lo que se relaciona con números. Sin embargo, el hombre ha logrado considerables éxitos hasta la fecha, a partir de los números como instrumentos de cuantificación y medición de los fenómenos naturales y artificiales que permite, en algunos casos, expresarlos matemáticamente para su explicación y análisis y para su aprovechamiento en la obtención de objetivos determinados.

1.7 CAMBIO DE BASE.

Para obtener un número de nuestro sistema decimal posicional en otra base ***b*** cualquiera, se puede proceder como sigue:

Sea ***N*** el número en base 10 que queremos expresar en base ***b*** diferente de **10**:

1. Dividir ***N*** entre ***b*** para obtener: $N = q_1 b + \upsilon_1 ;\ 0 \leq \upsilon_1 < b$ (1)
si $q_1 < b$, entonces N en base $\boldsymbol{b} = (q_1 \upsilon_1)_b$

2. Si $q_1 \geq b$, dividir q_1 entre b para obtener:
$q1 = q_2 b + \upsilon_2$ (2)
$0 \leq \upsilon_2 < b$

Sustituyendo (2) en (1): $N = (q_2 b + \upsilon_2)b + \upsilon 1 = q_2 b^2 + \upsilon_2 b + \upsilon_1$
Si $q_2 < b \Rightarrow N = (q_2 \upsilon_2 \upsilon_1)_b$

3. Si $q_2 > b$, se requiere el proceso 2, hasta obtener un cociente $< b$.

Ejemplo: Expresar 198 en base 4:

49	12	$\underline{3} < 4$
4 ⟌ 198	4 ⟌ 49	4 ⟌ 12
38	09	$\underline{0}$
$\underline{2}$	$\underline{1}$	

$\Rightarrow 198 = (3012)_4$

Cambio de base b_1 a base b_2.

Primero, es conveniente pasar de la base b_1 a la base 10 y después a la base b_2

Ejemplo: $(132)_4 = 1(4^2) + 3(4) + 2$
$= 16 + 12 + 2$
$= 30$

Ahora expresamos 30 en otra base digamos 7: $7 \overline{)30}$ con cociente $\underline{4} < 7$ y residuo $\underline{2}$

$(132)_4 = 30\ (42)_7$

De esta manera cambiamos el número $(134)_4$, de la base 4 a la base 7, obteniendo $(134)_4 = (42)_7$

Operaciones en una base cualquiera *b*:

Para operar con números en base b es útil tener tablas de suma y multiplicación en esa base.

Por ejemplo, las tablas de multiplicación y suma en base 7 son:

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	10
2	2	3	4	5	6	10	11
3	3	4	5	6	10	11	12
4	4	5	6	10	11	12	13
5	5	6	10	11	12	13	14
6	6	10	11	12	13	14	15

x	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	11	13	15
3	0	3	6	12	15	22	24
4	0	4	11	15	21	26	33
5	0	5	13	21	26	34	42
6	0	6	15	24	33	42	51

Ejemplo Sumar y multiplicar $(325)_7$ y $(164)_7$

Verificar transformándolos a base 10, hacer la operación y volver el resultado a base 7.

$$\begin{array}{r} (325)_7 \\ +\ \underline{(164)_7} \\ (522)_7 \end{array}$$

$166 + 95 = 261 \longrightarrow = (522)_7$

$(325)_7 = 3(7^2) + 2(7) + 5 = 147 + 14 + 5 = 166.$

$(164)_7 = (7^2) + 6(7) + 4 = 49 + 42 + 4 = 95.$

$$\begin{array}{r} (325)_7 \\ \times\ \underline{(164)_7} \\ 1636 \\ 2622 \\ \underline{325} \\ (63656)_7 \end{array}$$

$(166)(95) = 15770$

$(63\,656)_7 = 6(7^4) + 3\,(7^3) + 6\,(7^2) + 5(7) + 6 = 15\,770$

Otro ejemplo: Tablas suma y multiplicación para base 4.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

x	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

Sumar y multiplicar: $(123)_4$ y $(201)_4$

$$\begin{array}{r} 123 \\ +\ \underline{201} \\ (330)_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 201 \\ \times\ \underline{123} \\ 1203 \\ 1002 \\ \underline{201} \\ (31\,323)_4 \end{array}$$

Comprobación:

$(123)_4 = 1(4^2) + 2(4) + 3 = 16 + 8 + 3 = 27$

$(201)_4 = 2(4^2) + 1 = 32 + 1 = \underline{33}$

60

Ahora:

$60 = (330)_4$

$(31323)_4 = 891 = (33)(27)$ L. C. D. C.

1.8 COMPUTACIÓN PRIMITIVA.

Los cálculos numéricos en los sistemas de numeración previos al sistema hindú-arábigo que utilizamos actualmente, enfrentaban dificultades derivadas de las siguientes limitaciones:

a) Limitaciones mentales, por los idiomas deficientes, sin alfabeto y reglas gramaticales que ordenaran el lenguaje. Además, los sistemas de numeración también eran deficientes, aunque algunos consideran que es cuestión de práctica y familiaridad para computar eficientemente en cualquier sistema.

b) Limitaciones físicas. Los medios para expresarse por escrito eran escasos y difíciles de producir manualmente. Algunos de los principales recursos en las primeras civilizaciones, son los siguientes:

TABLETAS DE ARCILLA COCIDA. Los Babilonios escribían sobre moldes de arcilla húmeda y suave que luego sometían al fuego.

PAPIROS. Los egipcios obtuvieron este material de la caña pappus cortada en tiras longitudinales que acomodaban horizontalmente, cruzadas con trozos de 20 a 40 centímetros, presionándolas piedra sobre piedra, se ponían a secar pegándose con la goma que soltaban. Después se pulían con piedra.

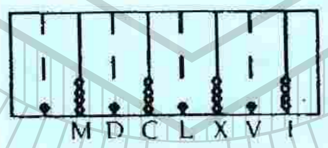
VITELA. Tela obtenida limpiando y secando piel de vaca, especialmente de fetos de becerros.

PERGAMINOS. Obtenidos de la piel de animales, especialmente ovejas.

PIZARRONES. *Pizarrones* de arena fueron usados desde la época de los griegos (700-200 A. C.) para cálculos numéricos y figuras geométricas. Tabletas de piedra se usaban para grabar registros importantes, desde las épocas prehistóricas. Hace unos 2000 años, los romanos utilizaron pequeños pizarrones con una delgada capa de cera, donde escribían con un estilete.

ÁBACOS. Para superar estas dificultades físicas y mentales, se inventaron los ábacos, empezando por el ábaco griego de arena, de piedra y de barro. Los ábacos aparecieron de diversas formas durante la edad media y constituyeron el primer dispositivo mecánico para cálculos numéricos utilizado por el hombre desde el período griego.

Ábaco Romano:



Ejemplo: Sumar:

2 534 + 1 837 = MMDXXXIV + MDCCCXXXVII
= MMMMCCCLXXI = 4 371

PAPEL. Por medios manuales, fue producido primeramente por los chinos de las cortezas de los árboles. Por medios mecánicos, se logró producirlo hasta 1850 y la imprenta de caracteres móviles fue inventada por Gütemberg en 1457. En China y Corea se realizaban impresiones mecánicas con linotipos de madera, desde el año 900. Los coreanos aseguran haber empleado moldes metálicos desde 1 240 D. C., pero casi no los usaron hasta alrededor de 1 450 D. C., cuando en Europa el alemán Gütemberg perfeccionaba la imprenta de caracteres móviles hechos de metal.

EJERCICIO 1. **SISTEMAS DE NUMERACIÓN**

1.1 Un paleontólogo mide una radioactividad de **0.05 = 5%** de la normal en vida, en un fósil humano. Determinar la antigüedad del fósil.

1.2 Aplicando la técnica del C_{14} se encuentra que un fósil humano tiene 110,000 años de edad. Cuál fue la radiactividad medida en el fósil r_t / r?

2. Escribir los números **375** y **1642** en jeroglíficos egipcios, numerales griegos, numerales romanos, cuneiformes babilonios y numerales mayas.

3. Sumar y multiplicar los números **28** y **63** en jeroglíficos egipcios y en numerales romanos.

4. Expresar en numerales mayas y sumar los siguientes números:
a) 45 y 318 **b) 1800 y 9531**

5. Probar que para multiplicar x por y, ambos entre **5** y **10**, podemos levantar **(x - 5) y (y - 5)** dedos en cada mano, sumar los dedos levantados para las decenas y multiplicar los dedos cerrados para las unidades.
Observación: Los dedos que quedan cerrados son: **(10 - x) y (10 - y).**

6. Construir tablas de suma y multiplicación para un sistema de números de base **5**. Expresar en esta base los números **1782 y 485.**

7. Sumar y multiplicar $(1332)_5$ y $(342)_5$. Verificar, transformando a base **10**, efectuando las operaciones y volviendo a base **5.**

8. Expresar $(31102)_4$ en base **7**, transformando a base **10** y después a base 7.

9. Determinar para qué base es **2 x 3 = 10.** En qué base es **3 x 3 = 12.**

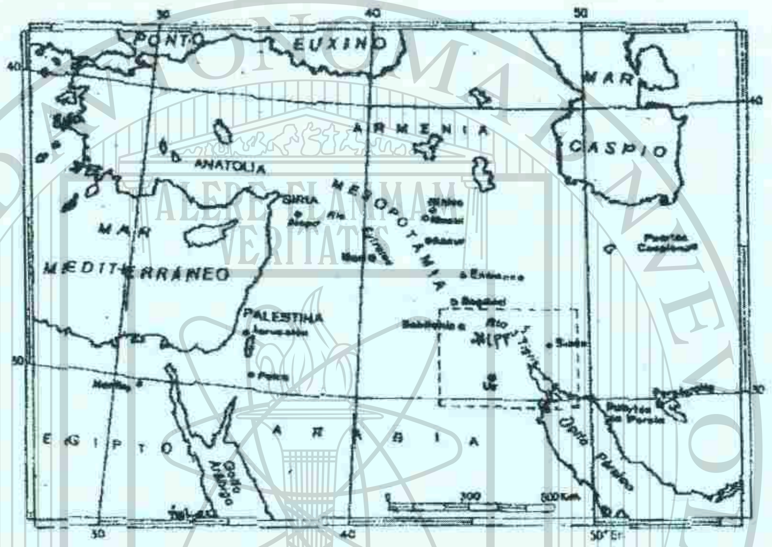
10. Demostrar que se puede pesar en una balanza simple de brazos iguales cualquier número entero **w** de kilos, disponiendo de pesas de $1, 2, 2^2, 2^3$,..........kilos.

11. Demostrar que se puede pesar en una balanza simple de brazos iguales cualquier número entero **w** de kilos disponiendo de pesas de $1, 3, 3^2, 3^3$,..........kilos. Sugerencia: $2(3)^n = 3^{n+1} - 3^n$

12. Si a alguien se le pide que piense un número de 2 dígitos, que multiplique el dígito de las decenas por 5, que le agregue 7, que lo multiplique por 2 y que le agregue el dígito de las unidades, probar que, restando 14 del resultado final, se obtiene el número original.

CAPÍTULO 2

MATEMÁTICAS DE LAS CIVILIZACIONES ANTIGUAS.



2.1 INTRODUCCIÓN.

Como ya hemos observado, las civilizaciones antiguas que dejaron registros perdurables son Babilonia y Egipto. De estos registros históricos, se han seleccionado aquellos que corresponden a Matemáticas, es decir, que contienen números y figuras geométricas y que plantean y resuelven problemas. Durante el cuarto milenio antes de nuestra era, aparecen casi simultáneamente en ambas civilizaciones, la escritura, el uso de la rueda y los metales, propiciando la necesidad de los números y las figuras geométricas para contar y medir. Es conveniente enfatizar que las Matemáticas de esta primera etapa son básicamente intuitivas y son impulsadas por necesidades prácticas. No se ha encontrado evidencia de demostraciones en las Matemáticas de estas civilizaciones, aún cuando encontraremos algunas fórmulas correctas ó aproximadas para resolver problemas.

2.2 BABILONIA (4500-600 A. C.)

Fuente principal. Desde la primera mitad del siglo XIX hasta la fecha, han sido desenterradas y clasificadas más de 500 000 tabletas de arcilla cocida, desde 5 x 5 hasta 40 x 40 centímetros. Las principales colecciones de estas tabletas se encuentran en los museos de París, Londres y Berlín y en

las Universidades de Yale, Columbia y Pensilvanya. Algunas están escritas por un solo lado, otras por ambos lados y hasta por los bordes redondeados. Aproximadamente 300 son de Matemáticas, tablas de operaciones, cuadrados, cubos, inversos y exponenciales.

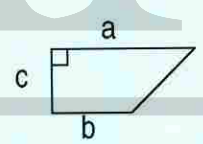
Interpretación. Clave descubierta por el inglés H. C. Rawlinson, en 1847, quien perfeccionó la clave anterior del alemán J. Gotefrend. Se han clasificado en 3 períodos:

a) Período Sumerio.	Hasta 3200 A. C.
b) Rey Hammurabi.	Hasta 2500 A. C.
c) Rey Nabucodonosor.	Hasta 600 A. C.

2.3 ARITMÉTICA Y GEOMETRÍA.

MATEMÁTICAS AGRARIAS Y COMERCIALES. Desde las tabletas más antiguas aparece el sistema posicional sexagesimal. Cálculos aritméticos de contabilidades, recibos, sistemas de pesas y medidas.

GEOMETRÍA. Áreas de triángulos rectángulos e isósceles. Trapecios con un lado perpendicular a los lados paralelos:



$$\mathbf{A = \frac{1}{2}\ (a + b)c}$$

La circunferencia del círculo de diámetro **d** la calculaban con la fórmula **C = 3d** y el área con la fórmula $\mathbf{A = \frac{1}{2} C^2}$ que corresponde a π **= 3.** Recientemente se encontró en una tableta π = 3.125.

Volúmenes de paralelepípedos rectángulos y de cilindros circulares.
Volúmenes de pirámides truncadas mal calculadas como la semi-suma de las bases por la altura.
División de la circunferencia en 360 partes.
Proporciones de triángulos semejantes.
Medida lineal de aproximadamente 12 kilómetros dividida en 30 partes de aproximadamente 400 metros cada una.

2.4 ÁLGEBRA.

Hacia el año 2000 A. C. los Babilonios desarrollaron un *Álgebra en prosa* para resolver ecuaciones de primer y segundo grado. Hay una tableta que contiene los cuadrados y los cubos de números naturales y su suma $\mathbf{n^3 + n^2}$ de $\mathbf{n = 1}$ a $\mathbf{n = 30}$, que permite resolver ecuaciones cúbicas de la forma $\mathbf{x^3 + x^2 = b}$, con **x** número natural, desde **b = 2** hasta **b = 27,900**. Una tableta de Yale del 1600 A. C. contiene problemas no resueltos de ecuaciones simultáneas. Por ejemplo:

$$\begin{cases} xy = 600 \\ 150(x-y) - (x+y)^2 = -1000 \end{cases}$$

La segunda ecuación se transforma en cuadrática en (x – y) sustituyendo la identidad:

$(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy\,; \qquad xy = 600$

$150(x-y) - (x-y)^2 - 2400 + 1000 = 0$

$\therefore \qquad (x-y)^2 - 150(x-y) + 1400 = 0$

Resolviendo para $(x-y)$ por factores, $(x-y-10)\,(x-y-140) = 0$

$\therefore \qquad x - y - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y + 10$

o $\qquad x - y - 140 = 0 \quad$ o $\quad x = y + 140$

Sustituyendo en $xy = 600$:

$(y+10)y = 600.$

$y^2 + 10y - 600 = 0.$ $\qquad \boxed{\begin{array}{l} y_1 = -30;\ x_1 = -20 \\ y_2 = 20;\ \ x_2 = 30 \end{array}}$

$(y+30)(y-20) = 0.$

Las otras 2 soluciones se encuentran con x = y + 140

En una tableta de 1600 A. C., en Yale, aparecen aproximaciones de raíces cuadradas que sugieren el uso de la fórmula.

$\mathbf{(a^2 + h)^{1/2} \approx a +} \dfrac{h}{2a}$ (Primeros 2 términos del desarrollo binomial).

Ejemplo:

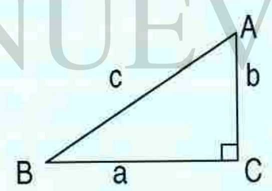
$\sqrt{26}\ \mathbf{= (5^2 + 1)^{1/2} \approx 5 +} \dfrac{1}{10}\ \mathbf{= 5.1}$

2.5 TRIGONOMETRÍA.

PLIMPTON 322. Tableta de la colección G. A. Plimpton, en la Universidad de Columbia, de 1900 A. C. descrita por Neugebauer en 1945. Está parcialmente destruida a derecha e izquierda, pero se aprecian claramente 3 columnas y la existencia de una 4ª semiborrada a la izquierda, todas ellas de números en el sistema sexagesimal. Las primeras 4 columnas son las que aparecen en la tableta y han sido completadas para encontrar una lista de 15 ternas pitagóricas correspondientes a ángulos B de un triángulo rectángulo del 45° al 31°

Definición: Una terna de números en N, (a, b, c), es pitagórica si corresponde a los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Es decir, si $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$.

a	b	c		u	υ	∠B
120	119	169	1	12	5	45°
3456	3367	4825	2	64	27	44
4800	4601	6649	3	75	32	43
13500	12709	18541	4	125	54	42
72	65	97	5	9	4	41
360	319	481	6	20	9	40
2700	2291	3541	7	54	25	39
960	799	1249	8	32	15	38
600	481	769	9	25	12	37
6480	4961	8161	10	81	40	36
60	45	75	11	2	1	35
2400	1679	2929	12	48	25	34
240	161	289	13	15	8	33
2700	1771	3229	14	50	27	32
90	56	106	15	9	5	31



2000 años después de que los Babilonios hicieron esta tableta, los árabes encontraron que las ternas de números (a, b, c) de forma: $a = 2u\upsilon$; $b = u^2 - \upsilon^2$ y $c = u^2 + \upsilon^2$ con $u > \upsilon \in N$ son pitagóricas porque:

$$
\begin{aligned}
a^2 + b^2 &= (2uv)^2 + (u^2 - v^2)^2 \\
&= 4u^2v^2 + u^4 - 2u^2v^2 + v^4 \\
&= u^4 + 2u^2v^2 + v^4 \\
&= (u^2 + v^2)^2 = c^2
\end{aligned}
$$

$\therefore$ (a, b, c) es una terna pitagórica (a, b y c son formas paramétricas de **u** y **v**).

Observación: Estas fórmulas para a, b, y c no proporcionan todas las ternas pitagóricas. Por ejemplo, la terna (9, 12, 15) es pitagórica porque $\mathbf{9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2}$.

Esta terna no se obtiene de las fórmulas dadas porque si $a = 12 = 2uv$, con $u > v$, se tiene:

$$
12 = \begin{cases} 2(6.1) \rightarrow & \begin{cases} u = 6 \\ v = 1 \end{cases} (1) \\ 2(3.2) \rightarrow & \begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases} (2) \end{cases}
$$

De la 1ª alternativa, se obtiene:

$b = u^2 - v^2 = 36 - 1 = 35$; $b = 35$

$c = u^2 + v^2 = 36 + 1 = 37$; $c = 37$

Entonces, la terna de las fórmulas sería (12, 35, 37); $12^2 + 35^2 = 37^2$

De la 2ª alternativa: $u = 3$; $v = 2$:

tenemos: $b = 9 - 4 = 5$; $b = 5$

$c = 9 + 4 = 13$; $c = 13$

y la terna de las fórmulas sería (12, 5, 13) ; $12^2 + 5^2 = 13^2$

Todas las ternas de la tableta son pitagóricas y provienen de las fórmulas encontradas por los árabes con los valores de u y v que se dan a la derecha de la tabla.

Definición: Una ***terna pitagórica*** (a, b, c) es **primitiva** si el máximo común divisor de a, b y c es 1. Es decir si los números naturales de la terna son primos entre sí.

Las ternas pitagóricas de las fórmulas que estamos considerando son primitivas bajo ciertas condiciones sobre u y v, de acuerdo con el siguiente teorema:

Teorema: Las ternas pitagóricas de la forma: $a = 2uv$; $b = v^2$ y $c = u^2 + v^2$ con $u > v$, u y $v \in N$ son primitivas si y solo si $(u, v) = 1$ y u y v son de diferente paridad.

Demostración: 1ª Hipótesis

$$
\begin{cases} a = 2uv \\ b = u^2 - v^2 \\ c = u^2 + v^2 \\ (a, b, c) = 1 \end{cases} \quad ; \quad u > v \in N
$$

P.D. $\begin{cases} u \text{ y } v \text{ son de diferente paridad} \\ (u, v) = 1 \end{cases}$

Supongamos por reducción a lo absurdo que $(u, v) \neq 1$. Entonces existe $m > 1 \in N$ tal que:

$$
\left.\begin{matrix} m / u \\ \\ m / v \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} m / a = 2uv \\ m / b = u^2 - v^2 \\ m / c = u^2 + v^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (a, b, c) \neq 1 \text{ contra la hipótesis!}
$$

$\therefore \quad (u, v) = 1$

Además, supongamos por reducción a lo absurdo que u y v son de la misma paridad:

Si u y v son pares: $\begin{cases} a = 2uv \\ b = u^2 - v^2 \\ c = u^2 + v^2 \end{cases}$ son pares

Si u y v son impares: $\Rightarrow$ a, b y c son pares.

$\therefore$ (a, b, c) $\neq 1$, contra la hipótesis original.

$\therefore$ u y v son de diferente paridad. L. C. D. D.

2ª Hipótesis

$$
\begin{cases} a = 2uv \\ b = u^2 - v^2 \\ c = u^2 + v^2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} (u, v) = 1 \\ u \text{ y } v \text{ diferente paridad} \\ \text{P. D. } (a, b, c) = 1 \end{matrix}
$$

Supongamos, por reducción a lo absurdo, que $(a, b, c) \neq 1$

Entonces, existe **m** primo en **N** tal que **m / a, b y c**

$\therefore$ $m / a + c = (u + \upsilon)^2 = (u + \upsilon)(u + \upsilon)$
$\therefore$ $m / u + \upsilon$

Además: $m / a + b = (u - \upsilon)^2 \Rightarrow m / (u - \upsilon)$

$$\therefore \begin{cases} m / u + \upsilon \\ m / u - \upsilon \end{cases}$$

$$\therefore \quad m / 2u ; m / 2\upsilon$$

$$\text{Si } m \neq 2 \Rightarrow \begin{cases} m / u \\ m / \upsilon \end{cases} \Rightarrow (u - \upsilon) \neq 1, \text{ contra la hipótesis.}$$

$$\text{Si } m = 2 \Rightarrow \begin{cases} u + \upsilon = 2k_1 \\ u - \upsilon = 2k_2 \end{cases}$$

$\therefore$ u y υ son de la misma paridad, contra la hipótesis.
$\therefore (a, b, c) = 1$ L. C. D. C.

Con la excepción de las ternas de las hileras 11 y 15 de la tableta, todas las demás son primitivas. La tableta contiene una cuarta columna parcialmente destruida que corresponde a los valores de c/a que son las secantes del ángulo A. Estos hallazgos sugieren la conveniencia de examinar e investigar cuidadosamente las tabletas. Posiblemente se verá si existen o existieron otras tabletas como ésta correspondientes a los ángulos del 30° al 16° y del 15° al 1°.

2.6 EGIPTO. (3500 – 1000 A. C.)

Los egipcios de esta época no lograron un avance matemático tan notable como el de los babilonios, tal vez porque tenían menos problemas de ingeniería en su árido territorio, aislado de las rutas comerciales de las caravanas de las antiguas civilizaciones. Sin embargo, tuvieron que enfrentar los problemas de construir sus enormes pirámides para conservar los cuerpos de sus faraones y los registros principales de sus papiros, que de otra manera habrían sido destruidos, porque eran de material orgánico.

Para conservar los cuerpos de sus faraones, además de construir tumbas ocultas y selladas en las pirámides, desarrollaron técnicas de embalsamamiento consistentes en extraer la sangre y las vísceras, colocar el cuerpo en una plataforma de aproximadamente 2 metros de altura, cubiertos con una capa de 1cm. de sal y así exponerlos al sol durante un mes para deshidratarlos y después cubrirlos con vendas impregnadas con sustancias químicas conservadoras.

Además, fabricaban ataúdes herméticos y sellados, que se depositaban en las tumbas ocultas y también selladas en sus pirámides. Hay una gran cantidad de papiros y otros registros que proporcionan información sobre el avance matemático egipcio en esta época, pero los más importantes son los siguientes:

FUENTES DE DATOS:

1. 3100 A. C. Escudo Real Egipcio, grabado con números grandes relativos a batallas victoriosas. Actualmente en el museo de Oxford, en Inglaterra.

2. 2900 A. C. Construcción de la Gran Pirámide de Gizeh con 2´000,000 de bloques colocados en un área de aproximadamente 5 hectáreas (50,000 Mts2).

En promedio, cada bloque pesa 2.5 toneladas y fueron llevados de un banco situado del otro lado del Río Nilo. Los techos de las cámaras son de bloques de granito de 8.25 mts de largo por 1.25 mts de espesor y 54 toneladas de peso cada uno. La base es cuadrada con un error relativo en sus lados, menor que 1/14,000 y, en los ángulos de sus esquinas, menor que 1/27,000. El trabajo fue realizado por 100,000 hombres durante 30 años.

***3. 1850 A. C. a)** El papiro de Moscú de 8 cms por 5.44 mts, con 25 problemas, fue publicado en 1930.

b) El más antiguo sextante para observaciones astronómicas, actualmente en el museo de Berlín.

***4. 1650 A. C.** El papiro Rhind, especie de manual con 85 problemas, fue publicado en 1927, después de haber sido obtenido por el Inglés Henry Rhind en Luxor, Egipto y se encuentra en el museo Británico.

5. 1500 A. C. a) El más grande obelisco existente, en Tebas, frente al Templo del Sol. Tiene base cuadrada de 3 metros, una altura de 33 metros y pesa 430 toneladas.

b) El más antiguo sextante para mediciones basadas en los movimientos del Sol, actualmente en Berlín.

6. 1350 A. C. El papiro Rollins, actualmente en el museo del Louvre, en París, contiene contabilidades con números grandes sobre fabricación de pan.

7. 1167 A. C. El papiro Harris, preparado por el faraón Ramsés IV, contiene inventarios sobre las riquezas de Egipto y los trabajos realizados por su padre Ramsés III.

Fuentes de datos más recientes muestran un retroceso en la cultura matemática de Egipto.
* Son los más importantes.

2.7 ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA.

Los 110 problemas de los papiros de Moscú y Rhind son numéricos y la mayoría son de origen práctico y muy simple. El carácter aditivo de su sistema de numeración, les permitió desarrollar un algoritmo para multiplicar 2 números por duplicación de uno de los factores y sumando aquellos que correspondan a la expresión del segundo factor en base **2**, es decir como una suma de potencias de 2. Por ejemplo, para multiplicar (45) por (74)

$$(45)_2 = 101101 = 1 + (2)^2 + 1(2)^3 + 1(2)^5$$

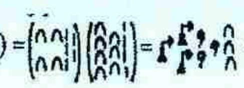
$$= 1 + 4 + 8 + 32$$

$$\therefore \quad (45)74 = (1 + 4 + 8 + 32)74$$

$$= 74 + 4(74) + 8(74) + 32(74)$$

* 1 - 74
* 4 - 296
* 8 - 592
* 32 - 2368
3330

En numerales egipcios:

(45) (74) =  = 3330

Las fracciones las descomponen en sumas de fracciones unitarias $\frac{1}{n}$ = *n*. Esto sería por ejemplo: $\frac{1}{3}$ = , $\frac{1}{10}$ = ; $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ =

Hay una excepción para la fracción 1 / 2 representada a veces por $\frac{1}{2}$ =

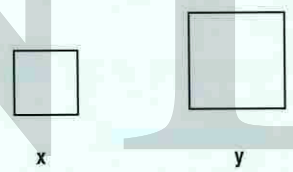
Problemas sobre mezclas para alimento de ganado y almacenamiento de granos que conducen a ecuaciones lineales resueltas por el método de falsa posición (tanteos).

Por ejemplo, para resolver la ecuación: $2\chi - \frac{x}{8} = 60$, se intenta con x = 8:

$$2\,(8) - \frac{8}{8} = 16 - 1 = 15 = \frac{1}{4}(60)$$

$$\therefore \; x = 4(8) = 32 \text{ resuelve la ecuación } \; 2(32) - \frac{32}{8} = 64 - 4 = 60$$

En un papiro de 1950 A. C. se encuentra el siguiente problema: "Una superficie de 100 unidades de área es la suma de 2 cuadrados cuyos lados son uno al otro como 1: $\frac{3}{4}$". La solución para los lados sería:



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 = 10^2 & (2) \\ x = \tfrac{3}{4}\, y & (1) \end{cases}$$

Por el método de falsa posición tenemos en (1) y = 4; x = 3

Sustituyendo en (2) $9 + 16 = 25 = \frac{1}{4}(100) = (\frac{1}{2}(10))^2$

$\therefore$ y = 2(4) = 8; x = 6 es la solución.

En el papiro Rhind están los símbolos para **+** = y **-** = ,el positivo son unos pies caminando hacia la izquierda, sentido en que escribían los egipcios.

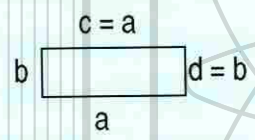
2.8 GEOMETRÍA.

26 de los 110 problemas de los papiros Rhind y de Moscú son geométricos, la mayoría se refieren a cálculo de áreas de terrenos y volúmenes de graneros y pirámides. Calculan el área de un círculo con la fórmula aproximada:

$$A = \left[\frac{8}{9}d\right]^2$$

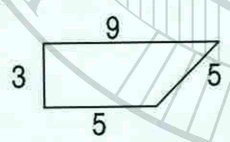
El volumen de un cilindro lo calculan bien como el área de la base por la altura.
El área de un cuadrilátero la calculan como:

$A = \frac{1}{4}(a + c)(b + d)$, fórmula correcta para rectángulos porque



$$A = \frac{1}{4}(a + c)(b + d) = \frac{1}{4}(2a)(2b) = ab$$

En cambio, para un trapecio resulta falsa. Por ejemplo:



$A = \frac{1}{2}(5 + 9) * (3) = 21$ (área correcta)

La fórmula egipcia resulta:

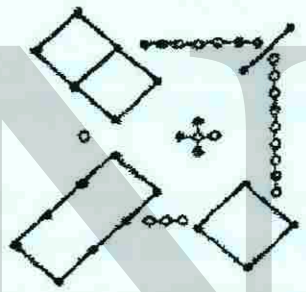
$A = \frac{1}{4}(5 + 9)(3 + 5) = 28$ (error de 7 unidades cuadradas)

En el papiro de Moscú calculan el volumen de una pirámide truncada con la fórmula correcta $V = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)\,h$. Esta fórmula la obtuvieron posiblemente por disección de la pirámide.

2.9 CHINA.

Las fuentes originales de la civilización china antigua se perdieron cuando el año 213 A. C. el emperador Shi – Huang - Ti ordenó que se quemaran todos los libros para iniciar una nueva civilización excepto los de medicina, agricultura y adivinación. Para evitar las invasiones de los bárbaros del norte, construyó LA GRAN MURALLA, más de 6,000 kms de 6 mts de altura, serpenteantes en unos 2,400 kms, 25,000 torres de vigilancia de 12 mts de altura, cada 200 mts. Participaron en la obra más de un millón de trabajadores, decenas de miles de ellos murieron y fueron sepultados en la muralla junto con la mayoría de la élite intelectual de la época. Este emperador unió al gran territorio de China.

CUADROS MÁGICOS Uno de los libros más antiguos de la matemática china es el I - King en el cual aparece una figura llamada lo - Shu con el más antiguo cuadro mágico conocido: Los Números del 1 al 9 con los pares en las esquinas y el 5 en el centro



Se dice que este dibujo fue encontrado por el emperador Yu, 2200 A. C., grabado en una tortuga a orillas del Río Amarillo (Hoang - Ho).

Definición: Un cuadro mágico de orden **n** es un arreglo en **n** hileras y **n** columnas de enteros positivos, tal que la suma de cualquier hilera, columna o diagonal mayor es la misma cantidad, llamada la constante mágica:

$$C = \frac{1}{2}n\,(n^2 + 1)$$

Definición: Un cuadro mágico de orden **n** es normal si los $\mathbf{n^2}$ números naturales que contiene son los primeros: 1, 2, 3,..., n^2.

El cuadro de la figura lo - Shu es mágico normal de orden 3.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

15 15 15 15

$C = (½)n\,(n^2 + 1)$

$(1/2)\,(3(9 + 1)$

$= (1/2)\,(3(10))$

$= 15$ Todas las hileras, columnas y diagonales principales suman 15

El francés De la Louberé encontró en Siam un método simple para construir cuadros mágicos de orden impar que consiste en lo siguiente:

1. Empezar con el 1 en la celda central de la hilera superior. Proceder de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba en diagonal con los números naturales en orden hasta salir del cuadro

2. Si se sale por arriba, colocar el número que sigue en la celda inferior de la columna inmediata a la derecha, para continuar.

3. Si se sale por la derecha, colocar el número en la primera celda de la hilera inmediata hacia arriba, para continuar.

4. Cuando se encuentre una celda ya ocupada, seguir con la celda inmediata inferior al último número colocado. La esquina superior derecha fuera del cuadro, se considera como una celda ocupada.

Por ejemplo, para n = 7

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

$$C = \frac{1}{2}n\,(n^2 + 1) = \frac{1}{2}7((50) = 175$$

En 1514, el pintor alemán Albrecht Dürer realizó su grabado ***Melancolía*** en el que hay un cuadro mágico normal de orden 4:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

$$C = \frac{1}{2}n(n^2 + 1) = \frac{1}{2}(4)(17)$$

C = 34 Todas sus hileras, columnas y diagonales mayores suman 34.

Las celdas centrales de la hilera inferior dan la fecha del grabado: 1514.

Además se pueden verificar las siguientes propiedades:

1. La suma de los cuadrados de los números que están en las primeras 2 hileras es igual a la suma de los cuadrados de los números que están en las últimas 2 hileras.

2. La suma de los cuadrados de los números da las hileras 1 y 3 es igual a la suma de los cuadrados de los números que están en la 2ª y 4ª hilera.

3. La suma de los números que están en las diagonales mayores es igual a la suma de los números que están fuera de estas diagonales.

4. La suma de los cuadrados y de los cubos de los números de las diagonales mayores son respectivamente iguales a la suma de los cuadrados y los cubos de los números que no están en estas diagonales.

5. La suma de los elementos extremos de la diagonal principal, es igual a la suma de los extremos de la diagonal secundaria.

6. La suma de los elementos centrales de la diagonal principal, es igual a la suma de los elementos centrales de la diagonal secundaria.

7. El intercambio de hileras o columnas extremas o centrales producen nuevos cuadros mágicos normales.

Hay un procedimiento de origen desconocido para elaborar cuadros mágicos normales de orden múltiplo de 4, que consiste en lo siguiente:

1. Cruzar con línea suave todas las diagonales mayores de los bloques de 4 x 4 celdas diferentes que se forman, de izquierda a derecha y de arriba abajo.

2. Contar con los números naturales 1, 2, 3, ... las celdas del cuadro de izquierda a derecha, empezando con la esquina superior izquierda hasta completar la primera hilera y siguiendo de la misma manera con las hileras que siguen, colocando el número que le corresponda, en las celdas que no estén cruzadas.

3. Contar con los números naturales 1, 2, 3, ... empezando con la celda inferior derecha y en sentido inverso al anterior, colocando el número que le corresponda, en las celdas cruzadas.

Por ejemplo, para n = 4;

$C = \frac{1}{2}(4)(17) = 34.$

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Otro ejemplo para n = 8; $\frac{1}{2}(8)(65) = 260 = C$

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

Una regla para determinar cuadros mágicos no-normales de orden impar mayor que 3, es la siguiente:

1. Colocar en la primer hilera los números naturales: a, 2a, 3a,…, na.

2. En la segunda hilera repetir esto números, empezando por el que sigue al elemento de la celda central en la primera hilera, es decir, se empieza con $\frac{1}{2}(n + 3)$ a, siguiendo el mismo orden cíclico.

$$\frac{1}{2}(n + 3)\,a,\ \frac{1}{2}(n + 5)a,\ \ldots,\ na,\ a,\ 2a,\ \ldots,\ \frac{1}{2}(n + 1)a.$$

3. Repetir este proceso a partir de la segunda hilera, para obtener la tercera y así sucesivamente. Para estos cuadros: $\mathbf{C = \sum_{i=1}^{n} ia = a\sum_{i=1}^{n} i}$

$$\therefore\ \mathbf{C = \frac{n(n+1)}{2}a}$$

Por ejemplo, para n= 5 y a = 1, se tiene:

1	2	3	4	5
4	5	1	2	3
2	3	4	5	1
5	1	2	3	4
3	4	5	1	2

Todas las hileras, columnas y diagonales principales suman 15

$C = \sum_{i=1}^{n} i = 15$

Observación: Las simetrías del cuadrado $\{I, R_{90}, R_{180}, R_{270}, H, V, D, D^1\}$ proporcionan 7 nuevos cuadros mágicos normales, a partir de un cuadro mágico normal de orden **n**.

Por ejemplo para n= 3, a partir del cuadro lo – Shu:

I=

4	9	2
3	5	7
8	1	6

; R_{90}=

8	3	4
1	5	9
6	7	2

; R_{180}=

6	1	8
7	5	3
2	9	4

R_{270}=

2	7	6
9	5	1
4	3	8

; H =

8	1	6
3	5	7
4	9	2

; V=

2	9	4
7	5	3
6	1	8

D=

4	3	8
9	5	1
2	7	6

;

D^1=

6	7	2
1	5	9
8	3	4

<u>EJERCICIO 2.</u> **BABILONIA (4000 - 600 A. C.).**

1. Demostrar la formula que usaron los Babilonios para el área de un trapecio con uno de los lados perpendicular a los lados paralelos: $\mathbf{A = \frac{1}{2}(a+b)c}$. Encontrar el área para **a = 8**; **b = 5** y **c = 3**, perpendicular a **a** y **b** .

2. Verificar que el valor de π es **3** en la fórmula babilónica para el área de un círculo: $\mathbf{A = \frac{1}{12} C^2}$.

3. Encontrar el error que tenían los Babilonia al calcular el área de un círculo de radio 4, considerando que calculaban **C = 3d**.

4. En una tableta que se encuentra en el Museo de Louvre, en Francia, se calcula el tiempo necesario para duplicar una cierta cantidad **Co** a un interés compuesto anual del 20%. Resolver este problema con la fórmula actual $\mathbf{C1 = Co\,(1+r)^t}$

5. Calcular $\mathbf{(1{\cdot}2)^3}$ **y** $\mathbf{(1{\cdot}2)^4}$ y por interpolación lineal obtener **x** tal que: $\mathbf{(1{\cdot}2)^x = 2}$. Este fue el resultado obtenido por los babilonios en el problema anterior.

6. Resolver el siguiente problema de una tableta babilonia de 1800 A. C. El lado de un cuadrado es **2/3** del lado de otro cuadrado, menos **10**. Si la suma de las áreas de los **2** cuadrados es **1000**, encontrar los lados de los cuadrados.

7. Resolver el siguiente problema similar a los que aparecen en una tableta Babilonia: Encontrar los lados del rectángulo de área **1** y semiperímetro **4**.

8. Una tableta Babilonia contiene una tabla de valores de $\mathbf{n^3 + n^2}$ que sugiere la solución de algunas ecuaciones cúbicas.
Construir una tabla de $\mathbf{n^3 + n^2}$ de **n = 1** a **n = 10** y resolver la ecuación cúbica $\mathbf{(x-1)^3 + 4x^2 - 3x - 391 = 0}$

9. Un problema Babilonio de 1800 A. C. plantea el siguiente sistema de ecuaciones: $\boldsymbol{xyz + xy = \frac{7}{6}}$; $\boldsymbol{y = \frac{2}{3}x}$;
$\boldsymbol{z = 12x}$. Resolver este sistema usando la tabla del problema anterior.
sugerencia: Eliminar y y z por sustitución en la primera ecuación y sustituir **x = (1/12)m**

10. Neugebauer opina que los Babilonios pudieron haber encontrado la igualdad: $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \sum_{i=1}^{n} i^2$ para varios valores de n. Probar por inducción matemática que esta fórmula es válida para todo **n** entero positivo.

11. Encontrar la raíz cuadrada de **66** aplicando la fórmula de aproximación de los babilonios $\mathbf{(a^2 + h)^{1/2} \approx a + \frac{h}{2a}}$

EJERCICIO 3. **EGIPTO (3500-1000 A. C.)**

1. Multiplicar **137** por **48** aplicando el algoritmo de duplicación de los egipcios.

2. En un papiro de 800 A. C., se encuentran descomposiciones de fracciones en suma de fracciones unitarias de fórmula $\frac{z}{pq}=\frac{1}{pr}+\frac{1}{qr}$ donde $r=\frac{p+q}{z}$ Demostrar que esto es correcto.

3. Descomponer en suma de fracciones unitarias las fracciones $\frac{2}{7}$ y $\frac{3}{8}$ aplicando la fórmula del problema anterior.

4. Resolver la ecuación $3x-\frac{x}{5}=42$ por el método de falsa posición de los egipcios.

5. En el papiro Rhind se calcula el área de un círculo con la fórmula $A=\left[\frac{8}{9}d\right]^2$. Encontrar el valor de π que resulta de esta fórmula.

6. Calcular el área de un círculo de radio $r = 5$ con la fórmula egipcia y encontrar el error que se comete, calculando el valor correcto con $A=\pi r^2$

CHINA (Cuadros Mágicos)

7. Demostrar que la constante de un cuadro mágico normal de orden **n** es $C=\frac{n(n^2+1)}{2}$. Encontrar **C** para los cuadros mágicos normales de orden **7, 9 y 16**.

8. Demostrar que el número en la celda central de un cuadro mágico normal de orden **3**, debe ser **5**.

9. Construir un cuadro mágico normal de orden **5**.

10. Construir un cuadro mágico normal de orden **12**.

11. Encontrar una fórmula para la constante mágica de los cuadros no-normales de orden impar mayor que **3**, descritos al final de este capítulo.

12. Construir un cuadro mágico no-normal de orden **7**, con la regla dada para **n** impar mayor que **3**, para **a = 1**.

13. Encontrar los **7** cuadros mágicos normales, a partir del cuadro mágico de Dürer, correspondientes a las simetrías del cuadrado.

14. Demostrar que se puede encontrar un conjunto infinito de cuadros mágicos no-normales, a partir de un cuadro mágico cualquiera.

CAPÍTULO 3

GRECIA. LOS PITAGÓRICOS

3.1 NUEVA CIVILIZACIÓN

Alrededor del año 800 A. C., surge una nueva civilización en la costa oeste de Asia Menor, Grecia e Italia, impulsada por los siguientes sucesos:

1. Egipto y Babilonia pierden su poderío y surgen como nuevas potencias los Griegos, Hebreos, Fenicios y Asirios.
2. Se inicia la Edad de Hierro, mejorando todo lo relacionado con herramientas.
***3.** Se inventa el alfabeto, permitiendo la formalización de la comunicación oral y escrita.
4. Se establecen sistemas de monedas, facilitando el comercio interno e internacional.
5. Se hacen descubrimientos geográficos, estimulando la navegación y el comercio.

3.2 TALES DE MILETO

Notable personaje, del Siglo VI A. C. considerado como el iniciador de la matemática demostrativa a través del método deductivo en la Geometría. También se le reconoce como el iniciador de la Física Formal.

En Geometría, cambia la intuición y las verificaciones empíricas por razonamientos lógicos, estableciendo los siguientes resultados:

1. Los círculos son bisectados por cualquiera de sus diámetros.

2. Los ángulos base de un triángulo isósceles son iguales.

3. Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.

4. Dos triángulos son congruentes si tienen un lado y sus ángulos adyacentes respectivamente iguales.

5. Todo ángulo inscrito en un semi círculo es recto.

EJERCICIO 3. **EGIPTO (3500-1000 A. C.)**

1. Multiplicar **137** por **48** aplicando el algoritmo de duplicación de los egipcios.

2. En un papiro de 800 A. C., se encuentran descomposiciones de fracciones en suma de fracciones unitarias de fórmula $\frac{z}{pq} = \frac{1}{pr} + \frac{1}{qr}$ donde $r = \frac{p+q}{z}$ Demostrar que esto es correcto.

3. Descomponer en suma de fracciones unitarias las fracciones $\frac{2}{7}$ y $\frac{3}{8}$ aplicando la fórmula del problema anterior.

4. Resolver la ecuación $3x - \frac{x}{5} = 42$ por el método de falsa posición de los egipcios.

5. En el papiro Rhind se calcula el área de un círculo con la fórmula $A = \left[\frac{8}{9}d\right]^2$. Encontrar el valor de π que resulta de esta fórmula.

6. Calcular el área de un círculo de radio r = 5 con la fórmula egipcia y encontrar el error que se comete, calculando el valor correcto con $A = \pi r^2$

CHINA (Cuadros Mágicos)

7. Demostrar que la constante de un cuadro mágico normal de orden **n** es $C = \frac{n(n^2+1)}{2}$. Encontrar **C** para los cuadros mágicos normales de orden **7, 9 y 16**.

8. Demostrar que el número en la celda central de un cuadro mágico normal de orden **3**, debe ser **5**.

9. Construir un cuadro mágico normal de orden **5**.

10. Construir un cuadro mágico normal de orden **12**.

11. Encontrar una fórmula para la constante mágica de los cuadros no-normales de orden impar mayor que **3**, descritos al final de este capítulo.

12. Construir un cuadro mágico no-normal de orden **7**, con la regla dada para **n** impar mayor que **3**, para **a = 1**.

13. Encontrar los **7** cuadros mágicos normales, a partir del cuadro mágico de Dürer, correspondientes a las simetrías del cuadrado.

14. Demostrar que se puede encontrar un conjunto infinito de cuadros mágicos no-normales, a partir de un cuadro mágico cualquiera.

CAPÍTULO 3

GRECIA. LOS PITAGÓRICOS

3.1 NUEVA CIVILIZACIÓN

Alrededor del año 800 A. C., surge una nueva civilización en la costa oeste de Asia Menor, Grecia e Italia, impulsada por los siguientes sucesos:

1. Egipto y Babilonia pierden su poderío y surgen como nuevas potencias los Griegos, Hebreos, Fenicios y Asirios.
2. Se inicia la Edad de Hierro, mejorando todo lo relacionado con herramientas.
***3.** Se inventa el alfabeto, permitiendo la formalización de la comunicación oral y escrita.
4. Se establecen sistemas de monedas, facilitando el comercio interno e internacional.
5. Se hacen descubrimientos geográficos, estimulando la navegación y el comercio.

3.2 TALES DE MILETO

Notable personaje, del Siglo VI A. C. considerado como el iniciador de la matemática demostrativa a través del método deductivo en la Geometría. También se le reconoce como el iniciador de la Física Formal.

En Geometría, cambia la intuición y las verificaciones empíricas por razonamientos lógicos, estableciendo los siguientes resultados:

1. Los círculos son bisectados por cualquiera de sus diámetros.

2. Los ángulos base de un triángulo isósceles son iguales.

3. Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.

4. Dos triángulos son congruentes si tienen un lado y sus ángulos adyacentes respectivamente iguales.

5. Todo ángulo inscrito en un semi círculo es recto.

Tales fue respetado como ingeniero, comerciante, maestro, filósofo, astrónomo y matemático. Está considerado como uno de los 7 sabios de la antigüedad.

3.3 PITÁGORAS Y LOS PITAGÓRICOS.

La fuente principal de información sobre Tales y Pitágoras es el ***Compendio Eudemiano***, historia de la Geometría Griega hasta 335 A. C., escrito por Eudemus, ampliado y analizado por Proclus el año 500 D. C.

Pitágoras nació en la isla de Samos el año 572 A. C., estudió con Tales de Mileto. Emigró al puerto griego de Crotona, en el sureste de Italia, donde fundó la Escuela Pitagórica de estudios de Filosofía, Matemáticas y Ciencias Naturales que dio lugar a una fraternidad que practicaba ritos religiosos. La enseñanza era oral e incluía un cuadro básico de materias, llamado Cuadrivium compuesto por Aritmética, Geometría, Astronomía y Música. Otro grupo de materias llamando Trivium completaba la educación de sus miembros o alumnos. En este grupo se estudiaba Gramática, Lógica y Retórica.

Murió a los 80 años y se dice que la fraternidad de los pitagóricos se volvió tan elitista y aristocrática, que las fuerzas democráticas destruyeron el edificio de la escuela y dispersaron la sociedad que se había mantenido durante 2 siglos, después de la muerte de Pitágoras.

3.4 ARITMÉTICA PITAGÓRICA.

Los primeros matemáticos griegos consideraron las relaciones abstractas entre los números como Aritmética y llamaron Logística al arte de realizar cálculos numéricos.

Actualmente, las relaciones abstractas entre los números es la Teoría de Números y la logística griega es la Aritmética.

Los pitagóricos consideraron los divisores de los números naturales para clasificarlos y definir las parejas de números amigables.

Definición: Dos números son amigables si la suma de los divisores propios de uno de ellos es igual al otro y viceversa.

Ellos encontraron la pareja 220 y 284 con esta propiedad y pensaron que era la única, por lo que la grabaron en talismanes que representaban una amistad perfecta; 220 tiene como divisores propios 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 y 110 que suman 284; 284 tiene como divisores propios 1, 2, 4, 71 y 142 que suman 220.

Hasta el año 1636 se conoce un segundo par de números amigables encontrado por Pierre de Fermat:

17,296 y 18,416

	Primos	
17,296	2	
8,648	2	Divisores propios: 1, 2, 4, 8, 16, 23, 46, 47,
4,324	2	92; 94; 184; 188; 368; 376; 752; 1,081; 2,162;
2,162	2	4,324; 8,648
1,081	23	
47	47	
1		Suma = 18,416

	Primos	
18,416	2	Divisores propios: 1; 2; 4; 8; 16; 1,151;
9,208	2	2,302; 4,604; 9,208.
4,604	2	
2,302	2	
1,151	1,151	
1		Suma = 17,296

1638. René Descartes encuentra el tercer par.

1747. El matemático Suizo Leonhard Euler anuncia una lista de 30 pares que después extendió a 60.

1866. A los 16 años, el Italiano Nicolo Paganini encuentra el par relativamente pequeño: 1,184 y 1,210.

Actualmente hay más de 900 pares conocidos

CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS NATURALES.

Los pitagóricos clasificaron los números naturales de la siguiente manera:

a) **Perfectos:** $n \in$ **N** es perfecto si la suma de sus divisores propios es igual a n.

Ejemplos: $6 = 1 + 2 + 3$; $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$

b) **Deficientes:** $n \in$ **N** es deficiente si la suma de sus divisores propios es menor que **n**

Ejemplos: 8. Suma de sus divisores propios $= 1 + 2 + 4 = 7 < 8$ Entonces 8 es deficiente.
Cualquier número primo **P** es deficiente porque su único divisor propio **es 1 < p**

c) **Abundantes:** $n \in$ **N** es abundante si la suma de sus divisores propios es mayor que **n**.

Ejemplos: 12. Suma de sus divisores propios $= 1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 > 12$

30 Suma de sus divisores propios $= 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 10 + 15 = 42 > 30$

Otros ejemplos:

100 Suma de sus divisores propios $= 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 + 25 + 50 = 117 > 100$
$\therefore$ El 100 es abundante.

360 Suma de sus divisores propios $= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 8 + 6 + 9 + 10 + 12 + 15 +$
18 $+ 20 + 24 + 30 + 36 + 40 + 45 + 60 + 72 + 90 + 120 + 180 = 850 > 360$
$\therefore$ El 360 es abundante.

Si asignamos la letra **p** para los números perfectos, la letra **d** para los deficientes y la letra **a** para los abundantes, la sucesión de los primeros números naturales, quitando los primos que son todos deficientes, será como la que se muestra en la página siguiente:

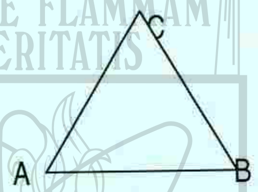
N - Π	Divisores propios	Σ	Clasificación
1	No tiene		
4	1, 2	3	d
6	1, 2, 3	6	p
8	1, 2, 4	7	d
9	1, 3	4	d
10	1, 2, 5	8	d
12	1, 2, 3, 4, 6	16	a
14	1, 2, 7	10	d
15	1, 3, 5	9	d
16	1, 2, 4, 8	15	d
18	1, 2, 3, 6, 9	21	a
20	1, 2, 4, 5, 10	22	a
21	1, 3, 7	11	d
22	1, 2, 11	14	d
24	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12	36	a
25	1, 5	6	d
26	1, 2, 13	16	d
27	1, 3, 9	13	d
28	1, 2, 4, 7, 14	28	p
30	1, 2, 3, 5,6, 10, 15	42	a
32	1, 2, 4, 8, 16	31	d
33	1, 3, 11	15	d
34	1, 2, 17	20	d
35	1, 5, 7	13	d
36	1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18	55	a
38	1, 2, 19	22	d
39	1, 3, 13	17	d
40	1, 2, 4, 5, 8, 10, 20	50	a
≈	≈	≈	≈
496	1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124	496	p

De esta sucesión podemos conjeturar que los números perfectos son pares o que los números impares son deficientes, etc.

CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS. NÚMEROS FIGURALES

Antes de definir los números figurales que determinan sucesiones interesantes, veamos como construían los griegos los primeros polígonos regulares con regla y compás:

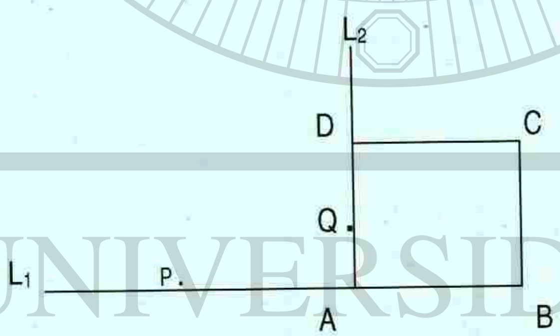
1. Construcción de un triángulo equilátero, a partir de un lado AB:



1. Se trazan arcos con el compás:
a) Centro en A y radio AB
b) Centro en B y radio BA = AB

2. El punto de intersección C es el tercer vértice del triángulo equilátero.

2. Construcción de un cuadrado a partir de un lado AB:



1. Con centro en A y radio AB, se encuentra P en L_1.

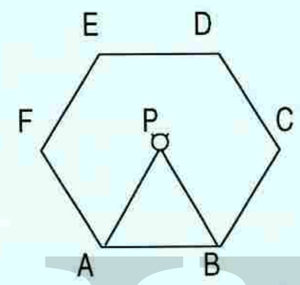
2. Con centro en P y B y radio r > PA = BA se trazan arcos que se interceptan en Q, equidistante de P y B.

3. La recta L_2 que pasa por A y Q es perpendicular a AB, por un teorema de la geometría. D es un punto de L_2 tal que AB = AD.

4. Se trazan arcos con centro en B y D y radio BA = DA. Su intersección determina C, el cuarto vértice del cuadrado.

La construcción de un pentágono regular, a partir de un lado AB requiere de la *Razón Dorada* y el *Pentagrama*, por lo que se verá más adelante.

3.- Construcción del hexágono regular a partir de un lado AB



1. Centro en A y B y radio AB = BA, se encuentra p que hace equilátero al triángulo ABP

2. Con centro en P y radio PB = PA se traza el círculo correspondiente.

3. Con centro en B y radio BP = BA, se encuentra C. Similarmente, con centro en C y radio CP = CB = BA, se encuentra D y así se encuentra E y F para completar los vértices del hexágono regular. A partir del triángulo equilátero se pueden construir polígonos regulares de $3*2^n$ y a partir del cuadrado, podemos construir polígonos regulares de $4*2^n$, con n en los naturales.

El hecho de que los primeros números perfectos sean el 6, número de días empleados para la creación, y el 28 que es el número de días de una lunación completa, además de sus números amigables, explican la tendencia mística de los pitagóricos a utilizar los números en la magia, la astrología, la religión y los horóscopos.

Hasta 1952 había 12 números perfectos conocidos, el tercero es el 496, todos ellos pares.

El último teorema del noveno libro de los ***Elementos*** de Euclides (300 A. C.), establece que si $2^n - 1$ es primo, entonces $2^{n-1}(2^n - 1)$ es perfecto.

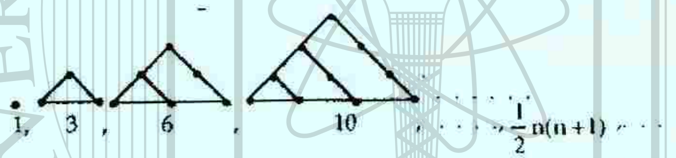
Euler demostró que todo número perfecto par es de esta forma. Hasta la fecha permanece como conjetura la posibilidad de números perfectos impares.

De 1952 a 1961, las computadoras encontraron 12 números perfectos más con la fórmula de Euclides, para **n = 521; 607; 1,279; 2,203; 2,281; 3,217; 4,253; 4,423; 9,689; 9,941; 11,213 y 19,937**.

NÚMEROS FIGURALES O POLIGONALES.

Los matemáticos del período griego, posiblemente los pitagóricos, establecieron una relación entre la aritmética y la geometría a través de lo que llamaran números figurales asociados al número de puntos en sucesiones de polígonos regulares de la siguiente manera:

1. Números Triangulares

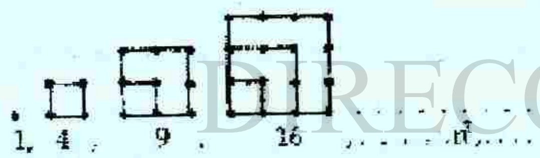


A partir n = 1 que corresponde al 1, seguían con el triángulo equilátero de lado 1, al que asociaban el 3 y así sucesivamente iban agregando una unidad, punteando los extremos de cada unidad, para obtener la sucesión infinita $\{\Sigma i\} = \{\frac{1}{2}n(n+1)\}$ de n = 1 hasta el infinito. De esta manera se obtiene para el enésimo número triangular:

$$T_n = \Sigma i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n}{2}(n+1)$$

$$\boxed{T_n = \frac{1}{2}n(n+1)}$$

2. Números cuadrados



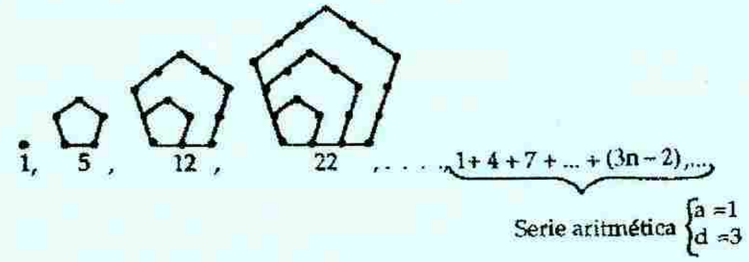
De manera similar a los triángulos, ahora con cuadrados, obtienen la sucesión **$\{\Sigma(2i-1)\} = 1 + 3 + \ldots + (2n-1)$; n = 1, 2, 3, ...,** donde el enésimo número cuadrado es

Cn = 1 + 3 + 5+ ... + (2n - 1), la suma de los primeros n números impares.

$$Cn = \frac{1}{2}n(\cancel{1} + 2n - \cancel{1})$$

$\boxed{Cn = n^2}$ Sucesión de las sumas parciales de la serie de los impares positivos.

3. Números pentagonales



Entonces, el enésimo número pentagonal resulta:

Pn = 1 + 4 + 7 + ... + (3n – 2). Progresión aritmética con a = 1; d = 3 cuya suma es:

$$Pn = \frac{1}{2}n(1 + 3n - 2) = \frac{n}{2}(3n-1)$$

$$\therefore \quad \boxed{Pn = \frac{1}{2}n(3n-1)}$$

De manera similar, siguen con los números hexagonales, heptagonales, octagonales, etc., formando así una sucesión infinita de sucesiones infinitas de números figurales.

A partir de estas asociaciones de números naturales, pueden demostrarse teoremas que relacionan a los números figurales. Por ejemplo:

<u>Teorema 1</u> Todo número cuadrado es la suma del triangular correspondiente más el triangular anterior.

$$C_n = T_n + T_{n-1}$$

Demostración: $T_n = \frac{1}{2}n(n+1)$

$$T_{n-1} = \frac{1}{2}(n-1)(n-1+1) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

$$T_n + T_{n-1} = \frac{1}{2}n(n+1+n-1) = \frac{1}{2}n(2n)$$

$$= n^2 = Cn \qquad \text{L.C.D.D.}$$

Teorema 2 El enésimo número pentagonal es igual a **n** más 3 veces el triangular anterior.

$$Pn = n + 3\,Tn-1$$

Demostración:

$$n + 3T_{n-1} = n + 3\left[\frac{1}{2}(n-1)(n-1+1)\right]$$

$$= n + 3\left[\frac{1}{2}n\,(n-1)\right] = n + \frac{1}{2}n\,(n-1) = \frac{1}{2}n\,(2 + 3(n-1))$$

$$\therefore \quad n + 3T_{n-1} = \frac{1}{2}n\,(2 + 3n - 3)$$

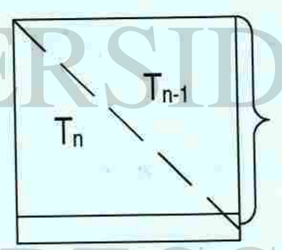
$$= \frac{1}{2}n\,(3n-1)$$

$$= P_n \qquad \text{L.C.D.D.}$$

Estos teoremas pueden demostrarse geométricamente.

Por ejemplo el 1: **Cn** es una matriz **n x n** de puntos tales que de la diagonal principal hacia abajo, forman el enésimo triangular **Tn** y los restantes forman el **Tn-1**. Entonces

$$\mathbf{C_n = T_n + T_{n-1}}$$



Escalas Musicales. Los pitagóricos descubrieron que los intervalos musicales dependen de proporciones numéricas. Encontraron que para cuerdas de material homogéneo sujetas a igual tensión, las longitudes de las cuerdas deben estar en proporción de 2 a 1 para la octava, de 3 a 2 para la quinta

y de 4 a 3 para la cuarta. Entonces, adoptado una unidad de medida para la nota Do, el siguiente Do hacia abajo debe tener longitud ½ y el Do hacia arriba tendrá longitud 2.

Las longitudes de las cuerdas para completar las escalas pueden obtenerse de las proporciones para la cuarta y la quinta

Do ______________________________ $1 = Do$

Re ____________________________ $\frac{4}{3}$ Sol $= \frac{8}{9}$ Do

Mi ___________________________ $\frac{3}{4}$ La $= \frac{64}{81}$ Do.

Fa __________________________ $\frac{3}{4}$ Do. $\qquad \frac{Do}{Fa} = \frac{4}{3}$; Fa $= \frac{3}{4}$ Do.

Sol _________________________ $\frac{2}{3}$ Do. $\qquad \frac{Do}{Sol} = \frac{3}{2}$; Sol $= \frac{2}{3}$ Do.

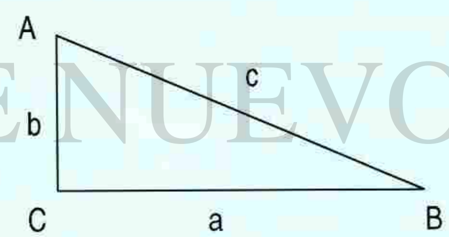
La ________________________ $\frac{2}{3}$ Re $= \frac{16}{27}$ Do.

Si _______________________ $\frac{3}{4}$ Fa $= \frac{9}{16}$ Do.

Do ____________________ $\frac{1}{2}$ Do.

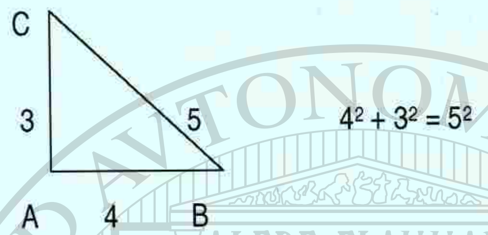
3.5 TEOREMA DE PITÁGORAS.

Este teorema que relaciona los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo fue descubierto y usado por los babilonios y los egipcios.

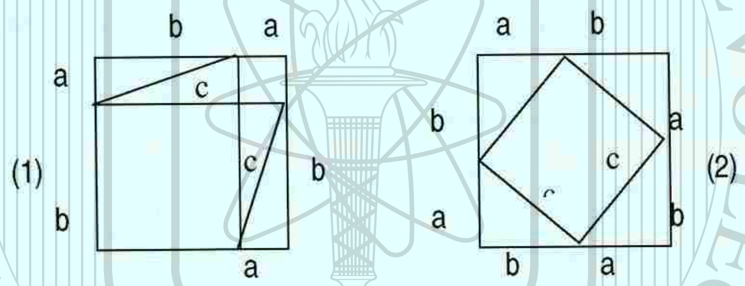


$$a^2 + b^2 = c^2$$

Esta relación es indispensable en construcción, hasta la fecha, para el trazo de espacios rectangulares, comunes en edificios, casas, bodegas, pirámides, tumbas, etc. Actualmente, para obtener una recta perpendicular a una línea recta dada en un punto A, se marca una longitud de 4 metros sobre la recta a partir de A hasta B. Después, se marca en el terreno un arco con centro en A, de radio 3 metros y otro arco con centro en B, de radio 5 metros, que se intersecta con el anterior en C. Entonces AC es perpendicular a AB por el teorema de Pitágoras.



La primera demostración formal del teorema fue dada por Pitágoras por el método de disección (partición), probablemente de la siguiente manera:



El cuadrado de lado (a + b) de la figura (1) se divide en 2 cuadrados de lados a y b y cuatro triángulos rectángulos de lados a y b como se indica. Su área $(a + b)^2 = A$ es

$$\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 4\,(1/2\ ab) = A \quad (1)}$$

El mismo cuadrado de lado (a + b) se divide como se indica en la figura 2 en un cuadrado de lado c y cuatro triángulos iguales de lados a y b de manera que su área será

$$\mathbf{A = c^2 + 4\ (\tfrac{1}{2}ab) \qquad (2)}$$

Igualando (1) y (2) y restando $\mathbf{4\,(\frac{1}{2}\,ab)}$ en ambos lados, se obtiene $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$

Desde la época de los pitagóricos se han dado una gran variedad de demostraciones de este teorema. E. S. Loomis en su libro ***El Teorema de Pitágoras*** presenta una colección clasificada de 370 demostraciones de este teorema tan importante en Matemáticas, Física, Ingeniería, Astronomía, etc.

TERNAS PITAGÓRICAS: $\mathbf{T_p = \{(a, b, c) \in N^3 \mid a^2 + b^2 = c^2\}}$

El estudio de las ternas pitagóricas condujo a los pitagóricos a desarrollar la fórmula siguiente para encontrar ternas pitagóricas: $\left\{ \left[m,\ \frac{m^2-1}{2}\ ,\ \frac{m^2+1}{2} \right] \quad \text{Para } m > 1 \in I = \{\text{impares}\} \right\}$

Verificación: $m^2 + \left[\frac{m^2-1}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}\,(4m^2 + m^4 - 2m^2 + 1)$

$$= \frac{1}{4}\,(m^4 + 2m^2 + 1)$$

$$= \left[\frac{1}{2}(m^2 + 1)\right]^2 = \left[\frac{m^2+1}{2}\right]^2$$

El año 380 A. C., Platón multiplica por 2 los elementos de esta fórmula obteniendo:

$\{(2m,\ m^2 - 1,\ m^2 + 1);\ m > 1 \in N\}$ = Ternas de Platón, que proporciona ternas pitagóricas para cualquier $m > 1\ \varepsilon$ N.

Verificación: $\mathbf{(2m)^2 + (m^2-1)^2 = 4m^2 + m^4 - 2m^2 + 1 = m^4 + 2m^2 + 1 = (m^2 + 1)^2}$

Esta fórmulas no proporcionan todas las ternas pitagóricas. El problema de encontrar todas las ternas pitagóricas se resuelve en los ***Elementos*** de Euclides.

Teorema: Si $(a, b, c) \in Tp$, entonces $(ha, hb, hc) \in Tp$

Demostración: $(ha)^2 + (hb)^2 = h^2a^2 + h^2b^2 = h^2(a^2 + b^2) = h^2s^2 = (hc)^2$

$\therefore \quad (ha, hb, hc) \in Tp$ L. C. D. D.

Calculando las ternas de los pitagóricos y las ternas de platón, para $m > 2 \in$ N, obtenemos las siguientes sucesiones:

M	T pitagóricas	T platónicas
2		(4, 3, 5)
3	(3, 4, 5)	(6, 8, 10)
4		(8, 15, 17)
5	(5, 12, 13)	(10, 24, 26)
6		(12, 35, 37)
7	(7, 24, 25)	(14, 48, 50)
8		(16, 63, 65)
9	(9, 40, 41)	(18, 80, 82)
10		(20, 99, 101)
11	(11, 60, 61)	(22, 120, 122)
12		(24, 143, 145)
13	(13, 84, 85)	(26, 168, 170)
14		(28, 195, 197)
15	(15, 112, 113)	(30, 224, 226)
16		(32, 255, 257)
17	(17, 144, 145)	(34, 288, 290)
18	≈	(36, 323, 325)
	≈	≈

De la tabla podemos conjeturar si todas las ternas de los pitagóricos son primitivas o si las ternas de Platón para **m** par son primitivas, etc.

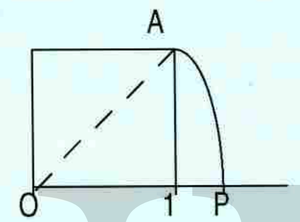
3.6 SEGMENTOS INCONMENSURABLES

La necesidad de contar colecciones finitas de objetos obligó al hombre a utilizar los números naturales en sus diferentes sistemas de números. Al asociar en suma y resta estos conjuntos, los naturales se extienden a los enteros. La necesidad de medir longitudes, tiempos, pesos, etc., requiere de fracciones de la unidad, $\frac{1}{n}$ con $n \in \mathbf{N}$, llamadas fracciones unitarias, dando lugar a los números racionales

$$\mathbf{R^{+} = \left\{ \frac{a}{b} = a\left(\frac{1}{b}\right) \mid a, b \in N \right\}}$$

Los pitagóricos medían magnitudes racionales $\frac{a}{b}$ a partir de un punto sobre una recta, trasladando con el compás la unidad de medida $\frac{1}{b}$, **a** veces, y pensaron que todos los puntos de una recta determinaban magnitudes racionales a partir de un punto origen O.

Sin embargo, al trasladar con el compás la diagonal de un cuadrado, a la recta determinada por el lado base, encontraron una magnitud que no era racional, es decir, que no podía obtenerse a partir de una unidad de medida $\frac{1}{b}$ con $\mathbf{b} \in \mathbf{N}$.



Fracciones Unitarias $\left\{ \frac{1}{b} \mid \mathbf{b} \in \mathbf{N} \right\}$

Esto dio lugar a las siguientes definiciones de segmentos conmensurables, cuya longitud corresponde a nuestros números racionales y segmentos inconmensurables, cuya longitud corresponde a los números irracionales:

Definición 1. Un segmento de recta es conmensurable si tiene una unidad común de medida $\frac{1}{b}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{N}$, con el segmento unitario de longitud 1.

Definición 2. Un segmento de recta es inconmensurable si no tiene una unidad común de medida con el segmento unitario de longitud 1.

La demostración geométrica probable de que $\sqrt{2}$ es irracional fue publicada por Aristóteles (384-322 A. C.).

Se demuestra suponiendo que la diagonal de un cuadrado de lado 1 es conmensurable, es decir que tiene una unidad común de medida con el lado del cuadrado. A partir de esta hipótesis absurda, se deduce geométricamente que esta unidad común de medida, *mide* un cuadrado cuya diagonal es menor que ella, (absurdo)!, por lo que se concluye que $\sqrt{2}$ es inconmensurable, es decir, es irracional.

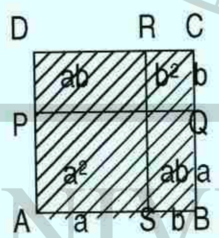
La generalización de este teorema a todos los cuadrados de lado $\mathbf{r} \in \mathbf{R}$, nos proporciona un conjunto infinito de magnitudes inconmensurables en sus diagonales y por lo tanto una infinidad de irracionales.

Eudoxus resolvió el problema que se presentó a los pitagóricos con la inclusión de los irracionales, en su ***Teoría de las Proporciones*** del año 370 A. C., donde trata a los irracionales de manera esencialmente similar a la exposición de Richard Dedekind sobre este tema en 1872.

3.7 ÁLGEBRA GEOMÉTRICA.

Habiendo representado los números por longitudes de segmentos de recta, los griegos, empezando con los pitagóricos, idearon un álgebra geométrica para resolver problemas algebraicos por procedimientos geométricos.

Por ejemplo, el libro II de los ***Elementos*** de Euclides, en su teorema 4, establece el cuadrado de un binomio geométricamente por el método de disección:



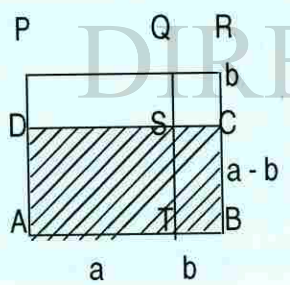
$(a + b)^2 = ABCD$ (Área)

$= ASTP + SBQT + PTRD + TQCR$

$\therefore\ (a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$

El teorema 5 del libro II establece que el producto de una suma por una diferencia de números es igual a la diferencia de sus cuadrados:



$ABCD = ATQP - DSQP + TBRQ - SCRQ$

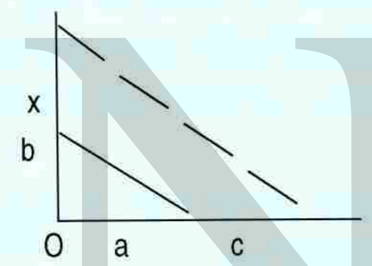
$\therefore\quad (a + b)(a - b) = a^2 \cancel{-\,ab} + ab - b^2$

$= a^2 - b^2$

ECUACIONES ALGEBRAICAS.

Los griegos aplicaron su álgebra geométrica para resolver ecuaciones simplificadas de primero y segundo grado. Así, para resolver la ecuación de primer grado en su forma simplificada $ax = k$; $a, k \in R$, se expresa k como un producto bc para tener a $x = bc$ que equivale a la proporción $\mathbf{x : c = b : a}$ o $\mathbf{\frac{x}{c} = \frac{b}{a}}$

Sobre una recta y a partir de una unidad de medida, se construyen **a** y **c** en sucesión. Sobre otra recta, con el mismo origen, se construye **b**.



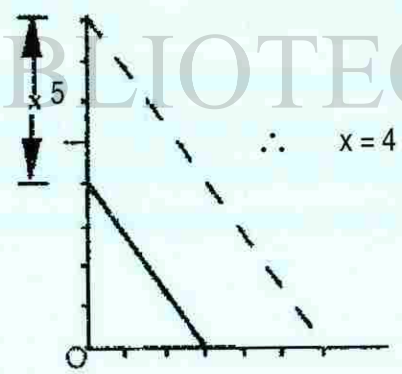
Trazando por el extremo de **c** una paralela a la recta que una los extremos de **a** y **b**, se obtiene **x** que satisface $\mathbf{\frac{x}{c} = \frac{b}{a}}$, por un teorema de la geometría.

Ejemplo: Resolver la ecuación

$3x = 12 = (4)(3)$

$\frac{x}{3} = \frac{4}{3}$

$x = 4$

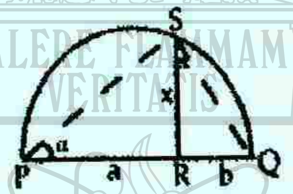


$\therefore\quad x = 4$

4

3 4

De manera similar, para resolver la ecuación cuadrática $x^2 = k$; $k \in R$, se expresa $k = ab$; $x^2 = ab$, de donde $\frac{x}{a} = \frac{b}{x}$. Sobre una recta, se construyen **a** y **b** en sucesión. Con el punto medio de **a + b** como centro, se traza un semicírculo con **(a + b)** como diámetro.

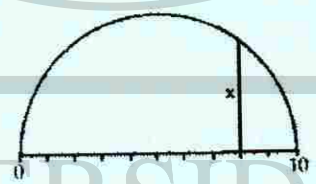


Levantando una perpendicular a PQ en R intersectará al semicírculo en S, resultando los triángulos semejantes PRS y RQS.

$\therefore$ **RS** es la **x** buscaba porque: $\frac{x}{a} = \frac{b}{x} = tg\alpha$

Esto proporciona un método geométrico para obtener la raíz cuadrada de un número **k**, equivalente a resolver la ecuación cuadrática simplificada $\mathbf{x^2 = k}$.

Ejemplo: $\mathbf{x^2 = 16 = (8)(2)}$



x = 4

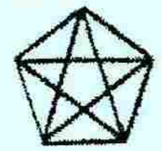
3.8 RAZÓN DORADA

Los pitagóricos consideraron la ***razón dorada*** o ***proporción dorada*** de la siguiente manera:

Definición: Un punto **P** divide un segmento de recta en *proporción dorada* si el subsegmento más largo es la media proporcional entre el más corto y el segmento completo.

Si $\frac{\mathbf{PB}}{\mathbf{AP}} = \frac{\mathbf{AP}}{\mathbf{AB}}$, entonces **P** divide a **AB** en *proporción dorada*.

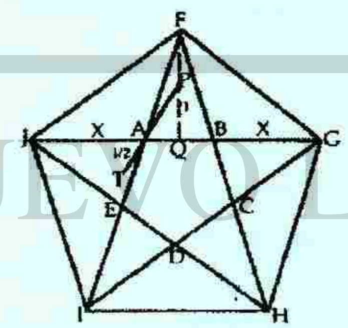
Al construir un pentagrama, estrella regular de 5 puntos, a partir de un pentágono regular, trazando sus diagonales, encontraron que éstas se intersectan en puntos que las subdividen en proporciones doradas.



En esta figura hay parejas de triángulos congruentes y semejantes y se forma un nuevo pentágono regular en el centro. Sobre este pentágono se puede construir un nuevo pentagrama y el proceso puede repetirse sucesivamente.

EL PENTAGRAMA.

Consideremos la construcción con regla y compás de un pentágono regular de lado AB = 1, el pentagrama que lo contiene y el pentágono que determinan las puntas del pentagrama.



El pentagrama es la estrella regular de 5 puntas triangulares iguales. Por proporcionalidad de los lados de los triángulos en la figura, los puntos de intersección de las 5 líneas rectas que forman el pentagrama, dividen a éstas en proporción dorada.

Sean **JG** la diagonal del pentágono exterior que contiene a **AB = 1**. Puesto que **B** divide a **JG** en proporción dorada, se tiene:

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x+1}{2x+1}$$

$$2x^2 + x = x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 - x = 1$$

$$(x - 1/2)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$x - 1/2 = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$\therefore \qquad \underline{x = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}}$$

Para encontrar x con la regla y compás se construye el triángulo rectángulo **PQA**, donde **Q** es el punto medio de **AB** y **PQ = AB = 1**

$$\therefore \qquad PA = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{5/4}$$

$$PA = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Trasladando **AQ =** $\frac{1}{2}$ con el compás hasta la prolongación de **PA** en **T**, se tiene:

$$PT = PA + AT = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$$

PT = x, el lado de la punta del pentagrama.

$\therefore \qquad PT = AJ = BG = AF = BF =$ etc.

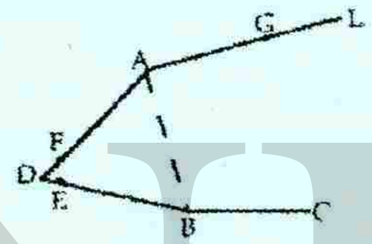
Con el compás se traslada **PT** para encontrar **J**, **G**, y **F**. Sobre las prolongaciones de **FA** y **FB**, se traslada **AB** para encontrar **E** y **C**. Después se encuentra **D**.

Se prolongan los lados del pentágono **ABCD** para tener el pentagrama que lo contiene y con las puntas del pentagrama se tiene el pentágono regular exterior.

El pentagrama fue el emblema de los pitagóricos y, actualmente, de los Rosacruces.

3.9 LA REGLA Y EL COMPÁS.

Las herramientas originales de Euclides, que fueron previamente utilizadas por los pitagóricos, consisten en una regla, sin graduación ó escala, con la cual se puede trazar una recta a través de 2 puntos cualquiera y un compás con el cual se puede trazar un círculo con cualquier punto como centro y pasando por cualquier otro punto. Este compás "original" no puede trasladar la longitud de un segmento BC a otra recta L directamente, lo cual es permitido por el compás "moderno". Sin embargo, podemos demostrar que resuelve este problema indirectamente, por lo que el compás original y el moderno son equivalentes:



Para trasladar la longitud de **BC** a la recta **L**, a partir del punto **A**

1) Se traza **AB** y se construye el triángulo equilátero **ABD**.
2) Se traza el círculo con centro en **B** y radio **BC**, que intersecta a **BD** en **E**.
3) Se traza el círculo con centro en **D** y radio **DE** que intersecta **AD** en **F**.

$\therefore$ Por construcción:

BD = AD
ED = FD

BD – ED = AD – FD
$\therefore$ BE = AF

Pero BE = BC por construcción
$\therefore$ AF = BC

Se traza un círculo con centro **A** y radio **AF** que intersecta la recta **L** en **G**, resultando **AG = AF = BC**

AG = BC L. C. D. C.

Si **BC > BD**, se marca **E** en la prolongación de **BD**, se procede de manera similar, prolongando **AD** para encontrar **F** y sumando segmentos se obtiene **AF = BC**.

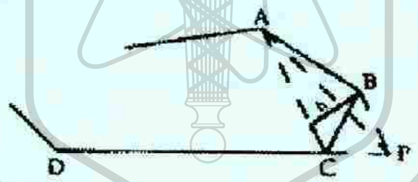
ÁREA DE UN POLÍGONO POR REDUCCIÓN.

Con regla y compás se puede:

1) Trazar una ⊥ a una recta dada **AC**, por un punto cualquiera **B**.
2) Trazar || a una recta dada **AC**, por un punto cualquiera **B**.

Un polígono de **n** lados de área **A** puede transformarse en otro polígono equivalente en área, con un vértice menos y por lo tanto, con **(n-1)** lados, de la siguiente manera:

Consideremos el polígono **ABCD...**



Para eliminar el vértice **C**, se trazan **AC** y **BP** paralela a **AC**.

Entonces los triángulos **ABC** y **APC** tienen la misma área por tener la misma base **AC** y la misma altura **h** Por lo tanto el área del polígono **ABCD...** es igual al área del polígono **APD...**, con un lado menos. Repitiendo el proceso, se puede obtener un triángulo de área equivalente al polígono original. **<u>ABC</u>** = **<u>APC</u>**

Entonces ACD... + ABC = ACD... + APC

∴ <u>ABCD...</u> = <u>APD...</u>

Área (polígono de **n** lados) = Área (Polígono de **(n-1)** lados)

Euclides resuelve el problema transformando el polígono de **n** lados en un cuadrado de área igual, aplicando los teoremas 42, 44 y 45 de su libro I y el 14 de su libro II, resultando un proceso más complicado.

Actualmente, se resuelve obteniendo las coordenadas de los vértices, referidas a un sistema de ejes rectangulares y mediante áreas de trapecios resulta la fórmula de Simpson:

$$A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i + y_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$$

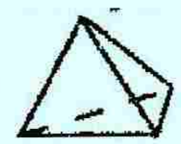
Donde para **i = n, i + 1 = n + 1= 1** (Orden Cíclico)

3.10 <u>SÓLIDOS REGULARES.</u>

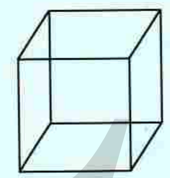
Definición: Un poliedro es regular si sus caras son polígonos regulares iguales y sus ángulos poliedrales son todos iguales.

El pitagórico Timaeus de Locri, describió los únicos 5 poliedros regulares que hay en el espacio tridimensional:

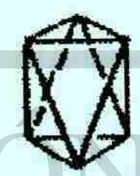
1. Tetraedro: 4 caras, triángulos equiláteros iguales.



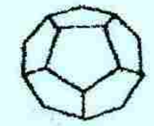
2. Exaedro: Cubo 6 caras cuadradas.



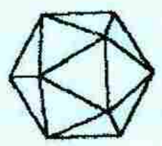
3. Octaedro: 8 caras triangulares.



4. Dodecaedro: 12 caras pentagonales.



5. Icosaedro: 20 caras triangulares.



Los pitagóricos asociaron estos únicos 5 sólidos regulares a los 4 elementos fundamentales de la **Teoría de Empédocles** sobre la naturaleza de los cuerpos materiales, y el universo de la siguiente manera:

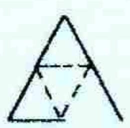
1. **Fuego** → Tetraedro (menor volumen)
2. **Agua** → Icosaedro (mayor volumen)
3. **Tierra** → Cubo (mayor estabilidad)
4. **Aire** → Octaedro (mayor movilidad sostenido por vértices opuestos).
5. → **Universo** Dodecaedro (12 signos del zodiaco).

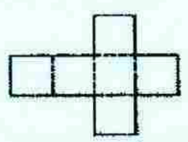
Los 5 sólidos regulares se encuentran en la naturaleza en las siguientes formas:

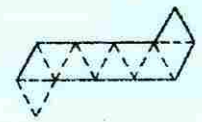
Tetraedro:	Cristales de Sulfantimoniato de sodio.
Exaedro:	Cristales de cloruro de sodio.
Octaedro:	Cristales de Cromo Alumbre.
Dodecaedro } Icosaedro →	Esqueletos de Radiolarias (animales marinos microscópicos).

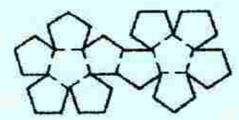
CONSTRUCCIÓN DE LOS POLIEDROS REGULARES:

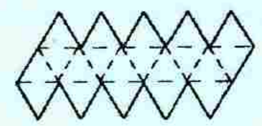
Recortando sobre un cartón las siguientes figuras, se obtienen los 5 sólidos regulares











Estos dibujos se hacen con las herramientas de Euclides y aparecen en las páginas 86 - 89 del libro ***CONCEPTOS MATEMÁTICOS un enfoque Histórico*** de Margaret F. Willerding Edit. C. E. C. S. A.

EJERCICIO 4. **ARITMÉTICA PITAGÓRICA.**

1. Verificar que la pareja de números **1184** y **1210**, encontrada por Nicolo Paganini en 1866, es amigable.

2. La fórmula de Euclides para encontrar números perfectos establece que si $2^n - 1$ es primo, entonces $2^{n-1}(2^n - 1)$ es perfecto. Demostrar que si **n** no es primo, entonces $2^n - 1$ no es primo.

3. Verificar que para **n = 2, 3, 5 y 7**, 2^n**-1** es primo y así encontrar los primeros 4 números prefectos de la fórmula de Euclides.

4. Demostrar que la suma de los recíprocos o inversos multiplicativos de todos los divisores de un número prefecto es igual a **2**.

5. Un número oblongo es el número de puntos en un arreglo rectangular con una columna más que hileras. Si **n** es el número de hileras, establecer la sucesión de los números oblongos para **n = 0, 1, 2, 3, ...**

6. Demostrar que el enésimo número oblongo es igual a la suma de los primeros **n** números pares positivos.

7. Demostrar que 8 veces el enésimo número triangular más uno es igual al número cuadrado $2^n + 1$ en la sucesión de los números cuadrados.

8. Demostrar que el enésimo número oblongo es igual al doble del enésimo número triangular.

9. Los pitagóricos definieron las medias: aritmética, geométrica y armónica como $A = \frac{a+b}{2}$, $G = \sqrt{ab}$ y $H = \frac{2ab}{a+b}$. Demostrar que $A > G > H$ donde la igualdad se satisface si y solo si **a = b**

10. Demostrar la proporción musical **a : A = H : b**

11. Verificar que **8** es la medida armónica entre **12** y **6**. Explicar por qué los pitagóricos llamaron al cubo la armonía geométrica.

12. Demostrar que después del **6**, que es perfecto, todos los múltiplos de **6** son abundantes. Es decir, que **6k** es abundante para todo $k > 1 \in N$.

EJERCICIO 5. **ÁLGEBRA GEOMÉTRICA DE LOS PITAGÓRICOS.**

1. Encontrar las ternas de la fórmula pitagórica para las cuales la hipotenusa no exceda a **100**.

2. Probar que la línea recta que pasa por los puntos **P(0, 0)** y **Q (l,** $\sqrt{2}$ **)**, pasa únicamente por el punto **(0,0)** de la celosía racional rectangular.

3. Demostrar por reducción a lo absurdo que $\sqrt{2}$ es irracional. Por el mismo método demostrar que **log 2** es irracional.

4. Establecer geométricamente las siguientes identidades algebraicas:
   a) $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
   b) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b2$

5. Dados **3** segmentos de recta desiguales, **a** el mayor, **b** el mediano y el pequeño de una unidad de longitud, construir con regla y compás segmentos de recta de longitud (a + b) y (a – b).
   Sumar y restar **6** y **3** con regla y compás, a partir de una unidad de medida **1**.

6. Dados los segmentos del problema anterior, construir con regla y compás segmentos de longitudes **ab** y $\frac{a}{b}$
   Multiplicar y dividir 6 y 3 con regla y compás.

7. Resolver geométricamente, con regla y compás, las siguientes ecuaciones:
   a) $3x = 21$
   b) $x^2 = 12$

8. Resolver la ecuación cuadrática $x^2 - 6x + 8 = 0$, transformándola en $(x - a)^2 = b$ aplicando el método geométrico de regla y compás.

9. Sobre un segmento **AB** de recta, construir con regla y compás un triángulo equilátero, el círculo que lo circunscribe y el hexágono inscrito en este círculo.

10. En un círculo cualquiera, construir con regla y compás un cuadrado y un octágono regular inscritos en el círculo.

11. Muestre que la proporción dorada $\frac{x}{y} = \frac{y}{x+y}$ es $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. **Sugerencia**: Dar **a** y el valor **1** y resolver para **x** la ecuación resultante para obtener el valor de la proporción dorada $\frac{x}{y}$.

12. Si las diagonales de un pentágono se cortan en proporción dorada, construir con regla y compás un pentágono a partir de un lado del mismo.

13. Construir con regla y compás, un hexágono regular inscrito en un círculo, el hexagrama (estrella regular de puntas) que determinan sus diagonales y el hexágono regular interior del hexagrama.

CAPÍTULO 4

ÉPOCA GRIEGA (600 - 300 A. C.)

4.1. GRECIA, DEL 600 AL 300 A. C.

Este notable período de la matemática formal se inicia con la ***Geometría Demostrativa*** de Tales y culmina con los ***Elementos*** de Euclides. Durante este período, los sucesos más importantes que evolucionan a Grecia son los siguientes:

a) Persia se transforma en una potencia militar y domina las colonias griegas de Asia menor en 546 A. C., e intenta invadir la península Griega en varias ocasiones sin éxito.

b) Los persas basan su desarrollo en la esclavitud, provocando una emigración de los griegos hacia las colonias de la costa de Italia.

c) De 480 a 430 A. C., hay un período de paz. Los matemáticos griegos dispersos vuelven a Atenas y la convierten en un centro de desarrollo intelectual (Pericles, Sócrates, Zenón, etc.).

d) De 430 a 370 A. C., hay un nuevo período bélico y una epidemia mata ¼ de la población de Atenas.

Después del 370 A. C., los pitagóricos emigrados regresan a Grecia con el compromiso de no participar en cuestiones políticas.

4.2 PRINCIPALES ESCUELAS GRIEGAS DE FILOSOFÍA Y MATEMÁTICAS.

Durante este período se fundan escuelas en Atenas y las colonias griegas, de las cuales, las más importantes son las siguientes:

1. Mileto. En este colonia griega de Asia Menor, funda Tales la **Escuela** donde estudió Pitágoras.

2. Crotona. Colonia griega de la costa de Italia, donde inicia Pitágoras la escuela de los primeros pitagóricos.

3. Elea. Colonia griega en Italia, donde Zenón y Parménides fundan su escuela.

4. Atenas. En la capital de Grecia inician su escuela Pericles y Sócrates, seguidos por Platón y posteriormente por los pitagóricos Zenón y Parménides de Elea y por Hipócrates de Asia Menor.

5. Tarento. Colonia griega en Italia donde se funda la escuela iniciada por Archytas.

6. Cycius. Colonia griega del noroeste de Asia Menor donde se funda la escuela de Eudoxus, alumno de Archytas y Platón.

7. Cyrene. Fundada por Teodoro, en el norte de África.

En el año 300 A. C., Ptolomeo funda la primera Universidad en la Ciudad de Alejandría, en donde enseña Euclides y estudian importantes personajes como Arquímedes, que se establece en Siracusa en la Isla de Sicilia y Apolonio en Perga, al Suroeste de Asia Menor.

-77-

4.3 FILÓSOFOS NOTABLES.

PLATÓN (427-347 A. C.) RESUMEN BIOGRÁFICO.

Nació en Atenas, el año 427 A. C., estudió matemáticas en Cyrene, como discípulo de Teodoro y Archytas, y Filosofía en Atenas, como discípulo de Sócrates.

El año 387 A. C., fundó en Atenas su famosa **Academia** para estudios filosóficos y científicos, grabando en su entrada el lema *No permitan entrar aquí a quien no sea versado en Geometría.*

Los diálogos de Platón están considerados como el primer intento de una Filosofía de las Matemáticas.

Fue Director de la Academia de Atenas hasta su muerte en 347 A. C., a la edad de 80 años.

La mayor parte del avance matemático del siglo IV A. C., fue realizado por alumnos de Platón, como Eudoxus quien a su vez fue maestro de Menaechmus, primero en estudiar las secciones cónicas.

ARISTÓTELES. (384-322 A. C.)

Aunque no fue matemático propiamente, influyó en los matemáticos de su época. Escribió la primera lógica deductiva. Consideraba que el infinito y los procesos infinitos no eran indispensables para los matemáticos. *Resolvió* las paradojas de Zenón aplicando el sentido común. Apoyó la **Teoría Geocentrista** que establece a la tierra como el centro del Universo y los astros girando en órbitas circulares alrededor de ella, porque el hombre, siendo el ser más importante, debe estar en el centro del Universo. Está considerado como el primer enciclopedista por haber escrito de todo lo que se discutía en su época en Medicina, Biología, Astronomía, Física, Ciencia Política, Matemáticas, etc.

4.4. <u>TRES PROBLEMAS FAMOSOS.</u>

Con las herramientas de Euclides, regla y compás, se trata de resolver los siguientes problemas que impulsaron las matemáticas, especialmente la ***Geometría Superior*** de curvas y figuras diferentes a las formadas por rectas y círculos.

1. **<u>Trisección de un ángulo</u>.** Dividir un ángulo cualquiera en tres ángulos iguales.

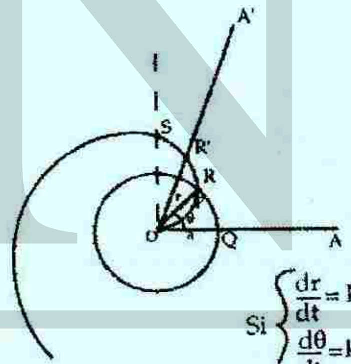
2. **<u>Duplicación de un cubo</u>.** Construir el lado de un cubo que tenga el doble de volumen de un cubo dado.

3. **<u>Cuadratura del círculo</u>.** Construir un cuadrado que tenga área igual a la de un círculo dado.

Los intentos para resolver estos problemas impulsaron a los matemáticos a estudiar las secciones cónicas, curvas polinómicas de segundo grado y otras curvas cúbicas y cuárticas y hasta algunas trascendentes. Por ejemplo el **Conchoide** de Nicomedes, la **Cuadratrix** de Hippias y las **espirales** de Arquímedes, estas últimas dos no-algebraicas o trascendentes. Esto condujo a soluciones aproximadas con la regla y el compás y medios mecánicos.

La imposibilidad de resolver estos problemas con regla y compás fue demostrada hasta fines del siglo XIX con los elementos de la **Teoría de Galois** aplicada a la teoría de ecuaciones, los números algebraicos y su relación con los números constructibles.

Como ejemplo para la cuadratura del círculo, Arquímedes define, en el año 225 A. C., su espiral en términos dinámicos, como el lugar geométrico de un punto **P** que se mueve con velocidad uniforme por un radio que a su vez está girando con velocidad angular constante con respecto a su origen. En coordenadas polares, con la posición inicial del radio **OA** horizontal y **P** coincidiendo con el origen **O**, tenemos que **OP = r** es proporcional al ángulo **AOP** igual al arco **QR**. Si **a** es el radio del círculo, se tiene:



$$\text{Si}\begin{cases}\dfrac{dr}{dt}=k_1\\ \dfrac{d\theta}{dt}=k_2\end{cases}\;:\;\frac{dr}{d\theta}=\frac{k_1}{k_2}=a$$

$$\therefore\ \underline{r=a\theta}$$

Trazando **OS** perpendicular a **OA**, la longitud de **OS** será:

$$\overline{OS}=\frac{\pi}{2}a=\frac{1}{4}C\Rightarrow\ C=\overline{4OS}=2\pi a\Rightarrow\ \overline{OS}=\frac{1}{2}a\pi$$

Ahora, el área del círculo es:

$$A=\pi a^2=\frac{1}{2}aC$$

$$A=\frac{1}{2}a(\overline{4OS})=2a\bullet\overline{OS}$$

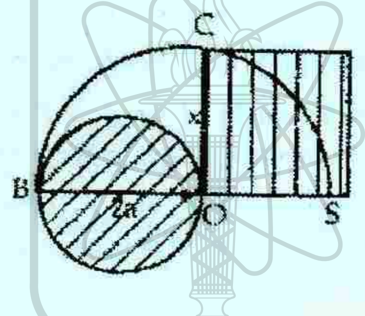
Ahora, sea **x** el lado del cuadrado de área igual a la del círculo. Entonces:

$$x^2 = 2a \cdot \overline{OS}$$

$$\therefore \quad \frac{2a}{x} = \frac{x}{\overline{OS}}$$

Resolviendo por el método pitagórico con $\overline{OS} = \frac{1}{2} a\pi$

Para **a = 2cms.**; $\overline{OS} = \pi$ *cms* Si **a = 1**, entonces $\overline{OS} = \frac{1}{2}\pi \approx$ **1.57 cm**.



x $\approx$ **1.7725** cms.

3.1416 $\approx$ A = π = A $\approx$ 3.1416

Esta última construcción geométrica se obtiene de la espiral, (figura anterior) trasladando con el compás **OS** al eje horizontal **OA**. Después, con la regla, se prolonga **OA** hacia la izquierda y se marca **2a** con el compás. Se determina el punto medio de **BS** para trazar el semicírculo de diámetro **BS**.

Entonces, la perpendicular a **BS** en **O** nos proporciona el lado del cuadrado **x = OC**, con la regla y el compás se traza el cuadrado de lado **x** que tiene un área igual a la del círculo de radio **a.**

El problema de la cuadratura del círculo conduce a la investigación sobre la posibilidad de que el número π sea racional.

4.5 HISTORIA CRONOLÓGICA DEL NÚMERO π.

En 1882 se demostró que el número π es trascendente y por lo tanto no es constructible con regla y compás, ya que todos los números constructibles son algebraicos. Esto resolvió el problema de la cuadratura del círculo en sentido negativo, es decir, no es posible construir con regla y compás un cuadrado de área igual al área de un círculo dado. Durante más de 2000 años se calculó

aproximadamente el número π, para resolver problemas relacionados con él y determinar si era constructible.

La estimación de π tiene la siguiente cronología sintetizada:

1650 A. C. En el papiro Rhind aparece $\pi = \left(\frac{4}{3}\right)^4 = 3.1604$.

240 A. C. Arquímedes encuentra que el número π está entre $\frac{223}{71}$ y $\frac{22}{7}$, calculando perímetros de polígonos inscritos y circunscritos en un círculo de diámetro **1**. Promediando, obtiene $\pi = 3.1418$ en su trabajo **La Medida del Círculo**.

150 D. C. Claudio Ptolomeo en su ***Sintaxis Matemática*** tabula las cuerdas subtendidas cada ½ grado en un círculo de diámetro **1** y estima π como **360** veces la cuerda correspondiente a 1º grado como aproximación de la circunferencia **C =** π**d =** π**,** obteniendo π **= 3.1416**. Esto corresponde al perímetro del polígono de **360** lados inscrito en un círculo de diámetro **1**.

1579 Francois Viète encuentra π correcto a **9** decimales por el método clásico usando polígonos de **6(2^{16}) = 393, 216** lados.

1610 El alemán Ludolph Van Ceulen calcula π a **35** decimales promediando polígonos de **2^{62}** lados. Este número fue grabado en su tumba y se le llamó el número Ludolfino.

1621 El holandés Willebrand Snell ideó un método trigonométrico para mejorar el método clásico de polígonos y obtuvo el número ludolfino con polígono de **2^{30}** lados.

1630 El alemán Grienberger calculó π a **39** decimales con el método de Snell, para obtener la máxima aproximación calculada por perímetros

1671 El escocés James Gregory encontró la serie:

$$Tg^{-1}x = x - 1/3\,x^3 + 1/5\,x^5 - 1/7\,x^7 + \ldots (-1 \le x \le 1)$$

para x = 1 resulta:

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots$$

Aunque esta serie armónica alternante converge lentamente, fue usada para estimar π

1699 Abraham Sharp encontró π aproximado a **71** decimales de la serie de Gregory con

$$x = \sqrt{1/3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Por este método el francés De Lagny obtuvo π con **112** decimales

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3(3)}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{5(9)}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{7(27)}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \ldots$$

$$\pi = \frac{6}{\sqrt{3}}\left(1 + \frac{1}{3(3)} + \frac{1}{5(9)} + \frac{1}{7(27)} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)3^{n-1}} \right)$$

Para n = **10**

= 3.4641(1 - .111111 + 0.0222 – 0.37037 + … - 0.000002674) = 3.14159

1737 Leonhard Euler adopta y generaliza el uso del símbolo π para la relación de la circunferencia al diámetro

1767 Johann Lambert demostró que π es irracional

1844 El alemán Zacharías Dase (1824-1861) encontró π a **200** decimales correctos con la serie de Gregory y la relación:

$$\frac{\pi}{4} = tg^{-1}(1/2) + tg^{-1}(1/5) + tg^{-1}(1/8)$$

$$= 26.56 + 11.31 + 7.13 = 45^{\circ}$$

Dase vivió 37 años; se le conoce como el más notable calculista mental de todos los tiempos. Calculaba mentalmente:

- **a)** El producto de 2 números de 8 dígitos en 54 segundos
- **b)** El producto de 2 números de 20 dígitos en 6 minutos
- **c)** El producto de 2 números de 100 dígitos en 8 horas 45 minutos
- **d)** La raíz cuadrada de un número de 100 dígitos en 52 minutos

1853 El inglés William Rutherford calcula π a 400 decimales correctas

1882 F. Lindemann demostró que π es trascendente

1906 Empiezan a aparecer frases como reglas nemotécnicas para el número π. Ejemplo:

" May I have a large container of Coffee"? = 3.1415926.

Una frase en español que proporciona π a 11 decimales es:

"Voy a casa a comer camarones en cóctel picoso con salsa mexicana" = 3.14159266358

1948 D. F. Ferguson y J. W. Wrench calculan π a 808 decimales correctas
1949 Con la computadora ENIAC de Maryland se calcula π a 2037 decimales

1959 En París, Francois Genuis, calcula π con 100, 167 decimales en una IBM 704

1966 Jean Guilloud obtiene π con 250,000 decimales en una STRETCH

1967 Guilloud obtiene π con 500,000 decimales en una CDC6600

La expansión de π con un número grande de decimales parece indicar que es un número "normal".

Definición: Un número es normal si en su expansión decimal, en todos lo bloques de cierta longitud, los dígitos ocurren con igual frecuencia. No se ha determinado si π es normal, ni siquiera si $\sqrt{2}$ es normal.

π y sus decimales se utilizan para muestras aleatorias.

4.6 PARADOJAS DE ZENÓN

Otro suceso importante de este periodo es la consideración de procesos infinitos que aparecen en el principio de la subdivisión infinita y el método exhaustivo de Eudoxus, en las sumas infinitas de las paradojas de Zenón y en la **Teoría Atomística** de Demócrito. Esto conduce a los infinitesimales y las series o sumas infinitas, que son antecedentes del cálculo y que culminan con las áreas y volúmenes calculados posteriormente por Arquímedes.

Demócrito fue un filósofo griego del siglo IV A. C., autor de la **Teoría Atomística** que señala lo siguiente:

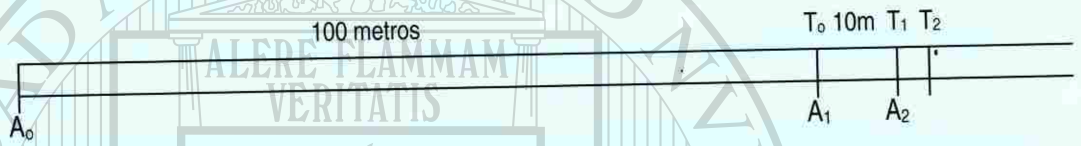
"Todo está constituido por **átomos** materiales **indivisibles** que tienen entre sí solo diferencias cuantitativas. Se mueven en torbellinos en el espacio infinito siguiendo leyes mecánicas. El alma es también material, pero está constituida por átomos más ligeros. El conocimiento se obtiene por recepciones de imágenes sutiles que se desprenden de las cosas y son réplicas de ellas**"**.

Las paradojas de Zenón, basadas en el principio de la subdivisión infinita y en la consideración de que la suma infinita de cantidades positivas es infinita, produjeron el efecto negativo de una tendencia entre algunos matemáticos a eliminar los infinitesimales.

Consideremos los siguientes ejemplos:

1. La paradoja de Aquiles y la Tortuga:

Aquiles, campeón olímpico, trata de alcanzar a una tortuga en una pista recta, dándole una ventaja inicial de 100 metros.



Sean A_0 y T_0 las posiciones iniciales de Aquiles y la tortuga en la pista recta.

Consideremos que Aquiles corre 10 metros por segundo mientras que la tortuga corre 1 metro por segundo, entonces

$\mathbf{V_A = 10}$ **mts. / seg.** ; $\mathbf{V_T = 1}$ **mt. / seg.**

Entonces Aquiles tarda $\mathbf{t_1 = 10}$ segundos en alcanzar la posición inicial de la tortuga. Pero la tortuga ya no está ahí, porque ha avanzado 10 metros en los 10 segundos. Ahora Aquiles tarda $\mathbf{t_2 = 1}$ segundo en alcanzar la nueva posición T_1 de la tortuga. Pero la tortuga ya no está ahí, porque ha avanzado un metro a la posición T_2. De nuevo Aquiles tarda **1/10** de segundo en alcanzar la nueva posición T_2 de la tortuga. Pero la tortuga ya no está ahí y este proceso puede repetirse indefinidamente.

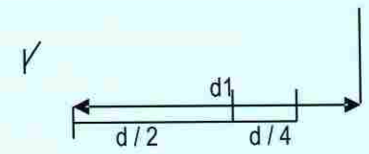
Sumando los tiempos que acumula Aquiles tratando de alcanzar a la tortuga, se tiene lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^{\infty} t_i = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots$$

Puesto que esto es una suma infinita de cantidades positivas, es igual a ∞ y Aquiles nunca alcanzará a la tortuga, produciéndose la paradoja.

Desde luego, ahora sabemos que $\sum_{i=1}^{\infty} t_i = \sum_{i=1}^{\infty} 10\left(\frac{1}{10}\right)^{i-1}$ es una serie Geométrica donde la razón $r = \frac{1}{10} < 1$, y por lo tanto es convergente y su valor es $s = \frac{a}{1-r} = \frac{10}{1-1/10} = \frac{10}{9/10} = \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$., tiempo que tarda Aquiles en alcanzar a la tortuga.

2. Paradoja del movimiento imposible



Para llegar al *Blanco* la flecha tiene que recorrer una distancia **S = d/2**. Supongamos que tarda un tiempo **t = 1** seg. Para llegar al punto medio de la distancia **d** hasta el *Blanco*. Entonces:

Si t_0 = 1 seg., para S = d/2
t_1 = ½ seg., para S = d/4
t_2 = ¼ seg., .
t_3 = 1/8 seg., .
. . .
. . .
. . .

$$\sum t_i = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i} = \square\sum$$

Esto produce la paradoja de que el movimiento de la flecha nunca se inicia o que si la flecha sale del arco, nunca llegaría al blanco. La solución de esta paradoja es similar a la anterior.

4.7 EUCLIDES

Antecedentes: Alejandría.

En el año 338 A. C., Grecia pasó a formar parte del Imperio Macedonio. Dos años después, Alejandro Magno sustituye en el poder a su padre Filipo, extendiendo sus dominios hasta Egipto, donde fundó la ciudad de Alejandría en la costa egipcia del Mediterráneo, hacia el año 332 A. C.

Con su muerte, acaecida en el año 323 A. C., el imperio se divide en 3 partes de las cuales la que incluye a Egipto pasó a poder de Ptolomeo, quien en el año 300 A. C. construye en Alejandría la primera Universidad con salas de clase, laboratorios, museos y una biblioteca que a los 40 años de fundada tiene 600,000 rollos de papiro.

No se conocen el lugar y fecha de nacimiento de Euclides, pero se sabe que fue llevado de Atenas a la Universidad de Alejandría, donde fundó la Escuela Alejandrina de Matemáticas; es autor de más de 10 obras de matemáticas, pero lo más sobresaliente fueron sus ***Elementos*** que contienen las matemáticas hasta esa época. La primera traducción al latín se realizó desde el idioma árabe, en el siglo VIII.

La primera edición en inglés fue en 1570. Las 465 proposiciones o teoremas aparecen en 13 libros, de los cuales I, III, IV, XI y XII contienen material que actualmente se enseña en el nivel medio.

4.8 CONTENIDO DE LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES

Libro I. Contiene 48 teoremas divididos en 3 grupos. Los primeros 26 tratan con propiedades y congruencias de triángulos. Del 27 al 32 tratan la teoría de las paralelas y el teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo igual a dos ángulos rectos. Los restantes tratan con paralelogramos, triángulos y cuadrados, incluyendo relaciones de áreas y el Teorema de Pitágoras.

Libro II. Contiene 14 teoremas sobre áreas de polígonos por el método de reducción y álgebra geométrica de la escuela pitagórica. Los últimos 2 teoremas se refieren a la ley de los cosenos.

Libro III. Contiene 39 teoremas sobre círculos, cuerdas, tangentes y medida de ángulos.

Libro IV. Contiene 16 teoremas sobre construcciones con regla y compás de polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 y 15 lados, su inscripción y circunscripción en un círculo dado. Desde luego esto resuelve la construcción de polígonos de 2^n por cada uno de los casos: **3, 4, 5 y 15** $n \in N$.

Observación: Hasta el siglo XVIII no hubo otros polígonos regulares construidos con las herramientas de Euclides. En 1796, el matemático alemán Kart F. Gauss desarrolló una teoría para demostrar que un polígono regular de un número primo de lados puede construirse con regla y compás si y sólo si ese número es de la forma $f(n)=2^{2^{n-1}}+1$

Para n = 1, 2, 3, 4, 5, se obtiene f (n) = 3, 5, 17, 257, 65 537, todos números primos. En 1832, Richelot publicó una investigación sobre el polígono regular de 257 lados y H. Lingen trabajó 10 años en la construcción del polígono de 65 537 lados.

Libro V. Contiene la teoría de las proporciones de Eudoxus, que posteriormente proporcionó la base para la construcción de los números reales de Dedekind y Weierstrass en el siglo XIX.

Libro VI. Se aplica la teoría de proporciones a la Geometría Plana en los teoremas fundamentales de triángulos semejantes y en la solución de ecuaciones cuadráticas geométricamente.

También se dan las generalizaciones del teorema de Pitágoras donde en lugar de cuadrados, figuras similares se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.

Libro VII. Contiene la teoría elemental de números, empezando con el algoritmo euclidiano para el máximo común divisor entre 2 números y su aplicación para determinar si 2 números son primos entre sí.

Libro VIII. Trata ampliamente con proporciones continuas y las progresiones geométricas correspondientes.

Dada la proporción continua $b_o : b_1 = b_1 : b_2 = b_2 : b_3 = \dots$, $b_o, b_1, b_2, b_3, \dots$ están en progresión geométrica.

Libro IX. Contiene el ***Teorema Fundamental de la Aritmética:*** *Todo entero mayor que 1 puede expresarse esencialmente en forma única como un producto de números primos.* También establece la notable fórmula para números perfectos: Si $\mathbf{2^n - 1}$ es primo, entonces $\mathbf{2^{n-1}(2^n - 1)}$ es perfecto.

Además contiene la demostración de que el conjunto de números primos es infinito.

Libro X. Trata fundamentalmente con la aplicación de la teoría de proporciones y el método exhaustivo de Eudoxus para la teoría de los irracionales o inconmensurables. Los libros **VIII, IX** y **X** contienen 102 teoremas.

Libros XI, XII y XIII. Trata acerca de la geometría del espacio. Contiene teoremas sobre planos en el espacio, paralelepípedos y construcciones para inscribir los 5 sólidos regulares en una esfera.

4.9 ASPECTOS FORMALES DE LOS ELEMENTOS

Los 465 teoremas de los Elementos de Euclides se deducen de los siguientes 10 axiomas y postulados:

A.1. Dos iguales a un tercero son iguales entre sí.
A.2. Si iguales se agregan a iguales, los totales son iguales.
A.3. Si iguales se restan a iguales, los restos son iguales.
A.4. Dos coincidentes uno al otro son iguales entre sí.
A.5. El todo es mayor que la parte.
P.1. Es posible trazar una recta de un punto a cualquier otro.
P.2. Es posible construir indefinidamente segmentos finitos en una recta dada.
P.3. Es posible construir un círculo con cualquier punto como centro y cualquier recta finita trazada del centro, como radio.
P.4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí
P.5. Si una recta intersecta otras 2 rectas de tal manera que los ángulos interiores de un lado suman menos de 2 rectos, entonces estas rectas se intersectan al prolongarse sobre ese lado.

Axiomática. Es una rama de las matemáticas motivada por los Elementos de Euclides; está ligada a la Filosofía Matemática y a la lógica simbólica. Trata con el estudio de postulados y axiomas, sus propiedades y su clasificación.

En geometría, generalmente los axiomas se refieren a relaciones evidentes por sí mismas entre los elementos primitivos que no se definen, mientras que los postulados se refieren a construcciones geométricas que se aceptan sin demostración.

Las propiedades fundamentales que deben tener son las siguientes:

1. Consistencia. Un conjunto de postulados y axiomas es consistente si no pueden deducirse contradicciones de ellos.

2. Independencia. Un conjunto de axiomas y postulados es independiente si ninguno de ellos puede ser deducido de los demás.

3. Equivalencia. Dos conjuntos de axiomas y postulados son equivalentes si cada uno de ellos puede ser deducido del otro.

Los principales matemáticos que han contribuido a esta rama de las matemáticas son Hilbert, Peano y Bertrand Russell.

La principal crítica a los **Elementos** de Euclides se refiere a la **Teoría de las Paralelas** que dió lugar a las *Geometrías no-Euclidianas* como la **Geometría Hiperbólica** de Lobachevsky, Gauss y Bolyai y la **Geometría Elíptica** de Riemann.

4.10 OTROS LIBROS DE EUCLIDES

Data. Trata con la determinación de los datos mínimos necesarios para definir una figura. Un ***Datum*** es un conjunto de partes y/o relaciones de una figura que permite, dadas todas menos una, encontrar la que falta. Por ejemplo las partes A, a y R de un triángulo (donde *A* es un ángulo, *a* el lado opuesto y *R* es el circunradio) constituyen un datum porque dadas dos de ellas se puede encontrar la tercera.

Divisiones. Trata con la división de figuras planas cerradas en áreas que estén en cierta relación; por ejemplo, dividir un triángulo en dos partes de igual área.

Cónicas. Tratado en 4 libros sobre las secciones cónicas.

Phaenomena. Geometría esférica aplicada a la Astronomía.

Óptica. Tratado elemental de perspectiva, técnica de dibujo en un plano de figuras en el espacio.

EJERCICIO 6. **EL NÚMERO π. ELEMENTOS DE EUCLIDES.**

1. Verificar que la circunferencia de un círculo se obtiene aproximadamente como 3 veces el diámetro más 1/5 del lado del cuadrado inscrito. Establecer esta fórmula y encontrar el valor π que proporciona, aproximado a 4 decimales.

2. Sea AOB un cuadrante de un círculo con centro en O. Sobre AB como diámetro, trazar un semicírculo hacia fuera del cuadrante.
Demostrar que la luna limitada por el cuadrante y el semicírculo tiene la misma área que el triángulo AOB.

3. Si t_n denota el lado de un polígono regular de **n** lados inscrito en un círculo de radio **r**, demostrar que $t_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - t_n^2}}$.

4. Encontrar el máximo común divisor de 348 y 612 por el algoritmo euclidiano de divisiones sucesivas y expresarlo como una combinación lineal de los números.

5. Demostrar el teorema 2 del libro VI de los elementos de Euclides que establece: *Una recta paralela a uno de los lados de un triángulo divide a los otros dos en partes proporcionales*

6. Aplicando la ley de los cosenos demostrar el teorema de Pitágoras: *La suma de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa.*

7. Un cuadrilátero de Saccheri es aquel en el cual **AD** y **BC** son iguales y los ángulos **A** y **B** son rectos. **AB** es la base y **DC** la cima del cuadrilátero. Demostrar que los ángulos **D** y **C** son iguales.

8. Demostrar que la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre los catetos de un triángulo es igual al área del triángulo construido sobre la hipotenusa.

9. Demostrar que la suma de las áreas de los semicírculos construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo es igual al área del semicírculo construido sobre la hipotenusa.

10. Demostrar que el ángulo ***A***, el lado adyacente ***b*** y la altura h_c sobre el lado ***c*** constituyen un datum de un triángulo.

CAPÍTULO 5

MATEMÁTICOS GRIEGOS DESPUÉS DE EUCLIDES

5.1 LA ÉPOCA ALEJANDRINA.

Desde su fundación, Alejandría tuvo un período de casi 300 años de paz hasta el año 30 A. C., cuando Egipto pasó a formar parte del Imperio Romano. Grecia fue dominada por los romanos desde 146 A. C. Las condiciones ventajosas de Alejandría la convirtieron en un centro de desarrollo académico, a donde concurrieron los mejores matemáticos de la época.

5.2 ARQUÍMEDES.

Nació en Siracusa, en la isla de Sicilia, el año 287 A. C. y murió durante el saqueo romano de la isla en 212 A. C. Pasó parte de su vida en Egipto, estudiando en la Universidad de Alejandría. Los historiadores romanos relatan la habilidad de Arquímedes para construir armas en defensa de Siracusa. Catapultas para lanzar enormes piedras y proyectiles con fuego, contra los barcos romanos. Construyó un dispositivo a base de palancas y poleas para levantar y hundir los barcos que se acercaban a la costa de la ciudad. Se le atribuye la frase: Dadme una palanca y un punto de apoyo y moveré el mundo.

EJERCICIO 6. **EL NÚMERO π. ELEMENTOS DE EUCLIDES.**

1. Verificar que la circunferencia de un círculo se obtiene aproximadamente como 3 veces el diámetro más 1/5 del lado del cuadrado inscrito. Establecer esta fórmula y encontrar el valor π que proporciona, aproximado a 4 decimales.

2. Sea AOB un cuadrante de un círculo con centro en O. Sobre AB como diámetro, trazar un semicírculo hacia fuera del cuadrante.
Demostrar que la luna limitada por el cuadrante y el semicírculo tiene la misma área que el triángulo AOB.

3. Si t_n denota el lado de un polígono regular de **n** lados inscrito en un círculo de radio **r**, demostrar que $t_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - t_n^2}}$.

4. Encontrar el máximo común divisor de 348 y 612 por el algoritmo euclidiano de divisiones sucesivas y expresarlo como una combinación lineal de los números.

5. Demostrar el teorema 2 del libro VI de los elementos de Euclides que establece: *Una recta paralela a uno de los lados de un triángulo divide a los otros dos en partes proporcionales*

6. Aplicando la ley de los cosenos demostrar el teorema de Pitágoras: *La suma de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa.*

7. Un cuadrilátero de Saccheri es aquel en el cual **AD** y **BC** son iguales y los ángulos **A** y **B** son rectos. **AB** es la base y **DC** la cima del cuadrilátero. Demostrar que los ángulos **D** y **C** son iguales.

8. Demostrar que la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre los catetos de un triángulo es igual al área del triángulo construido sobre la hipotenusa.

9. Demostrar que la suma de las áreas de los semicírculos construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo es igual al área del semicírculo construido sobre la hipotenusa.

10. Demostrar que el ángulo ***A***, el lado adyacente ***b*** y la altura h_c sobre el lado ***c*** constituyen un datum de un triángulo.

CAPÍTULO 5

MATEMÁTICOS GRIEGOS DESPUÉS DE EUCLIDES

5.1 LA ÉPOCA ALEJANDRINA.

Desde su fundación, Alejandría tuvo un período de casi 300 años de paz hasta el año 30 A. C., cuando Egipto pasó a formar parte del Imperio Romano. Grecia fue dominada por los romanos desde 146 A. C. Las condiciones ventajosas de Alejandría la convirtieron en un centro de desarrollo académico, a donde concurrieron los mejores matemáticos de la época.

5.2 ARQUÍMEDES.

Nació en Siracusa, en la isla de Sicilia, el año 287 A. C. y murió durante el saqueo romano de la isla en 212 A. C. Pasó parte de su vida en Egipto, estudiando en la Universidad de Alejandría. Los historiadores romanos relatan la habilidad de Arquímedes para construir armas en defensa de Siracusa. Catapultas para lanzar enormes piedras y proyectiles con fuego, contra los barcos romanos. Construyó un dispositivo a base de palancas y poleas para levantar y hundir los barcos que se acercaban a la costa de la ciudad. Se le atribuye la frase: Dadme una palanca y un punto de apoyo y moveré el mundo.

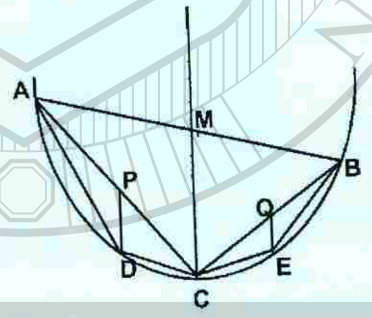
El rey Hierón preguntó a Arquímedes como podría saber si su corona de oro tenía plata en aleación con el oro. Este problema lo resolvió Arquímedes al descubrir la primera ley de la hidrostática cuando salía de su tina de baño: Todo cuerpo sumergido en un líquido, recibe un empuje vertical hacia arriba igual al peso del líquido que desaloja.

Principales Escritos. Los trabajos de Arquímedes están presentados en forma compacta, muestran habilidad de cálculo, claridad y rigor en las demostraciones. Realizó 3 en Geometría plana:

1. Medida del Círculo. Presenta el método clásico de perímetros de polígonos regulares inscritos y circunscritos en un círculo de diámetro unitario para calcular el número π.

2. Cuadratura de la Parábola. Contiene 24 teoremas e incluye cálculos de áreas de segmentos parabólicos relacionándolas con series geométricas convergentes.

ÁREA DE UN SEGMENTO PARABÓLICO. Como un ejemplo de los trabajos de Arquímedes, consideremos el problema de calcular el área encerrada entre una parábola y una recta:



Sean: **M** el punto medio de **AB**.
Área del triángulo **ABC = k.**
MC‖**eje** de la parábola
P = punto medio de **AC**.
Q = punto medio de **BC**.
PD‖**MC**‖**QE**

Arquímedes calculó las áreas de los triángulos **ADC** y **BEC** encontrando:

$$\underline{ADC} + \underline{BEC} = \frac{1}{4}\underline{ABC} = \frac{1}{4}k$$

Por los puntos medios de **AD**, **DC**, **CE** y **EB** trazó paralelas al eje y construyó los 4 triángulos correspondientes, calculó sus áreas y encontró que la suma de estas 4 áreas es 1/4 de la suma de las áreas de los 2 triángulos anteriores y por lo tanto es **1/16 k**.

Repitiendo el proceso, se tiene:

$$A = k + 1/4\,k + 1/16\,k + 1/64\,k + \ldots = k\,(1 + 1/4 + 1/16 + 1/64 + \ldots)$$

El factor entre paréntesis es una progresión geométrica con a = 1; r = 1/4 < 1. Entonces es convergente y su suma es:

$$S_\infty = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}}$$

$$\therefore\ A = \frac{4}{3}k$$

Aquí, Arquímedes aplica el método exhaustivo de Eudoxus y se aproxima notablemente el cálculo integral actual.

3. Espirales. Contiene 28 teoremas dedicados a las propiedades de la **Espiral** de Arquímedes: $r = k\theta$ en coordenadas polares.

Se atribuye a Arquímedes la fórmula para calcular el área de un triángulo de lados **a, b, c** y semiperímetro **s**:

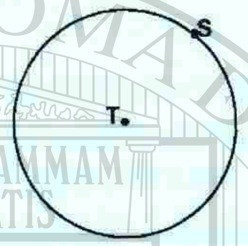
$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Arquímedes escribió también 2 trabajos en Geometría tridimensional:

1. La Esfera y el cilindro. 60 teoremas incluyendo áreas de esferas y división de una esfera en 2 partes cuyos volúmenes están en una razón dada.

2. Conoides y Esferoides. 40 teoremas relacionados con volúmenes de cuadráticas de revolución.

El contador de Arena. Gelón, hijo del rey Hierón dijo a Arquímedes: "Tú que todo lo mides y todo lo cuentas, dime cuántos granos de arena hay en las playas del Mediterráneo". Para contestar esto, Arquímedes estimó el número N de granos de arena que caben en una esfera con centro en la tierra y radio hasta el sol para lo cual utilizó un sistema de números de base 100 billones para expresar lo siguiente:



"Nadie puede decirte ahora, ni podrá decir en el futuro, cuántos granos de arena hay en las playas del mediterráneo, porque es una sucesión creciente en el tiempo, pero sí puedo asegurar que siempre será menor que este número N". Aquí, Arquímedes introduce el importante concepto de cota superior de una sucesión creciente.

Equilibrio en un plano. 25 proposiciones o teoremas sobre el cálculo y propiedades de centroides de áreas planas, incluyendo segmentos parabólicos.

Cuerpos flotantes. 19 teoremas de matemáticas aplicadas a la hidrostática. En base a este trabajo, se inició la Teoría de la Hidrostática en el siglo XVI.

Arquímedes realizó también trabajos sobre palancas y sobre propiedades de espejos.

En 1906, Heiber descubrió un libro de Arquímedes llamado ***Método*** dirigido a Eratóstenes, en el cual describe métodos para descubrir la mayoría de sus teoremas que después demostraba rigurosamente.

Los trabajos de Arquímedes muestran que estuvo cerca de formalizar el Cálculo Integral.

5.3 <u>ERATÓSTENES.</u>

Nació en Cyrene el año 270 A. C. Vivió en Atenas hasta los 40 años, cuando fue llevado a Alejandría como Director de la Biblioteca de la Universidad. El año 194 A. C. quedó ciego y se suicidó.

Se le reconocía como matemático, astrónomo, geógrafo, historiador, filósofo y poeta. Es autor de una solución mecánica para la duplicación del cubo y de un trabajo científico sobre la medida de la tierra.

Para estimar el diámetro y la circunferencia de la tierra, Eratóstenes observó que a las 12:00 horas, el día del solsticio, una vara vertical (a plomo) en Siena, no proyecta sombra, mientras que en Alejandría proyecta una sombra que le permitió calcular que la distancia de Siena a Alejandría, sobre el meridiano 30° que pasa por Alejandría

DCA = 5000 Estadios
= 5000 (170 metros)
= 850,000 Metros
= 850 kilómetros

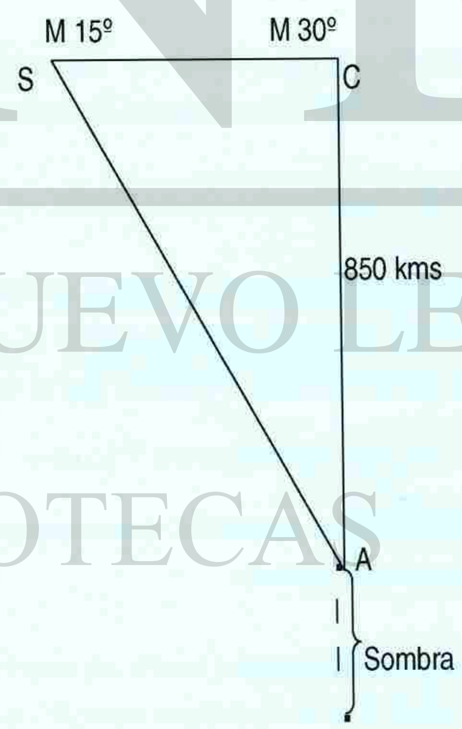
corresponde a un arco de $\frac{1}{50}$ de la circunferencia polar de la tierra;

$\therefore \quad \frac{1}{50} C = 850$ kms.

$\therefore \quad C = 42{,}500$ kms.

Con la circunferencia estimada se obtiene el diámetro **d = 42,500 / π ≈ 13,217 kms.**

Estas medidas encontradas por Eratóstenes son bastante aproximadas a las reales



En Teoría de números, ideó un dispositivo llamado la criba de Eratóstenes, para encontrar los números primos menores que un número dado **n**. Escribir el 2 y los números impares en orden: 2, 3, 5, 7, 9, y así sucesivamente. Se eliminan después del 3, cada tercer número; después del 5, cada quinto número; después del 7 cada séptimo número y así sucesivamente hasta el número próximo menor a $\sqrt{n}$.

Por ejemplo, para **n = 150**

2, 3, 5, 7, ~~9~~, 11, 13, ~~15~~, 17, 19, ~~21~~, 23, ~~25~~, ~~27~~, 29,
31, ~~33~~, ~~35~~, 37, ~~39~~, 41, 43, ~~45~~, 47, ~~49~~, ~~51~~, 53, ~~55~~, ~~57~~, 59,
61, ~~63~~, ~~65~~, 67, ~~69~~, 71, 73, ~~75~~, ~~77~~, 79, ~~81~~, 83, ~~85~~, ~~87~~, 89,
~~91~~, ~~93~~, ~~95~~, 97, ~~99~~, 101, 103, ~~105~~, 107, 109, ~~111~~, 113, ~~115~~, ~~117~~, ~~119~~,
~~121~~, ~~123~~, ~~125~~, 127, ~~129~~, 131, ~~133~~, ~~135~~, 137, 139, ~~141~~, ~~143~~, ~~145~~, ~~147~~, 149

Puesto que $\sqrt{150}$ está entre 12 y 13 se realiza el proceso hasta eliminar, después del 11, cada onceavo número de la lista. Los números no eliminados son los primos menores que 150:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37,41, 43, 47, 53,59, 61, 67, 71
73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149.
35 en total.

5.4 LOS NÚMEROS PRIMOS.

En **1870**, E. Meissel encontró que el número de primos menores que 10^8 es **5' 761,455**. En **1893**, Bertelsen anunció que el número de primos menores que 10^9 es **50' 847,478**, corregido en **1959** por D. Lehmer al número correcto de **50' 847,534**, y encontró que el número de primos menores que 10^{10} era **455' 052, 511**.

El **Teorema de los números primos** establecido como conjetura por Gauss y demostrado en **1896** por el Belga J. Hadamard establece lo siguiente:

Sea **An** = Número de primos menores que **n**.

$$Dn = \frac{An}{n} = \text{Densidad de los primos en los primeros } n \text{ enteros}$$

Teorema $\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{n} \ln n = 1$

Es decir A_n / n se aproxima a $1/ \ln n$ cuando **n** se hace cada vez mas grande.

L. Dirichlet demostró el siglo pasado que la secuencia aritmética **{a + (n - 1) d}** en la cual **a** y **d** son primos entre sí, contiene un conjunto infinito de primos. No existe un procedimiento práctico para determinar si un número grande es primo.

En 1876, A. Lucas verificó que el siguiente número de 39 dígitos es primo:

$2^{127} - 1 = 170^6, 141, 183^5, 460, 469^4, 231, 731^3, 687, 303^2, 715, 884^1, 105, 727.$

En 1952, la computadora inglesa EDSAC estableció la primalidad del número de 79 dígitos: $180 (2^{127} - 1)^2 + 1$.

Posteriormente con otras computadoras se han encontrado números primos enormes de la forma $2^n - 1$ para n = 521; 607; 1 279; 2, 203; 2, 281; 3, 217; 4, 253; 4, 423; 9, 689; 9, 941 y 11, 213.

No ha sido posible encontrar una función **f(n)** que para enteros positivos **n**, dé solamente números primos, lo cual proporcionaría una secuencia infinita de primos.

La función $f(n) = n^2 - n + 41$ da números primos para $n < 41$; $f(n) = n^2 - 79n + 1, 601$ da primos para $n < 80$.

En 1640, Pierre de Fermat estableció la conjetura de que $f(n) = 2^{2^n} + 1$ sea primo para todo **n** entero no-negativo. Esto es falso, puesto que para **n = 5**

$$f(5) = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = (641)(6'700,417)$$

Conjeturas que permanecen:

1. Hay un número finito de pares de primos gemelos de la forma **p y p + 2**?
2. Todo entero par mayor que 2 puede expresarse como la suma de dos primos ?

Ejemplos: 4 = 2 + 2 ; 6 = 3 + 3; 8 = 3 + 5 ; ...16 = 13 + 3; ... 48 = 29 + 19; ...100 = 97 + 3; ...

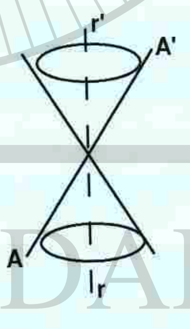
3. Hay un número infinito de primos de la forma $n^2 + 1$?
4. Hay un número primo entre n^2 y $(n + 1)^2$ para todo $n \in \mathbf{N}$?
5. Hay un número infinito de primos de Fermat de la forma $2^{2^n} + 1$?

5.5 APOLONIO.

Nació en Perga, en el sureste de Asia Menor, el año 262 A. C. Estudió en Alejandría y posteriormente fundó una Universidad y Biblioteca en Pergamum, tomando como modelo la de Alejandría. Murió el año 200 A. C. en Alejandría.

Su principal obra en matemáticas es su colección de 8 libros sobre Secciones Cónicas con 400 teoremas.

Los trabajos previos sobre las cónicas obtienen éstas mediante tres tipos de conos de revolución, en concordancia a que el ángulo del vértice sea igual, mayor o menor que un ángulo recto. Apolonio obtiene todas las cónicas como secciones de un cono circular doble y girando una recta sobre un punto fijo o, de manera que todos los demás puntos de la recta describan trayectorias circulares.



1. **Círculo.** Sección perpendicular a r r'.
2. **Parábola.** Sección paralela a A A'.
3. **Elipse.** Sección haciendo ángulo agudo con r r'.
4. **Hipérbola.** Sección paralela a r r'.

Estos nombres fueron utilizados por los pitagóricos y adoptados por Apolonio. Los primeros tres libros se basan en el trabajo previo de Euclides y los últimos 5 son especializaciones del tema.

Estos trabajos sobre las cónicas parecen indicar que el origen de la Geometría Analítica se remonta a los griegos.

Otros trabajos de Apolonio son:

1. Tangencias.	124 teoremas.
2. Congruencias.	125 teoremas.
3. Lugares geométricos en el plano.	147 teoremas.
4. Secciones determinadas.	83 teoremas.
5. Secciones proporcionales.	181 teoremas.
6. Secciones Espaciales.	124 teoremas.

5.6 TRIGONOMETRÍA.

Puede decirse que el origen de la trigonometría lo muestra el papiro Rhind en Egipto y la tableta babilónica Plimpton 322 que contiene tabletas de cotangentes y secantes. Parece ser que las observaciones astronómicas dieron lugar a la trigonometría. Los astrónomos babilonios de los siglos IV y V A. C. acumularon gran cantidad de datos que pasaron a los griegos.

5.7 HIPPARCHUS Y PTOLOMEO.

Fueron los más notables astrónomos griegos. **Hipparchus** trabajó en Alejandría y en Rodas, isla del sureste de Asia Menor. Contribuyó al desarrollo de la trigonometría en su obra de 12 libros incluyendo una tabla de cuerdas.

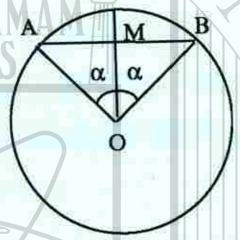
Posteriormente **Claudio Ptolomeo** presenta su tabla de cuerdas que parece haber sido adoptada de la obra de Hipparchus. Aparecen las cuerdas de los ángulos centrales de un círculo dado, cada 1 / 2 grado hasta 180º. El radio del círculo se divide en 60 partes y las longitudes de las cuerdas se expresan sexagesimalmente en términos de una de esas partes como unidad.

Por ejemplo:

$$\text{Cda.}\,(36°) = 37_p 4_{p'} 55_{p''} = (0\,\widehat{37}\,\widehat{4}\,\widehat{55})_{60}$$

Esto significa que la cuerda de un ángulo central de 36º es igual a $\frac{37}{60}$ del radio, más $\frac{4}{60}(\frac{1}{60})$ igual a $\frac{4}{3600}$, más $\frac{55}{3600}(\frac{1}{60}) = \frac{55}{21600}$ del radio.

La tabla de cuerdas equivale a una tabla de senos;



$$\text{Sen}\alpha = \frac{AM}{OA} = \frac{AB}{\text{Diam.}} = \frac{\text{Cda.}\,(2\alpha)}{120} = \frac{1/\,2\,\text{Cda.}2\alpha}{60}$$

La tabla de cuerdas proporciona esencialmente, los senos de los ángulos cada 15' de 0o a 90o.

En el año 150 A. C., Ptolomeo escribió un tratado de Astronomía en 13 libros llamado ***Sintaxis Matemática***, y después llamado por los árabes ***El Almagesto***. Esta obra se mantiene como válida para la Astronomía hasta el renacimiento, cuando Copérnico y Kepler la corrigen.

El **libro I** contiene conceptos preliminares de astronomía y la tabla de cuerdas.

El **libro II** considera fenómenos naturales que dependen de la esfericidad de la tierra.

Los **libros III, IV y V** desarrollan el sistema geocéntrico de órbitas circulares.

El **libro VI** presenta una teoría de los eclipses.

Los **libros VII y VIII** se dedican a un catálogo de 1028 estrellas fijas, y los restantes libros se dedican a los planetas.

5.8 HERÓN.

Nació en Egipto, estudió y trabajó en Alejandría entre 100 A. C. y 100 D. C. Aplicó las matemáticas a la medida y a los dispositivos mecánicos. Su principal obra es Métrica en 3 volúmenes:

Vol. I Áreas de cuadrados, triángulos, rectángulos, trapezoides, polígonos regulares desde 3 hasta 12 lados; áreas y secciones de círculos, elipses, parábolas, esferas, cilindros y conos: Método aproximado para la raíz cuadrada de un entero positivo.

Si $\mathbf{n = ab}$, donde ***a*** esta cerca de ***b***, entonces

$$\sqrt{n} \approx \frac{1}{2}(a+b)$$

$$\left[\frac{1}{2}(a+b)\right]^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2$$

Si $a \approx b$, entonces

$$\left[\frac{1}{2}(a+b)\right]^2 \approx \frac{1}{4}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}ab = ab = n$$

Si $a_1 = \frac{1}{2}(a+b)$ se puede mejorar la aproximación con

$a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + \frac{n}{a_1})$ y el proceso se puede continuar hasta la aproximación que se desee.

Ejemplo : $\sqrt{6}$, $6 = 3 \cdot 2$; $a = 3$; $b = 2$

$$\therefore \sqrt{6} \approx \frac{1}{2}(3+2) = 2.5 = a_1$$

$a_2 = \frac{1}{2}\left(2.5 + \frac{6}{2.5}\right) = \frac{1}{2}(4.9) = 2.45$ correcto a 2 decimales.

Volumen II. Volúmenes de cilindros, conos, paralepípedos, prismas, pirámides completas y truncadas, esferas, toros, prismatoides y los 5 sólidos regulares.

Volumen III. División de áreas y volúmenes en partes proporcionales.

Otros trabajos de Herón son:

Pneumática. Descripciones de juguetes y máquinas, como sifones, órganos de viento y abre-puertas.

Dioptra. Descripción y uso de instrumentos de medición de terrenos.

Catoptrica. Propiedades elementales de espejos.

5.9 DIOFANTO.

Nació en el siglo III de nuestra era. Estudió en Alejandría. Sus trabajos contribuyeron al desarrollo del álgebra e influyeron en los investigadores de la **Teoría de Números** a partir del siglo XVIII (Fermat, Euler y Lagrange).

Su obra principal es Aritmética; consta de 13 libros, de los cuales existen actualmente 6 que contienen 130 problemas que conducen a ecuaciones de 1º y 2º grado y un tipo de ecuaciones cúbicas. Incluye ecuaciones consistentes e indeterminadas, en las cuales solo permite soluciones racionales positivas. A estos problemas se les llama Diofantinos.

Por ejemplo:

1. El problema 7 del libro III dice: Encontrar 3 números en progresión aritmética tal que la suma de cada pareja de ellos, sea un número cuadrado.

La solución que da Diofanto es: $\frac{241}{2}, \frac{1681}{2}, \frac{3121}{2}$

2. El problema 10 del libro IV dice: Encontrar dos números tales que su suma sea igual a la suma de sus cubos.

La solución de Diofanto es: $\frac{5}{7}; \frac{8}{7}$

3. El problema 1 del libro VI dice: Encontrar una terna pitagórica tal que la hipotenusa menos cada uno de los catetos, sea un cubo.

La solución de Diofanto es: **(40, 96, 104)**.

Otros trabajos de Diofanto son Números Poligonales, y Porismas.

En 1842, G. Nesselman clasificó en 3 etapas el desarrollo histórico del álgebra:

1. Álgebra Retórica. Aparecida antes de Diofanto, en la cual los problemas algebraicos se plantean y se resuelven en prosa.

2. Álgebra Sintetizada. Empieza con Diofanto, en la cual se utilizan abreviaciones para las incógnitas y las operaciones.

3. Álgebra Simbólica. A partir del siglo XVI, en la cual se utilizan símbolos simples para representar incógnitas y operaciones.

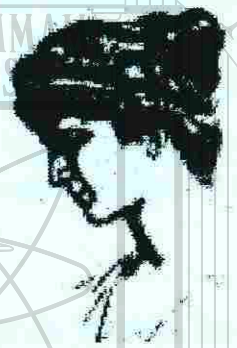
5.10 PAPPUS.

Nació en Alejandría en el año 300 D. C.; 500 años después de Apolonio y en plena decadencia del período oscuro, Pappus rinde un homenaje póstumo a los geómetras griegos en su obra de 8 libros ***Mathematical Collection***, donde se refiere a los trabajos de más de 30 personajes del período griego. Principalmente, critica y amplía las obras de Euclides, Arquímedes y Apolonio.

Después de Pappus, hubo algunos comentaristas hasta el siglo V, entre los cuales se menciona a Theon de Alejandría, Hypatia (hija de Theon), Proclus, Simplicius y Futocius.

5.11 HYPATIA.

Hypatia es la primera mujer matemática que se menciona en la historia de las matemáticas; vivió en Alejandría del año 360 al 415 de nuestra era, en los últimos años del Imperio Romano. Representa el fin de la ciencia antigua porque la decadencia científica durante el Imperio Romano se agudizó durante el Imperio Árabe no habiendo avances importantes durante los siguientes mil años.



Theon educó a Hypatia enseñándole el arte de la oratoria y la enseñanza, compartiendo con ella sus conocimientos y trabajos de matemáticas. La casa de Hypatia en Alejandría se convirtió en un centro intelectual donde enseñaba filosofía, matemáticas, astronomía y mecánica. La mayoría de sus trabajos fueron libros de texto para sus alumnos; sin embargo, como comentarista de la época de oro de los griegos, realizó un magnífico trabajo sobre la ***Aritmética*** de Diofanto.

También escribió acerca de las secciones cónicas de la obra de Apolonio de Perga, y fue hasta el siglo XVII cuando los matemáticos del Renacimiento, especialmente Fermat y Descartes, así como el astrónomo Johann Kepler, se dieron cuenta de la importancia de estas curvas planas. Además trabajó con su padre Theon en los ***Elementos*** de Euclides, mejorando notablemente esta obra, para la enseñanza.

Se interesó en la mecánica, fabricando aparatos para medir niveles y para la destilación del agua, así como un hidrómetro para medir la densidad de ésta. En marzo del año 415 de nuestra era, Hypatia fue asesinada por monjes fanáticos de la Iglesia de San Cyrilo de Jerusalem, terminando así la enseñanza platónica en Alejandría y en el Imperio Romano.

La Escuela de Atenas luchó contra la creciente oposición de los cristianos hasta el año 529 cuando cerró sus puertas por decreto del emperador Justiniano. La escuela de Alejandría continuó parcialmente hasta el año 641, cuando los árabes ocupan la ciudad y terminan con la Escuela.

EJERCICIO 7. MATEMÁTICOS GRIEGOS DESPUÉS DE EUCLIDES.

1. Verificar el siguiente resultado establecido por Arquímedes : El volumen de una esfera es **2/3** del volumen del cilindro circunscrito.

2. Demostrar que el área de una esfera es igual a **2/3** del área total del cilindro circunscrito.

3. Los arbelos son figuras geométricas construidas de la siguiente manera: Sean **A**, **C** y **B** tres puntos sobre una recta, con **C** entre **A** y **B**. Se trazan semicírculos del mismo lado de la recta con **AC**, **BC** y **AB** como diámetros. El arbelo es la figura limitada por los tres semicírculos. Demostrar que el área del arbelo es igual al área del círculo con **CG** como diámetro, donde **G** es el punto de intersección de la perpendicular de **AB** que pasa por **C** y el semicírculo de diámetro **AB**.

4. Aplicar el método de la Criba de Eratóstenes para encontrar los números primos menores que **300**.

5. Encontrar la densidad de los primos $\frac{A_n}{n}$, para $n = 300$ ', 10^8 y 10^9, donde A_n es el número de primos menores que **n**. Comparar las densidades encontradas con la inversa del logaritmo natural de **n** para verificar el teorema de Hadamard.

6. Demostrar que siempre es posible encontrar **n** enteros consecutivos que no sean primos para todo entero positivo **n** mayor que **1**. Sugerencia: Probar $(n + 1)! + I$, para $i = 2, 3, 4, \ldots , n, n + 1$

7. Determinar en que año nació una persona del siglo XIX (entre 1800 y 1900), si cumplió **x** años el año x^2, único año que es número cuadrado de ese siglo.

8. Encontrar la raíz cuadrada de **15** por el método de aproximación de Herón :

$$\sqrt{n} = \sqrt{ab} \approx \frac{1}{2}(a+b) = a_1; \quad \sqrt{n} \approx \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{n}{a_1}\right)$$

9. Verificar la respuesta diofantina: $\frac{241}{2}, \frac{1681}{2}, \frac{3121}{2}$ al problema 7 de su libro III: "Encontrar tres números en progresión aritmética tales que la suma de cualquier pareja de ellos sea un número cuadrado".

10. ¿Cuántas manzanas se reparten entre 6 personas si las primeras 4 reciben $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ y $\frac{1}{8}$ del total, la quinta recibe 10 y queda **1** para la sexta persona?

11. Si **m** y **n** son dos números racionales positivos cuya diferencia es **1** y si **x**, **y** y **a** son racionales positivos tales que $x + a = m^2$; $y + a = n^2$, demostrar que $xy + a$ es el cuadrado de un número racional.

CAPÍTULO 6

PERIODO OSCURO Y EL PRE-RENACIMIENTO

6.1 IMPERIO ÁRABE.

Antes de extenderse hacia el resto de Europa, los árabes ocuparon España a partir del 711 y durante 100 años. Establecieron su capital en Córdoba la cual llegó a tener hasta 500 000 habitantes, 200 000 casas y 3 000 templos, en este periodo. Además construyeron 300 baños públicos y usaron maderas preciosas, oro y mármol, en sus palacios.

Del siglo V al siglo XI desaparecen casi totalmente las escuelas griegas; la sociedad se vuelve feudalista y eclesiástica; la educación se concentra en las instituciones religiosas, los que desean estudiar tienen que recluirse en los conventos. En este período se mencionan algunos maestros de matemáticas, autores de libros de aritmética y geometría para las escuelas religiosas y los conventos; algunos de estos personajes son los siguientes:

BOETHIUS (475 - 524). Escribió libros elementales de aritmética y geometría que se utilizaron de texto durante varios siglos en las escuelas de los monasterios. Estos textos incluyen parte de los **Elementos** de Euclides.

BEDE (673 - 735). Escribió un libro de texto de aritmética para escuelas religiosas.

ALCUIN (735 - 804). Nació en Inglaterra y emigró a Francia para ayudar a Carlomagno en un proyecto educativo. Escribió un libro de paradojas y diversiones matemáticas que influyó en los textos durante varios siglos: Problemas para la agilidad de la mente.

GERBERT (950 - 1003). Nació en Francia y estudió en España, de donde llevó al resto de Europa al sistema Hindú - Arábigo de numeración. Construyó ábacos, globos celestes y relojes; fue Papa el año 999. Escribió sobre aritmética, geometría y astrología.

AL-KHOWARIZMI (Al-Juarismi). Notable algebrista árabe, escribió y publicó **Al-Gabr** y **Al-Muqabala**, difundiendo por Europa el sistema Hindú-Arábigo incluido el cero, en el siglo IX; además publicó sus **Tablas Astronómicas**.

6.2 PERIODO DE TRANSICIÓN

Siglo XII. Las matemáticas de los clásicos griegos empiezan a filtrarse en Europa, a través de traducciones al latín.

ADELARD DE BATH (1120) Monje inglés que estudió en España y viajó por Grecia, Siria y Egipto; tradujo al latín los **Elementos** de Euclides y las tablas astronómicas de Al-Khowarizmi.

GHERARDO DE CREMONA (1114 - 1187) Tradujo al latín alrededor de 90 trabajos árabes, además de el Almagesto de Ptolomeo, los Elementos de Euclides y el Álgebra de Al-Khowarizmi.

Siglo XIII Se fundan las primeras universidades en Europa y destaca de manera importante Leonardo Fibonacci.

6.3 LEONARDO FIBONACCI (1170 - 1250)

Fue el más notable matemático de la Edad Media. Nació en Pisa, Italia, donde su padre era comerciante, lo que permitió a Leonardo viajar a Egipto, Sicilia, Grecia y Siria, aprendiendo las matemáticas árabes. En 1202 escribió su obra ***Liber Abaci***, de aritmética y álgebra elemental. Utiliza el sistema Hindú - Arábigo de numeración decimal posicional influyendo para la adopción de este sistema en Europa.

En este libro, explica la notación y lectura de los números, métodos de cálculo para enteros y fracciones, raíces cuadradas y cúbicas y solución de ecuaciones lineales y cuadráticas por falsa posición y por método algebraico. El álgebra es retórica y no acepta soluciones negativas o imaginarias. Incluye aplicaciones comerciales y geométricas y un problema que conduce a la llamada **Secuencia de Fibonacci**:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots \quad \text{donde } \mathbf{a_n = a_{n-2} + a_{n-1}}, \textbf{ para } \mathbf{n > 2}.$$

Esta secuencia tiene propiedades interesantes, tales como:

1. Cualquier dos términos consecutivos son primos entre sí: $\mathbf{(a_{n-1}, a_n) = 1}$ para todo $\mathbf{n > 2}$

2. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_{n-1}}{a_n} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$, la *razón dorada*,

Se aplica en Biología a ciertos procesos de crecimiento orgánico (floración).

En 1220 escribió su libro ***Practica Geometriae*** sobre Geometría y Trigonometría con la técnica Euclidiana y su técnica personal.

En 1225 escribió su libro ***Liber Quadratorum***, original y brillante trabajo sobre análisis indeterminado que distingue a Fibonacci como el más notable en este campo, entre Diofanto y Fermat.

Fibonacci resolvió los 3 problemas que presentó John de Palermo, matemático de la corte de Federico II, en una competencia:

1. Encontrar un número **x** tal que $(x^2 + 5)$ y $(x^2 - 5)$ sean cuadrados de números racionales.

La respuesta de Fibonacci fue:

$$x = \frac{41}{12}; \quad (x^2+5) = \left(\frac{49}{12}\right)^2; \quad (x^2-5) = \left(\frac{31}{12}\right)^2$$

Este problema aparece en su ***Liber Quadratorum***.

2. Encontrar una solución de la ecuación cúbica $\mathbf{x^3 + 2x^2 + 10x = 20}$

Su respuesta fue:

x = 1.3688081075, correcta a nueve decimales.

3. Tres personas poseen cierta cantidad de dinero **x**, de la cual, al primero le corresponde la mitad, al segundo la tercera parte y al tercero la sexta parte. Cada uno de ellos toma una cantidad **a**, **b** y **c** de dinero que agotan la cantidad total. Después, el primero regresa la mitad, el segundo la tercera parte y el tercero la sexta parte de lo que habían tomado. Cuando el total regresado se divide igualmente entre ellos, cada uno tiene lo que le corresponde. ¿Cuánto dinero había originalmente y cuánto tomó cada uno al principio?

El 2º y 3er problemas aparecen en el libro de Fibonacci llamado **Flos** (Floración).

JORDANUS NEMORARIUS. Fue el primero en utilizar letras, en forma generalizada, para representar números. Escribió sobre aritmética, álgebra, geometría, astronomía y estática.

JOHN DE JALIFAX (Sacrobosco). Maestro de matemáticas en París; escribió sobre Astronomía y reglas de la aritmética.

6.4 UNIVERSIDADES.

A principios del siglo XIII se fundaron las universidades de París, en Francia; Oxford y Cambridge, en Inglaterra; Padua y Nápoles, en Italia y la de Salamanca en España. El desarrollo posterior de las matemáticas está ligado a las universidades, a través de sus profesores e investigadores.

En el Siglo XIV la " Muerte Negra " mata más de 1/3 de la población de Europa y la "Guerra de 100 años " envuelve a Europa en grandes cambios políticos y económicos. Hay muy poca actividad matemática. Destacan los siguientes:

NICOLE ORESME (1323 - 1382). Escribió 5 trabajos de matemáticas. Utiliza por primera vez los exponentes fraccionarios y localiza puntos por coordenadas en uno de sus trabajos que fue reproducido después de 100 años y tuvo influencia en el renacimiento de las matemáticas.

THOMAS BRADWARDINE (1290 - 1349) Arzobizpo de Canterbury, escribió sobre aritmética, geometría y especulaciones filosóficas sobre lo continuo, lo discreto, los infinitos y los infinitesimales.

6.5 PRE- RENACIMIENTO. EL SIGLO XV.

Sucesos fundamentales que favorecen el pre-renacimiento europeo en artes y ciencias:

1. 1453 Termina el imperio Bizantino con la caída de Constantinopla, hoy Estambul, capital de Turquía. Se llevan a Italia los originales de los filósofos de la civilización Griega.

2. 1457 Se perfecciona la imprenta, impulsando rápidamente la difusión de conocimientos (Gutemberg).

3. 1492 Colón viaja a América y Magallanes y J. S. Elcano viajan alrededor de la tierra; Américo Vespucio publica ***Mundus Novus***, relatos de los viajes de exploración a América, incluyendo mapas. Se generaliza el uso de la brújula y el astrolabio en la navegación; Enrique *El Navegante* y Vasco da Gama viajan a la India por el sur de África. La actividad matemática se concentra en Italia, en Nuremberg, Viena y Praga de Europa Central, principalmente en aritmética, álgebra y trigonometría.

NICHOLAS CUSA (1401 - 1464) Hijo de un pescador, llegó a ser Cardenal y Gobernador de Roma. Trabajó en los problemas famosos y en la reforma del Calendario.

GEORGE VON PEURBACH (1423 - 1461) Profesor de matemáticas en Italia y en Viena, realizó una tabla de senos y escribió sobre aritmética y astronomía.

JOHANN MÜLLER (1436 - 1476) Apodado *Regiomontano* por ser nativo de Könisberg, estudió en Viena con Peurbach. Tradujo del griego trabajos de Arquímedes, Apolonio y Herón. En 1464 escribió su obra en 5 libros De ***Triangulis Omnimodis***, primera exposición sistemática de trigonometría plana y esférica, independiente de la astronomía. Viajó por Italia y Alemania, estableciéndose en Nuremberg, donde construyó un observatorio y una imprenta.

NICOLAS CHUQUET (? - 1500) Nació en París donde estudió medicina. En 1484 escribió su libro ***Triparty Dans La Science Des Nombres***: La primera parte se refiere a cálculos con números racionales, la segunda con irracionales y la tercera trata de las ecuaciones. Utiliza exponentes positivos y negativos y sintetiza su álgebra.

LUCA PACIOLI (1445 - 1509) Escribe y edita su obra ***Summa***, un resumen de la aritmética, álgebra y geometría de la época. En 1509 publica ***De Divina Proportione*** que contiene figuras de los 5 sólidos regulares.

JOHANN WIDMAN (1460 - ?) En 1489 publica en Leipzig una aritmética donde utiliza por primera vez los signos + y - como contracciones de las palabras latinas et (+) y minus ($\overline{m}$).

Desde la invención la imprenta hasta fines del siglo XVI se imprimieron en Europa alrededor de 300 libros de aritmética, en latín para las escuelas religiosas y en diferentes idiomas para las escuelas comerciales.

PIERO BORGHI Escribió en 1478 un libro de aritmética y problemas recreativos. En 1484 publicó un libro de aritmética comercial en Venecia que fue re-impreso 17 veces hasta 1557.

JACOB KÖBEL (1470 - 1533, Alemán) Publicó en 1514 un libro de aritmética que se re-editó 22 veces.

6.6 EL SIGLO XVI

En este siglo se desarrolla el álgebra y se resuelven las ecuaciones polinómicas de 3º y 4º grado.

ROBERT RECORDE (1510 - 1558, Inglés) Profesor de matemáticas en Oxford, publicó un libro de aritmética en 1542, del cual se hicieron 29 ediciones. Escribió en inglés 4 libros de astronomía, geometría, medicina y uno de álgebra en el cual utiliza por primera vez el símbolo actual de igualdad como = "porque las 2 líneas paralelas iguales representan ambos miembros de la igualdad".

CHRISTOFF RUDOLFF Escribió en 1525 un libro de álgebra, donde aparece por primera vez el signo radical $\sqrt{}$

MICHAEL STIFEL (1486 - 1567) Considerado el mejor algebrista alemán del siglo XVI. Escribió un libro titulado ***Aritmética Integra***, publicado en 1544, dividido en 3 partes: **Números racionales, Números irracionales y Álgebra**. Incluye progresiones aritméticas y geométricas, los coeficientes binomiales hasta la décimaséptima potencia. La tercera parte trata con ecuaciones, descartando soluciones negativas y utilizando letras para las incógnitas.

Stifel fue un monje convertido por Martín Lutero al protestantismo. Asoció místicamente el número de la bestia 666 del libro de revelaciones, con LEO DECIMUS, reteniendo las letras LDCIMV, agrega la X por decimus y omite la M por mysterium para obtener DCLXVI = 666.

Posteriormente, Napier, inventor de los logaritmos, mostró que el número 666 podría asociarse con el PAPA DE ROMA y el jesuita Bongus lo asoció con Martín Lutero, numerando la primeras 10 letras del alfabeto del 1 al 10, después del 10 al 90 y del 100 al 500, obteniendo:

M	A	R	T	I	N	L	U	T	E	R	A
30	1	80	100	9	40	20	200	100	5	80	1

que da como suma 666.

Durante la Primera Guerra Mundial se asoció este número con el Kaiser Wilhelm y después se usó para representar a Hitler.

6.7 ECUACIONES CÚBICAS Y CUÁRTICAS.

El suceso más importante en matemáticas fue la solución de las ecuaciones polinómicas de 3º y 4º grado por los matemáticos italianos:

NICOLO DE-BRESCIA (1499 - 1557) De familia muy humilde, recibió una herida en el paladar a los 13 años, por lo que le apodaron *Tartaglia* (El Tartamudo). Fue profesor de matemáticas; escribió un libro de aritmética y aplicó las matemáticas a la artillería. En 1535 resolvió las cúbicas $\mathbf{x^3 + p\,x^2 = n}$ y $\mathbf{x^3 + mx = n}$

GIROLAMO CARDANO (1501 - 1576) Médico, profesor de matemáticas y astrólogo pensionado por el Papa. Escribió sobre aritmética, álgebra, física, astronomía y medicina. Su principal obra en latín fue ***Ars Magna***, que incluye soluciones negativas e imaginarias de ecuaciones polinomiales hasta de 4º grado y un método aproximado para obtener una solución real de ecuaciones de cualquier grado. Escribió también un **Manual del Jugador** en el que aplica probabilidades. Incluye también en su ***Ars Magna*** la solución de *Tartaglia* para la cúbica y la solución de la cuártica general que había sido resuelta por su alumno Ludovico Ferrari.

La solución general de Cardano - Tartaglia para la cúbica consiste en lo siguiente:

La transformación $\mathbf{y = x - \frac{a_1}{na_0}}$ convierte la ecuación general de grado **n**

$\mathbf{a_0y^n + a_1y^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\,y + a_0 = 0}$ en una ecuación en **x** que no tiene término de grado **(n-1).**

Entonces, la sustitución $\mathbf{y = x - \frac{b}{3a}}$, convierte la cúbica general $\mathbf{ay^3 + by^2 + cy + d = 0}$, en una de la forma $\mathbf{x^3 + mx = n}$, reduciendo la cúbica general a la solución de una cúbica sin término de 2º grado.

Para resolver esta ecuación cúbica, consideremos la identidad $\mathbf{(a - b)^3 + 3ab\,(a - b) = a^3 - b^3}$

Si escogemos a y b tales que (1) $\begin{cases} 3ab=m \\ a^3-b^3=n \end{cases}$ entonces **x = a – b** resuelve la ecuación. Resolviendo el sistema (1), se obtiene

$$a = \sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}} \qquad b = \sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}}$$

Entonces **x = a - b** queda determinada.

El método de Ferrari para la solución de la cuártica consiste en lo siguiente:

Dividiendo entre el coeficiente de $\mathbf{y^4}$ y realizando la transformación indicada en el caso anterior, la solución de la cuártica general se reduce a la forma $\mathbf{x^4 + px^2 + qx + r = 0}$, por lo tanto

$\mathbf{X^4 + 2px^2 + p^2 = px^2 - qx + p^2 - r}$, y así $\mathbf{(x^2 + p)2 = px^2 - qx + p^2 - r}$ de donde, para cualquier **z**

$$\mathbf{(x^2 + p + z)^2 = px^2 - qx + p^2 - r + 2z\,(x^2 + p) + z^2 = (p + 2z)x^2 - qx + (p^2 - r + 2pz + z^2)}$$

Ahora, el lado derecho será un cuadrado perfecto si $B^2 - 4AC = 0$, o lo que es lo mismo $4AC - B^2 = 0$, donde $A = (p + 2z)$, $B = -q$ y $C = (p^2 - r + 2pz + z^2)$; tenemos entonces

$$4AC - B^2 = 4(p + 2z)(p^2 - r + 2pz + z^2) - q^2 = 0$$

Pero esto es una cúbica en **z** que puede ser resuelta, y este valor que se encuentre de **z** hace cuadrado perfecto el lado derecho de la ecuación (1) 0 por lo que, extrayendo raíz cuadrada, se obtiene una cuadrática en **x** que se resuelve por radicales.

Otras soluciones para las cúbicas y cuárticas fueron obtenidas posteriormente por Francois Viète y René Descartes.

En 1750, Euler trató de reducir la quíntica a una cuártica y 30 años después, ésto fue intentado sin éxito por Lagrange, hasta que en 1813, el físico Italiano Paolo Rufini (1765 - 1822) demostró que las raíces de las ecuaciones polinómicas de grado mayor o igual que 5, no pueden expresarse por medio de radicales en términos de los coeficientes de la ecuación. Independientemente; en1824, el matemático Noruego Niels Henrik Abel (1802 - 1829) encontró la demostración de esto mismo. Posteriormente, E. Galois (1811 - 1832), Jordan y otros desarrollaron la **Teoría General de las Ecuaciones Polinomiales** a través del **Álgebra Abstracta**.

6.8 <u>FRANCOIS VIÈTE</u> (1540 -1603).

Abogado miembro del Parlamento Francés, dedicó su tiempo libre a las matemáticas. Está considerado como el mejor matemático francés del siglo XVI. Resolvió una ecuación de grado 45 propuesta por A. Romanus, reconociendo una conexión trigonométrica que le permitió en pocos minutos obtener 2 raíces y después encontró 21 más, todas positivas.

Viète descifró una clave española de varios cientos de símbolos que le permitió a Francia obtener ventaja en su guerra con España.

Escribió sobre Álgebra, Geometría y Trigonometría; sus libros fueron editados y obsequiados por su cuenta. Fue el primero en utilizar las 6 funciones trigonométricas para resolver triángulos planos y esféricos. Obtuvo expresiones para en función de para n = 1, 2, 3, ..., 9.

En su libro ***In Artem*** introduce la práctica de usar vocales para incógnitas y consonantes para constantes. En 1637, R. Descartes utiliza las últimas letras del alfabeto para incógnitas y las primeras para constantes, como lo hacemos actualmente.

En su libro ***De Numerosa*** proporciona un método de aproximaciones sucesivas a la raíz de una ecuación entre **a** y **a + 1**. Se sustituye $x = a + x_1$ $(0 < x_1 < 1)$ en la ecuación y se deprecian los términos de potencias mayores que 1 de x_1, para encontrar el valor de x_1. Se repite el proceso, sustituyendo $x = (a + x_1) + x_2$, hasta obtener la aproximación que se desee; un ejemplo es el siguiente: Encontrar una aproximación de la raíz entre 2 y 3, de la ecuación $p(x) = x^3 - x^2 - 8 = 0$ con $p(2) = -4$ y $p(3) = +10$

a) Para $x = 2 + x1$

$$(2 + x_1)^3 - (2 + x_1)^2 = 8$$
$$8 + 12x_1 - 4 - 4x_1 = 8$$
$$8x_1 = 4$$
$$x_1 = 0.5$$

(Despreciando las potencias mayores a 1 de x1)

b) Para $x = 2.5 + x_2$

$$(2.5 + x_2)^3 - (2.5 + x_2)^2 = 8$$
$$15.62 + 18.75x_2 - 6.25 - 5x_2 = 8$$
$$13.75x_2 = -1.37$$
$$x_2 = -0.1$$
$$\therefore \quad x \approx 2.4$$

En un libro de Viète, publicado después de su muerte, se incluyen las transformaciones para aumentar, disminuir o multiplicar por una constante, las raíces de una ecuación polinomial sobre los racionales y la transformación para librar a una ecuación polinomial de grado **n**, de su término de grado **(n - 1)**. Además resuelve la cúbica general mónica $(x^3 + mx = n)$ de la siguiente manera

$$x^3 + 3ax - 2b = 0$$

Sustituyendo $x = \frac{a}{y} - y$, se obtiene

$$x = \frac{\frac{1}{3}m}{y} - y$$, por lo tanto

$$\left(\frac{a}{y} - y\right)^3 + 3a\left(\frac{a}{y} - y\right) - 2b = 0$$

$$\frac{a^3}{y^3} - \frac{3a^2}{y} + 3ay - y^3 + \frac{3a^2}{y} - 3ay = 2b$$

$$y^6 + 2by^3 = a^3$$

Esta ecuación es cuadrática en y^3. Resolviendo para y^3 y extrayendo raíz cúbica, se obtiene **y**, de donde se obtiene **x**.

Viète fue un notable algebrista que aplicó el álgebra a la geometría y a la trigonometría. Demostró que la duplicación del cubo y la trisección del triángulo con las herramientas de Euclides, dependen de la solución de ecuaciones cúbicas.

Calculó π correcto con 9 decimales y descubrió el producto infinito

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} * \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$$

CHRISTOPHER CLAVIUS (1537 - 1612). Fue un gran maestro y autor de textos muy apreciados de aritmética y álgebra. También escribió sobre astronomía y trigonometría.

PIETRO ANTONIO CATALDI (1548 - 1626) Autor de una aritmética, un tratado de números perfectos y un tratado de álgebra, incluyendo una introducción a la teoría de las fracciones continuas.

SIMON STEVIN (1548 - 1620) General del ejército holandés, expuso la teoría de las fracciones decimales y realizó contribuciones a la estática y la hidrostática.

NICOLAS COPERNICUS (1473 - 1543) De origen polaco, estudió astronomía en Padua y Bologna. Escribió un ***Tratado de Trigonometría*** y su ***Teoría del Universo*** en 1530, que fue publicada en 1543, año de su muerte.

GEORG J. RHOETICUS (1514 - 1576) Discípulo de Copernicus, dedicó 12 años de su vida a la elaboración de 2 tablas de funciones trigonométricas que se utilizan hasta la fecha:

1. Una tabla de las **6** funciones trigonométricas a **10** decimales cada **10"**.
2. Una tabla de senos cada **10"** a **15** decimales.

Fue el primero en definir las funciones trigonométricas como razones de los lados de un triángulo rectángulo.

6.9 RESUMEN

Durante el siglo XVI:

a) Se generalizó el uso del sistema decimal posicional Hindú - Arábigo y el álgebra simbólica.

b) Se desarrollaron las fracciones decimales.

c) Se resolvieron las ecuaciones cúbicas y cuárticas por radicales.

d) Se aceptaron los números negativos.

e) Se perfeccionó la trigonometría y se elaboraron tablas de las funciones trigonométricas.

Las Matemáticas en México:

f) En 1551 se fundó la Real y Pontificia Universidad de la Ciudad de México, apadrinada por la Universidad de Salamanca, durante el primer virreinato de Antonio de Mendoza. Después, siendo virrey del Perú, en 1554 fundó en Lima la Universidad de San Marcos. En 1556 se editó en México un **Compendio de matemáticas comerciales** de Juan Diez.

Básicamente en estas universidades se enseñaba: Filosofía, Teología, Medicina y Derecho. La Universidad Mexicana casi desaparece en el periodo de la Guerra de Independencia (1810), a la Revolución Mexicana (1910).

g) Sin embargo durante el siglo XVII merecen mencionarse dos mexicanos importantes de la Universidad:

FRAY DIEGO DE RODRÍGUEZ Matemático y astrónomo que dictaba estas cátedras en la Real y Pontificia Universidad de la ciudad de México, y que en 1652 propuso un concepto de gravitación.

CARLOS DE SIGÛENZA Y GÓNGORA (1645-1700). Poeta, historiador, geógrafo y matemático. Publicó en 1690 el Libra Astronómica y Filosófica, en el cual presenta sus estudios de un cometa que apareció en 1680; además, es el primero en realizar un mapa completo de la Nueva España.

h) Por otra parte, en 1687 se funda en la ciudad de México la Escuela Nacional Preparatoria, propiciando la formación de maestros de matemáticas y la elaboración de textos.

i) En 1910, el maestro Justo Sierra fundó la Universidad Nacional de México (UNM), reuniendo las Escuelas Superiores de Ingenieros, Abogados, Médicos y Bellas Artes, además de Ciencias y Humanidades, que incluían Filosofía, Letras y Biología.

j) En 1929 se fundó la Universidad Nacional Autónoma de México y en 1933 se designó por primera vez al Rector en el Consejo Universitario.

k) En 1932, impulsados por el maestro Sotero Prieto, sus alumnos de matemáticas crean el área de Ciencias en la Facultad de Filosofía y Letras. Entonces se imparten clases tales como Análisis Matemático, Geometría Diferencial y Física Teórica.

l) En 1939, don Alfonso Nápoles Gándara y sus discípulos consiguieron la fundación de la Facultad de Ciencias. Además, en 1942, este mismo grupo fundó la Sociedad Matemática Mexicana, a través de la cual visitaron la UNAM distinguidos matemáticos, como George David Birhhoff, Solomon Lefchetz y otros.

m) En 1960 se fundó en el Instituto Politécnico Nacional el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN (Cinvestav), donde se recibieron importantes matemáticos, como Zdeneh Vorel y Harold V. Macintosh

En esa época se fundó el Instituto de Investigación en Matemáticas Aplicadas y Sistemas (IIMAS), en la UNAM. Éste se extendió posteriormente al IPN y a la Universidad Autónoma de Puebla. Actualmente hay centros importantes de enseñanza e investigación de las matemáticas en Sonora y en Guanajuato.

En Nuevo León se fundan, en 1845 la Escuela de Leyes, y en 1856 la Escuela de Medicina. En 1933 se funda la Universidad de Nuevo León con las Facultades de Leyes y Medicina, que ya existían, la Facultad de Ciencias Químicas y la Facultad de Ingeniería Civil. En 1943 se elabora la Ley Orgánica y empiezan a incorporarse nuevas facultades y carreras profesionales.

La Facultad de Ciencias Físico – Matemáticas se inicia como Escuela de Matemáticas, en septiembre de 1953, en la Facultad de Ingeniería Civil, con el propósito inmediato de preparar maestros especializados en matemáticas, para las escuelas y facultades de la Universidad. Ese verano vinieron distinguidos conferencistas, como el Dr. Carlos Graeff Fernández y el Dr. Nabor Carrillo.

En los primeros años se recibió la ayuda académica de la Facultad de Ciencias de la UNAM, con maestros visitantes que vinieron por periodos desde una semana hasta dos meses, entre los cuales citamos al Dr. Emilio Lluis Riera, el M. C. Remigio Valdés y el Dr. Gonzalo Zubieta.

En 1964, la Escuela de Matemáticas se transforma en Facultad de Ciencias Físico – Matemáticas.

En 1970 la Facultad ocupa su actual edificio en Ciudad Universitaria, y el 7 de junio de 1971 se concede la autonomía a la Universidad.

De 1964 a 1980 se adquieren equipos de Física para practicantes de Mecánica, Electricidad, Electrónica, Física Nuclear, Física Moderna y Geofísica.

En 1975 se aprueban: la creación de una nueva carrera de Licenciado en Ciencias Computacionales y las modificaciones en las carreras de Licenciado en Matemáticas y Licenciado en Física.

EJERCICIO 8. **MATEMÁTICAS EN EUROPA DEL 500 AL 1600.**

1. Resolver el siguiente problema del libro de Alcuin: Si **100** bultos de maíz se distribuyen entre **100** personas, de manera que cada hombre reciba **3**, cada mujer reciba **2** y cada niño reciba **1/2** bulto, encontrar cuántos hombres, mujeres y niños son .

2. Resolver el siguiente problema de la geometría de Gerbert: Encontrar los catetos de un triángulo rectángulo, dada la hipotenusa y el área.

3. Resolver el siguiente problema de ***Liber Abaci*** de Fibonacci : Si **30** hombres plantan **1000** árboles en **9** días, ¿Cuántos días tardarán **36** hombres en plantar **4400** árboles ?

4. Verificar que los cuadrados de $a^2 - 2ab - b^2$; $a^2 + b^2$; $a^2 + 2ab - b^2$ están en progresión aritmética (**Del Liber Abaci**)

5. (a) Resolver el tercer problema de la competencia de Fibonacci: Tres hombres poseen cierta cantidad de dinero de la cual al primero le corresponde la mitad, al segundo la tercera parte y al tercero la sexta parte. Cada uno de ellos toma una parte hasta agotar la cantidad total; después el primero regresa la mitad, el segundo la tercera parte y el tercero la sexta parte de lo que habían tomado. Cuando el total regresado se divide en partes iguales entre los 3, cada uno tiene lo que le corresponde. Encontrar la cantidad total y las cantidades tomadas por cada uno de ellos al principio.

   (b) Demostrar que cualesquier **2** términos consecutivos de la secuencia de Fibonacci son primos entre sí.

6. Un hombre toma cierto número de manzanas de una huerta. Para salir tiene que pasar siete puertas; al guardia de la primera puerta le deja la mitad de las manzanas más una, al segundo le deja la mitad de las que le quedan más una y así sucesivamente hasta el séptimo guardia, saliendo con una manzana.
¿Cuántas manzanas había tomado de la huerta?

7. Demostrar que la sustitución $x = z - \frac{a_1}{na_0}$ transforma la ecuación $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_0$ en una ecuación en **z** que no tiene término de grado **(n-1).**

8. Establecer la siguiente identidad trigonométrica dada por Viète: $\mathrm{Sen}\,\alpha = \mathrm{Sen}(60^\circ + \alpha) - \mathrm{Sen}(60^\circ - \alpha)$

9. Empezando con **a = 200**, aproximar por el método de Viète, una solución de la ecuación $x^2 + 7x = 60{,}750$

10. Resolver la ecuación cuártica $13x^2 = x^4 + 2x^3 + 2x + 1$ agregando $3x^2$ a ambos lados para completar el cuadrado del lado derecho (G. Cardano).

11. Aplicar el método de Viète para encontrar una raíz de la ecuación cúbica $x^3 + 63x = 316$

CAPÍTULO 7

RENACIMIENTO CIENTÍFICO.

7.1 EL SIGLO XVII.

Es el siglo del renacimiento científico, impulsado por las condiciones políticas, económicas y sociales, entre las cuales se pueden mencionar las siguientes:

a) Respeto a los derechos humanos.

b) Internacionalismo intelectual y científico.

c) Atmósfera política favorable en Europa.

d) Mejores máquinas, calefacción y alumbrado apropiado.

e) Maestros investigadores de planta en las universidades.

En matemáticas se obtiene un notable avance con los siguientes hechos sobresalientes:

1. John Napier inventa los logaritmos.
2. Harriot y Oughtred afinan la notación algebraica.
3. Galileo inicia la ciencia de la Dinámica.
4. Kepler anuncia sus leyes del movimiento planetario.
5. Desargues encuentra nuevos campos para la geometría.
6. Descartes formaliza la geometría analítica y la metodología de la ciencia.
7. Pascal inventa las primeras computadoras mecánicas.
8. Fermat establece los fundamentos de la teoría de números.
9. Huygens contribuye a la teoría de probabilidades.
10. Newton y Leibinz formalizan el cálculo.

EJERCICIO 8. **MATEMÁTICAS EN EUROPA DEL 500 AL 1600.**

1. Resolver el siguiente problema del libro de Alcuin: Si **100** bultos de maíz se distribuyen entre **100** personas, de manera que cada hombre reciba **3**, cada mujer reciba **2** y cada niño reciba **1/2** bulto, encontrar cuántos hombres, mujeres y niños son .

2. Resolver el siguiente problema de la geometría de Gerbert: Encontrar los catetos de un triángulo rectángulo, dada la hipotenusa y el área.

3. Resolver el siguiente problema de ***Liber Abaci*** de Fibonacci : Si **30** hombres plantan **1000** árboles en **9** días, ¿Cuántos días tardarán **36** hombres en plantar **4400** árboles ?

4. Verificar que los cuadrados de $a^2 - 2ab - b^2$; $a^2 + b^2$; $a^2 + 2ab - b^2$ están en progresión aritmética (**Del Liber Abaci**)

5. (a) Resolver el tercer problema de la competencia de Fibonacci: Tres hombres poseen cierta cantidad de dinero de la cual al primero le corresponde la mitad, al segundo la tercera parte y al tercero la sexta parte. Cada uno de ellos toma una parte hasta agotar la cantidad total; después el primero regresa la mitad, el segundo la tercera parte y el tercero la sexta parte de lo que habían tomado. Cuando el total regresado se divide en partes iguales entre los 3, cada uno tiene lo que le corresponde. Encontrar la cantidad total y las cantidades tomadas por cada uno de ellos al principio.

   (b) Demostrar que cualesquier **2** términos consecutivos de la secuencia de Fibonacci son primos entre sí.

6. Un hombre toma cierto número de manzanas de una huerta. Para salir tiene que pasar siete puertas; al guardia de la primera puerta le deja la mitad de las manzanas más una, al segundo le deja la mitad de las que le quedan más una y así sucesivamente hasta el séptimo guardia, saliendo con una manzana. ¿Cuántas manzanas había tomado de la huerta?

7. Demostrar que la sustitución $x = z - \dfrac{a_1}{na_0}$ transforma la ecuación $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_0$ en una ecuación en **z** que no tiene término de grado **(n-1)**.

8. Establecer la siguiente identidad trigonométrica dada por Viète: $\operatorname{Sen}\alpha = \operatorname{Sen}(60^\circ + \alpha) - \operatorname{Sen}(60^\circ - \alpha)$

9. Empezando con **a = 200**, aproximar por el método de Viète, una solución de la ecuación $x^2 + 7x = 60{,}750$

10. Resolver la ecuación cuártica $13x^2 = x^4 + 2x^3 + 2x + 1$ agregando $3x^2$ a ambos lados para completar el cuadrado del lado derecho (G. Cardano).

11. Aplicar el método de Viète para encontrar una raíz de la ecuación cúbica $x^3 + 63x = 316$

CAPÍTULO 7

RENACIMIENTO CIENTÍFICO.

7.1 EL SIGLO XVII.

Es el siglo del renacimiento científico, impulsado por las condiciones políticas, económicas y sociales, entre las cuales se pueden mencionar las siguientes:

a) Respeto a los derechos humanos.

b) Internacionalismo intelectual y científico.

c) Atmósfera política favorable en Europa.

d) Mejores máquinas, calefacción y alumbrado apropiado.

e) Maestros investigadores de planta en las universidades.

En matemáticas se obtiene un notable avance con los siguientes hechos sobresalientes:

1. John Napier inventa los logaritmos.
2. Harriot y Oughtred afinan la notación algebraica.
3. Galileo inicia la ciencia de la Dinámica.
4. Kepler anuncia sus leyes del movimiento planetario.
5. Desargues encuentra nuevos campos para la geometría.
6. Descartes formaliza la geometría analítica y la metodología de la ciencia.
7. Pascal inventa las primeras computadoras mecánicas.
8. Fermat establece los fundamentos de la teoría de números.
9. Huygens contribuye a la teoría de probabilidades.
10. Newton y Leibinz formalizan el cálculo.

7.2 JOHN NAPIER. (1550 - 1617)

Nació en Escocia. Originalmente se dedicó a las controversias políticas y religiosas de su época. En 1593 publicó su libro Una clara interpretación de las revelaciones de San Juan, en el que ataca a la iglesia de Roma y pretende demostrar que el Papa es anticristo y que el creador propuso el fin del mundo entre 1688 y 1700. Este libro se editó 21 veces y Napier pensó que le daría fama para la posteridad. Incluye profecías sobre la fabricación de máquinas infernales aéreas, terrestres y submarinas, ilustrando con dibujos semejantes a los tanques de guerra, aviones y submarinos actuales.

Posteriormente, Napier se interesó por las matemáticas contribuyendo con los siguientes resultados:

1. La invención de los logaritmos.

2. La regla de las partes circulares para reproducir las fórmulas que resuelven triángulos esféricos.

3. Analogías de Napier, para resolver triángulos esféricos oblicuos.

4. Las varillas de Napier, regla de cálculo de escalas logarítmicas deslizantes para multiplicar, dividir y extraer raíces cuadradas mecánicamente.

LOGARITMOS. Napier definió sus logaritmos al relacionar el movimiento de 2 puntos que se mueven en líneas rectas paralelas y publicó sus resultados en 1614 en un folleto titulado ***Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*** (Descripción de las maravillosas leyes de los logaritmos) incluyendo una tabla de logaritmos del seno de un ángulo cada minuto.

HENRY BRIGGS (1561 - 1631). Profesor de matemáticas en Oxford, perfeccionó con Napier el sistema logarítmico de base 10. En 1624 publicó su ***Aritmética Logarítmica*** conteniendo una tabla de logaritmos decimales del 1 al 20,000 y del 90,000 al 100,000 con 14 decimales, proponiendo las palabras característica para la parte entera y mantisa (apéndice o agregado) para la parte decimal de los logaritmos. El Holandés Adriaen Vlacq completó la tabla del 20,000 al 90,000.

EDMUND GUNTER (1581 - 1626). Publicó en 1620 una tabla de logaritmos decimales de senos y tangentes de ángulos cada minuto y propuso los términos coseno y cotangente.

Entre 1924 y 1949 se elaboró en Inglaterra una tabla de logaritmos comunes aproximados a 20 decimales, para celebrar el tricentenario de la invención de los logaritmos.

7.3 PRIMEROS MAESTROS INVESTIGADORES DE PLANTA.

HENRY SAVILLE, Profesor de Oxford, en 1619 proporcionó un capital a una Fundación para patrocinar un profesor distinguido en geometría y otro en astronomía. Henry Briggs fue el primero en ocupar el lugar correspondiente a Geometría en Oxford, seguido por John Wallis.

HENRY LUCAS. Proporcionó recursos económicos a la Universidad de Cambridge para un profesor distinguido en matemáticas. Isaac Barrow fue el primero en ocupar este lugar, seguido por Isaac Newton.

THOMAS HARRIOT (1560 - 1621). Viajó a América enviado por Sir Walter Raleigh para realizar un mapa de Carolina del Norte. Fue el fundador de la escuela algebrista inglesa. Su obra principal fue ***Artis Analiticae Praxis*** publicada 10 años después de su muerte. Trata con la teoría de ecuaciones polinomiales, incluyendo las de 1º 2º, 3º y 4º grado, transformaciones de ecuaciones en otras cuyas raíces tienen cierta relación con las de la ecuación original y solución numérica de ecuaciones de alto grado. Mejora la notación de Viète e introduce los signos para las relaciones de orden **>** y **<**.

WILLIAM OUGHTRED (1574 - 1660). Fue maestro de John Wallis y otros famosos matemáticos ingleses. En 1631 escribió su texto ***Clavis Mathematicae*** de aritmética y álgebra, incluyendo nuevos símbolos: para multiplicación, **x**; para proporciones, y **-** para restar. Además publicó su obra ***The Circles of Proportion*** en la que describe una regla de cálculo circular. También propone abreviaciones para los nombres de las funciones trigonométricas en su libro ***Trigonometrie.***

7.4 GALILEO GALILEI (1564 - 1642)

Nació en Pisa, Italia. Inició sus estudios de medicina, pero cambió a matemáticas. Siendo estudiante de medicina observó que el péndulo del candil de la catedral oscilaba con un período independiente del arco de oscilación. Posteriormente demostró que el período es también independiente del peso del péndulo. A los 25 años se inició como profesor de matemáticas en Pisa. Ahí realizó experimentos de caída libre en la torre de la Universidad, mostrando que, despreciando el efecto del aire (es decir, en el vacío) los cuerpos de diferente peso siguen la misma ley de caída libre: La distancia recorrida es proporcional al cuadrado del tiempo $s = \frac{1}{2}gt^2$.

En 1591, Galileo renunció a la Universidad de Pisa y se trasladó a Padua como profesor de matemáticas, encontrando un ambiente más favorable para sus investigaciones.

En 1607, el Holandés Johann Lippersheim inventó el telescopio, y Galileo fabricó el suyo con el que observó las manchas del sol, las montañas de la luna, las fases de Venus, los anillos de Saturno y los cuatro satélites de Júpiter, corroborando la Teoría de Copérnico sobre el sistema solar. En 1632 publicó un libro apoyando la teoría de Copérnico, contraria a la Teoría Geocéntrica de Aristóteles y en 1633 fue detenido por la Inquisición y obligado a desmentir sus descubrimientos científicos que se oponían a la iglesia. Después de esto quedó ciego y murió a los 78 años.

Galileo está considerado el creador del espíritu científico moderno de verificación experimental de las teorías. Estableció las leyes de movimiento de cuerpos en caída libre y los fundamentos de la dinámica general. Fue el primero en observar que la trayectoria de un proyectil es parabólica. Inventó el primer microscopio moderno. Sus leyes de dinámica y las leyes de equivalencia de conjuntos infinitos aparece en su ***Discorsie Dimostrazione Matematiche intorno a due Nuova Scienze,*** publicado en 1638.

5.5 JOHANN KEPLER. (1571 - 1630)

Nació en Stuttgart, Alemania y estudió en Tübingen con la intención de ser un ministro luterano, pero su interés por la astronomía le hizo aceptar una plaza de profesor en Austria en 1594, donde fue ayudante del astrónomo Suizo Tycho Brahe en 1599, quien murió en 1601, dejando a Kepler su puesto y su colección de datos astronómicos de 30 años sobre el movimiento de los planetas. Después de muchos cálculos, en 1609 Kepler formuló sus 2 primeras leyes del movimiento planetario, y en 1619 formuló la tercera.

I. Los planetas se mueven alrededor del sol en órbitas elípticas, con el sol en uno de sus focos.

II. El radio vector que une un planeta con el sol, genera áreas iguales en iguales intervalos de tiempo.

III. El cuadrado del tiempo de una revolución completa de un planeta alrededor del sol es proporcional al cubo del semi-eje mayor de su órbita.

El descubrimiento empírico de estas leyes, a partir de la masa de datos coleccionados por Brahe es uno de los más notables en la historia de la ciencia; 1800 años después de que los griegos establecen las características de las cónicas, Kepler encuentra una aplicación en el sistema solar.

Kepler está considerado uno de los precursores del Cálculo. Para la 2ª ley del movimiento planetario, calculó áreas utilizando una integración rudimentaria y en su libro ***Stereometría Doliorum Vinorum*** (Geometría Sólida de los Barriles de Vino), publicado en 1615, aplica procedimientos de integración para encontrar los volúmenes de 93 sólidos obtenidos girando segmentos de secciones cónicas.

Trabajó en el estudio de los poliedros, analizando los antiprismas que se obtienen girando la base de un prisma hasta hacerla coincidir con la tapa. Después descubrió 2 de los 4 posibles poliedros *estrella* regulares; los otros 2 fueron descubiertos por Louis Poinsiut (1777 - 1859). Estos 4 poliedros estrella corresponden a los polígonos estrella regulares en el plano.

Kepler también trabajó en los problemas de llenar el plano con polígonos regulares y el espacio con poliedros regulares no necesariamente iguales. Aproximó el perímetro de una elipse de semi-ejes **a** y **b** por la fórmula $\mathbf{P = \pi(a + b)}$ y estableció que una parábola puede considerarse como el caso límite de una elipse o una hipérbola, en las cuales uno de los focos se hace tender al infinito; esto fue utilizado por Poncelet en 1822 para dar una *real* justificación de los imaginarios en la geometría.

GERARD DESARGUES (1593 - 1662). Ingeniero y oficial del ejército francés, inventor de la Geometría Proyectiva. Escribió un libro sobre las secciones cónicas en 1639 que no tuvo aceptación porque el **Tratado de Geometría Analítica** de Descartes ofrecía mayores posibilidades. En 1633 ofreció una serie de conferencias que impresionaron a Pascal y Descartes, quienes lo mencionan como una fuente de sus inspiraciones.

7.6 BLAISE PASCAL. (1623 - 1662).

Fue un genio de las matemáticas que desde temprana edad mostró extraordinaria habilidad para la geometría. A los 12 años descubrió por su cuenta muchos de los teoremas de la geometría

elemental; a los 14 años participó en discusiones de un grupo de matemáticos franceses que posteriormente fundaron la Academia Francesa; a los 16 años obtuvo nuevos y profundos teoremas de geometría proyectiva de las curvas; a los 18 inventó la primera máquina computadora mecánica para ayudar a su padre en las auditorías de las contabilidades del gobierno en Rouen (esta computadora manejaba números hasta de 6 cifras). Pascal fabricó más de 50 máquinas calculadoras mecánicas, de las cuales todavía se conservan 7 en el Conservatoire Des Arts et Metiers de París.

Esta habilidad de Pascal fue cortada súbitamente en 1650, a los 27 años de edad, cuando decidió abandonar sus investigaciones científicas para dedicarse a meditaciones religiosas, debido posiblemente a sus fuertes problemas de salud. Tres años más tarde volvió a las matemáticas y escribió el libro ***Traité du Triangle Arithmetique*** basado en el llamado Triángulo de Pascal, en el que la primera hilera es la sucesión constante {1} y cada elemento de la segunda hilera en adelante se obtiene sumando los elementos de la hilera anterior que están arriba y a la izquierda del elemento en cuestión:

$$a_{mn} = a_{m-1n} + a_{m-1n-1} + \ldots + 1 = \sum_{j=1}^{n} a_{m-1j}$$

1	1	1	1	1	1	1	1..........
1	2	3	4	5	6	7	8..........
1	3	6	10	15	21	28	36..........
1	4	10	20	35	56	84	120..........
1	5	15	35	70	126	210	330..........
1	6	21	56	126	252	462	792..........

....

....

Los triángulos de Pascal pueden hacerse de cualquier tamaño como el que se ilustra. Las diagonales de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba proporcionan los coeficientes de (a + b)n que son también las combinaciones de n en r:

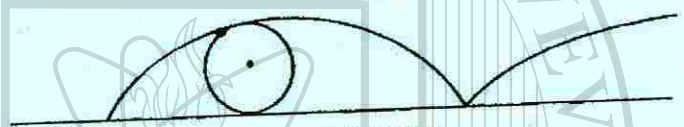
$$c(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Este triángulo fue construido primeramente por, el algebrista chino Chu – Shi - Kie en 1303, pero Pascal encontró gran número de propiedades y aplicaciones, por lo que se le da actualmente su nombre. Este libro de Pascal presenta por primera vez el método formal de inducción matemática.

En 1654, tuvo un accidente en el que los caballos de su carro saltaron el parapeto del puente de Neuilly y Pascal lo consideró un *aviso divino* de que sus actividades no eran agradables a Dios.

En 1658 volvió brevemente a las matemáticas por 8 días. Desarrolló la geometría de la curva cicloide y resolvió problemas que al publicarse como conjeturas, causaron serias dificultades a los matemáticos.

Pascal ha sido considerado como uno de los más grandes que pudieron haber sido, pero sus serios problemas de salud, su corta vida y su neurosis mental religiosa se lo impidieron.



CICLOIDE

CICLOIDE. Curva generada en un plano por un punto de un círculo que se desplaza girando sobre una línea recta.

HIPO-CICLOIDE. Curva generada en un plano por un punto de un círculo que se desplaza girando por el interior de otro círculo mayor.

EPI-CICLOIDE. Curva generada en un plano por un punto de un círculo que se desplaza girando sobre el exterior de otro círculo fijo.

Estas curvas tienen importantes propiedades físicas y matemáticas y su estudio posterior a través del Cálculo tiene aplicaciones a las maquinarias industriales.

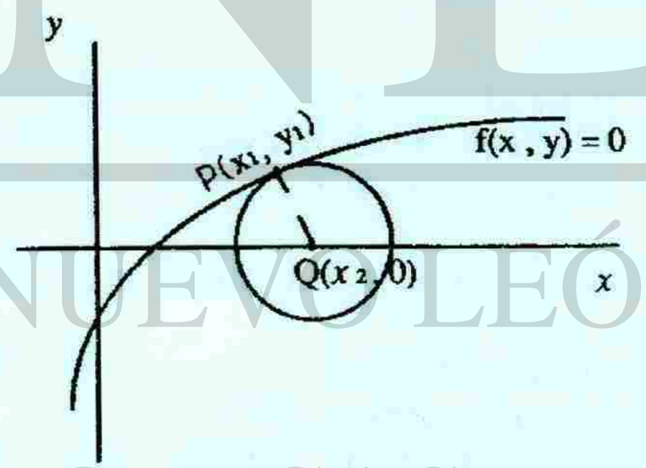
7.7 RENÉ DESCARTES (1596 - 1650)

Nació en Tours, Francia. A los 8 años fue internado en la escuela jesuita de La Flèche donde inició su costumbre, al principio por enfermedad, de permanecer en cama casi toda la mañana, meditando sobre sus inquietudes científicas; a los 16 años dejó la escuela y se fue a París a estudiar matemáticas; a los 21 años ingresó al ejército. Posteriormente renunció a la vida militar y viajó 5 años por Alemania, Dinamarca, Holanda, Suiza e Italia. Regresó a París a continuar sus estudios de matemáticas y Filosofía, dedicándose por un tiempo a fabricar instrumentos ópticos. Volvió a Holanda por 20 años, dedicándose a la filosofía y las matemáticas. En 1649 fue a Suecia por invitación de la Reina Cristina, donde murió en 1650 de una pulmonía.

Durante sus primeros 4 años en Holanda escribió ***Le Monde***, un libro sobre el universo. Después escribió un tratado filosófico de Ciencia Universal titulado ***Discourse de la Methode pour bien Conduire la Raison et chercher la Verité dans les Sciences*** (Descripción del método para conducir bien la razón y buscar la verdad en las ciencias).

Esta obra contiene 3 apéndices: **La Dioptrique**, **Les Metéores** y **La Geometrie,** y fue publicada en 1637. El último de los apéndices está considerado como el primer tratado formal de geometría analítica. Contiene 100 páginas divididas en 3 partes:

1. Geometría Algebraica. Fundamentos de Geometría Analítica.
2. Clasificación de curvas y un método para trazar tangentes a curvas cuadráticas en un punto P(x1, y1)

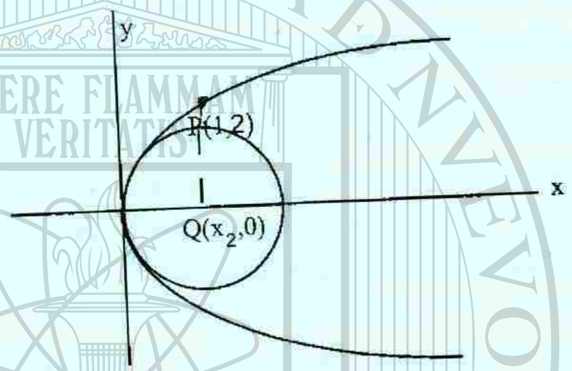


Para encontrar la tangente a la curva de **f(x, y) = 0** en el punto **P(x_1, y_1),** Descartes considera la familia de círculos con centro en el eje x que pasan por P(x_1, y_1) y encuentra el círculo de esta familia que al intersectarse con la curva, tenga al punto P como único punto de contacto. Entonces

$\overline{QP}$ determina la normal a la curva, de manera que la tangente resulta determinada por su pendiente

$m_T = -\dfrac{1}{m_N}$.

Por ejemplo: Encontrar la tangente a la parábola $y^2 = 4x$ en el punto **P(1, 2)**



Solución. Ecuación de la familia de círculos con centro en el eje *x*; $Q(x_2, 0)$ que pasan por **P(1, 2)**

$$r = \sqrt{(1-x_2)^2+4}\ ;\ c\,(x_2, 0)$$

$$\begin{cases} (x-x_2)^2+y^2=(1-x_2)^2+4 & (1)\\ y^2=4x & (2)\end{cases}$$

Sustituyendo (2) en (1):

$$(x-x_2)^2+4x=(1-x_2)^2+4$$
$$x^2-2xx_2+x_2^2+4x = 1-2x_2+x_2^2+4$$
$$x_2+x(4-2x_2)+2x_2-5=0$$

Para que las 2 raíces sean iguales, $B^2 - 4AC = 0$, donde $B = 4 - 2x_2$; $A = 1$; $C = 2x_2 - 5$

$$\therefore\quad (4-2x_2)^2-4(2x_2-5)=0$$
$$16-16x_2+4x_2^2-8x_2+20=0$$
$$4x_2^2-24x_2+36=0$$
$$\div 4 \qquad x_2^2-6x_2+9=0$$
$$(x_2-3)^2=0$$
$$x_2=3$$

P(1, 2) ; **Q(3, 0)** , determinan la normal **N** en **P**

$$m_N = \frac{2}{1-3} = \frac{2}{-2} = 1$$

$$\therefore\quad m_T = 1 \quad ; \quad P(1, 2)$$

$$y-2 = 1(x-1) = x-1$$
$$\boxed{y-x-1=0}$$

3. Trata con la solución de ecuaciones polinomiales de grado mayor que 2 aplicando que lo que ahora conocemos como Regla de Descartes de los signos para la naturaleza de las raíces de la ecuación.

Ejemplo: Determinar la naturaleza de las raíces del polinomio $P(x) = x^7 - 3x^5 - 2x^2 + x + 10 = 0$, aplicando la regla de Descartes de los signos.

Solución:

Número de cambios de signo en **P(x) = 2**

$\therefore$ Nº de raíces reales positivas = **2 ó 0** = (Nº de cambios de signo en **P(x)** **2h** ; **h = 0,1,2,3,...)**

$P(-x) = -x^7 + 3x^5 + 2x^2 - x + 10$

Nº de cambios de signo en **P(-x) = 3**

$\therefore$ Nº de raíces reales negativas = **3 ó 1** = (Nº de cambios de signo en **P(-x)** **- 2h;** **h = 0,1,2,3,...)**

Además: Nº de raíces complejas = **2, 4 ó 6 = 2h;** **h = 0,1,2,3,...**

Nº total de raíces en los complejos = **7 = n** (grado de la ecuación).

Entonces, las alternativas son:

a) 0(+); 1(-) y 6(c)

o

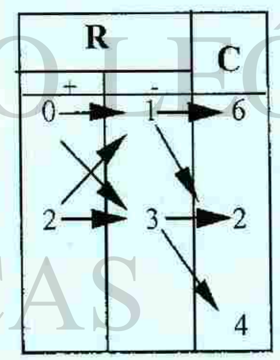
b) 0(+); 3(-) y 4(c)

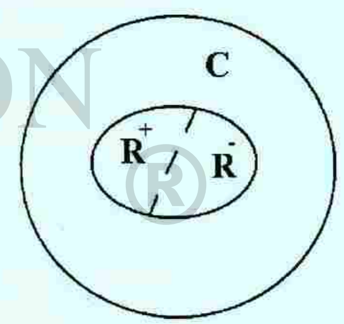
o

c) 2(+); 1(-) y 4(c)

o

d) 2(+); 3(-) y 2(c)





$\therefore$ Hay por lo menos 1 raíz real negativa y 2 complejas.

La **Geometrie** no es un desarrollo sistemático del método de la Geometría Analítica, sino que éste se deduce del contenido del texto. Hay 32 figuras sin establecerse explícitamente el sistema de los ejes coordenados. Una traducción al latín en 1649 con notas y comentarios de F. de Beaune y Franz Van Shoocten dieron al texto una amplia aceptación. Cien años después, la Geometría Analítica tomó la forma en que actualmente se encuentra, incluyendo las palabras: coordenadas, abscisa y ordenada, que fueron introducidas por Leibniz en 1692.

7.8 DESARROLLO DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA.

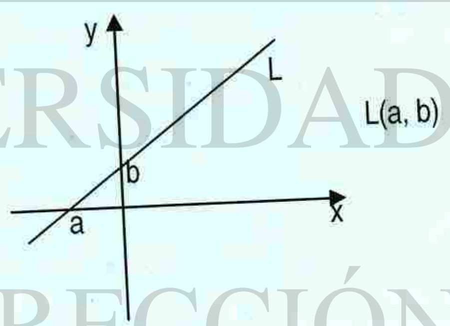
1691 **Jakob Bernoulli** Introduce las coordenadas polares.

1700 **Antoine Parent** Desarrolla la Geometría Analítica Sólida.

1731 **Alexis Clairaut** Describe analíticamente curvas no-coplanares en el espacio.

1790 Se proponen cambios de coordenadas para adecuarlas al tratamiento algebraico de los problemas geométricos.

1829 **Julius Plücher** Propone la línea recta como elemento fundamental, identificando una recta por sus intersecciones con los ejes, como coordenadas.



En esta geometría, un punto se identifica con la ecuación de la familia de rectas que pasan por él. Plücker demostró el Principio de Dualidad de la Geometría Proyectiva en el que una curva puede considerarse como el lugar geométrico de sus puntos o como la cubierta de sus tangentes.

1843 **Arthur Cayley** Considera hiperespacios con geometrías ene-dimensionales, **n > 3** puntos

$$d_{\overline{P_1P_2}} = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\dots+(y_n-x_n)^2}$$

7.9 PIERRE DE FERMAT.

Nació en Toulouse, Francia, en 1601 y murió en Castres en 1665. Abogado, consejero del Parlamento de Toulouse, dedicó su tiempo libre a las matemáticas. Aún cuando publicó muy poco durante su vida, sostuvo correspondencia con los mejores matemáticos de su época, influyendo en sus investigaciones y contribuyendo a diversas ramas de las matemáticas, por lo que se le considera el mejor matemático francés del siglo XVII.

Desarrolló la Geometría Analítica simultáneamente que Descartes en un libro que fue publicado después de su muerte con el título: ***Isogoge ad Locus Planos et Solidos*** que contiene las ecuaciones generales de rectas y círculos y una discusión de parábolas, elipses e hipérbolas. Considera las ecuaciones y estudia el lugar geométrico correspondiente, mientras que Descartes empieza con un lugar geométrico para encontrar su ecuación. Estos son los 2 aspectos inversos de la **Geometría Analítica**. Fermat escribió con una notación anticuada, mientras que Descartes utilizó simbolismo moderno.

Las contribuciones de Fermat a la Teoría de Números muestran una gran habilidad e intuición inspirado en la ***Arithmetica*** de Diofanto. Algunas de éstas son las siguientes:

1. Pequeño Teorema de Fermat. Si **P** es primo y **a** es relativamente primo con **P**, entonces $a^{P-1} - 1$ es divisible por **P**.

2. Todo número primo mayor que 2 puede expresarse en forma única como una diferencia de cuadrados.

3. Todo número primo de la forma **4n +1** puede expresarse como la suma de dos cuadrados. Este teorema fue demostrado por Euler en 1754, quien además demostró que la representación es única.

4. Todo entero no-negativo puede representarse como la suma de 4 ó menos cuadrados (Demostrado por Lagrange en 1770).

5. El área de un triángulo rectángulo de lados enteros no puede ser un cuadrado.

6. No hay enteros positivos **x**, **y**, **z**, tales que $x^4 + y^4 = z^2$.

7. Último Teorema de Fermat. *No hay enteros positivos* **x**, **y**, **z**, *tales que* $x^n + y^n = z^n$, *para* $n > 2$. Este teorema permanecía como conjetura hasta la actualidad, pero acaba de ser demostrado por Willis.

Fermat lo demostró para **n = 4**.

Euler lo demostró para **n = 3**.

1816-18 **La Academia de París** ofrece premiar la primera demostración completa del teorema.

1825 **Legendre y Dirichlet** lo demostraron para **n = 5**.

1839 **Lamé** lo demostró para **n = 7**.

1843 **E. Kummer**, desarrolla la Teoría de Ideales y lo demuestra para todo **n** primo regular. (Números de Jakob Bernoulli).

1908 **Paul Wolfskehl** ofrece 100,000 marcos de premio a la primera prueba completa del teorema. Este teorema es el que tiene el mayor número de demostraciones incorrectas publicadas.

8. $f(n) = 2^{2^n} + 1$ es primo para todo entero no-negativo **n**. Fermat estableció esto como conjetura y Euler mostró que para **n = 5, f(5)** no es primo, **f(5) = 4,294'967,297 = (641) (6'700,417).**

7.10 <u>ACADEMIAS, SOCIEDADES Y REVISTAS.</u>

Las academias de matemáticas surgieron de grupos que se reunían periódicamente para discutir trabajos escolares.

1560 **NÁPOLES.** Primera academia de matemáticas.

1603 **ROMA.** Academia *Dei Lincei.*

1662 **LONDRES.** Royal Society.

1666 **PARÍS.** French Academy.

REVISTAS. Hasta 1700 hubo 17 revistas con artículos de matemáticas, la primera de las cuales es de 1665.

1700-1800. 210 nuevas revistas de matemáticas.

1800-1900. 950 nuevas revistas de matemáticas.

La mayoría se dedicaba a matemáticas elementales, paradojas y matemáticas recreativas. La primera revista dedicada a matemáticas avanzadas exclusivamente fue el ***Journal de L'ècole Polythecnique,*** iniciada en 1794.

Algunas de las revistas actuales de matemáticas superiores se iniciaron a mediados del siglo XIX.

Por ejemplo:

1836 Journal de Mathematiques Pures et Apliquees.

1839 Cambridge Mathematical Journal. Esta revista cambió en:

1855 Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics.

1872 Bulletín de la Sociétè Mathematique de France.

1865 Proceedings of the London Mathematical Society.

1878 American Journal of Mathematics (Editado por J. Sylvester).

1887 Rediconti del Circolo Matematico de Palermo.

1888 Bulletín of the American Mathematics Society.

Actualmente, la mayoría de los países tienen sociedades matemáticas y revistas.

En México, la Sociedad Matemática Mexicana se inicia en 1943, realizando congresos, publicando su revista y apoyando el desarrollo de las matemáticas.

La Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas inicia sus actividades en 1968, convocando a congresos regionales y nacionales, publicando su revista e impulsando las matemáticas desde el nivel medio.

EJERCICIO 9. **PASCAL, DESCARTES Y FERMAT.**

1. Demostrar que la suma de los elementos de cualquier diagonal del Triángulo Aritmético de Pascal es igual al doble de la suma de los elementos de la diagonal anterior.
Sugerencia: Desarrollar $(1+1)^n$.

2. Sea **Amn** el elemento en la hilera **m** y la columna **n** del *Triángulo Aritmético* de Pascal. Demostrar que **Amn = A((m - 1)n + Am(n - 1).** (Aplicar la definición).

3. Aplicando las leyes de exponentes y la definición de logaritmo en base a establecer las siguientes propiedades: (Napier).

1) $\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$ 2) $\log_a \sqrt[t]{m} = \frac{1}{t}\log_a m$

4. Utilizando la regla de Descartes de los signos, determinar la naturaleza de las raíces de la ecuación:

$$x^9 + 3x^8 - 5x^3 + 4x + 6 = 0$$

5. Aplicando la regla de Descartes de los signos, verificar que la ecuación $x^5 + x^2 + 1 = 0$ tiene una raíz real negativa y cuatro raíces complejas.

6. Por el método de Descartes, encontrar la tangente a la parábola $y^2 = 4x + 1$ en el punto **P(0,1).** Graficar y verificar el resultado por cálculo diferencial.

7. Encontrar la ecuación en coordenadas polares del folio de Descartes $x^3 + y^3 = 3axy$. Graficarlo para **a = 2**.

8. Haciendo **y = tx**, encontrar las ecuaciones paramétricas del folio de Descartes, en términos del parámetro **t**.

9. Graficar el cardioide $r = a(1 - \cos\Theta)$, para **a = 2**. Encontrar su ecuación en coordenadas cartesianas.

10. Para **a = 2**, graficar la espiral de Arquímedes $r = a\Theta$. Encontrar su ecuación en coordenadas cartesianas.

11. Encontrar los primos de Fermat $2^{2^n} + 1$ para **n = 0, 1, 2, 3, 4.**

12. Si **Φ(n)** = Número de enteros positivos menores que **n**, y relativamente primos con **n**, encontrar **Φ(n)** para **n = 2, 3, 4,....,15.** **Φ (p) = ?,** para cualquier **p** primo.

13. Aplicando el teorema **Φ(ab) = Φ(a) Φ(b)** para todo **a** y **b** relativamente primos y mayores que **1**, encontrar: **Φ(120), Φ(154), Φ(504), Φ(111,030), Φ(180,180).**

CAPÍTULO 8.

ORIGEN Y DESARROLLO DEL CÁLCULO.

8.1 ANTECEDENTES:

1. PARADOJAS DE ZENÓN. (450 A. C.)

Como ya fue considerado en la historia de las matemáticas griegas, estas paradojas surgen del principio de la subdivisión infinita y la hipótesis falsa de que toda suma infinita de números positivos es infinita.

2. MÉTODO EXHAUSTIVO DE EUXODUS.

Este método de aproximación sucesiva fue utilizado para calcular áreas y volúmenes desde la época de Eudoxus y Arquímedes, aplicando el principio de la subdivisión infinita, acercándose notablemente a la integración actual.

8.2 ORIGEN DE LA INTEGRACIÓN EN EUROPA. KEPLER.

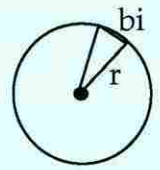
Una traducción de los manuscritos de Arquímedes encontrados en Constantinopla, fue revisada por Johann Muller e impresa en 1540 y a principios del siglo 17 fue difundida entre los matemáticos europeos que empezaron a desarrollar las ideas de Arquímedes.

Johann Keppler (1571-1630) desarrolló un proceso de integración para calcular áreas y volúmenes relacionados con las leyes del movimiento planetario. Para calcular el área de un círculo, Kepler consideraba a la circunferencia como el perímetro de un polígono regular de un número infinito de lados. Cada uno de estos lados es la base de un triángulo con vértice en el centro del círculo. Entonces, el área del círculo es la suma infinita de estos triángulos infinitesimales, todos ellos con altura igual al radio **r** del círculo.

Área de cada triángulo infinitesimal $= \frac{1}{2}br$

$\therefore$ Área del círculo $= \frac{1}{2}r\sum_{i=1}^{\infty} b_i$

$$A = \frac{1}{2}rC$$



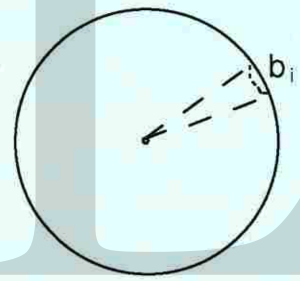
Ahora, $C = \pi d = 2\pi r$

$\therefore$ $A = \pi r^2$

De manera similar, el volumen de una esfera lo consideró como la suma de los volúmenes de conos circulares con vértice en el centro de la esfera y base un círculo infinitesimal en la superficie de la esfera.

Volumen de un cono infinitesimal $= \frac{1}{3}br$

Volumen de la esfera $= \frac{1}{3}r\sum_{i=1}^{\infty} b_i$



$$V = \frac{1}{3}rS = \frac{1}{3}r\,4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

8.3 BONAVENTURA CAVALIERI. (1598- 1647).

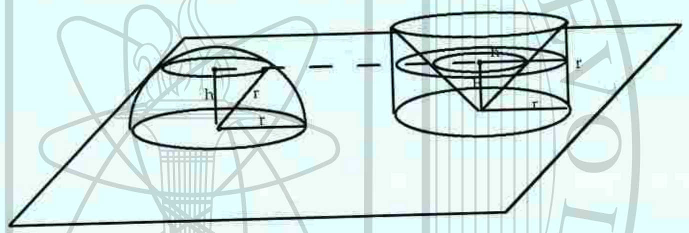
Profesor de matemáticas en la Universidad de Bologna desde 1629 hasta su muerte. Escribió sobre matemáticas, óptica y Astronomía.

Su principal trabajo en matemáticas fue ***El método de los indivisibles*** publicado en 1635, basado en el siguiente *Principio de Cavalieri* :

1. Si dos piezas planares son tales que, al colocarlas entre 2 líneas paralelas en un plano, cualquier recta paralela a estas 2 líneas limitantes corta segmentos de igual longitud en las 2 piezas, entonces sus áreas son iguales.

2. Si dos sólidos se colocan entre 2 planos paralelos y si cualquier plano paralelo a estos 2 planos limitantes, corta secciones iguales en área en los sólidos, entonces sus volúmenes son iguales.

Ejemplo: Para encontrar el volumen de una esfera, se colocan una semiesfera de radio **r** y un cilindro circular de radio **r** y altura **h**, al cual se le quita un cono con base en la cara superior del cilindro y vértice en el centro de la base del cilindro.



Si cortamos ambos sólidos con un plano paralelo al plano base a una altura **h**, se tiene:

a) Sección en la semiesfera = Círculo de radio $r_1 = \sqrt{r^2 - h^2}$

$\therefore$ Área $A_a = \pi(r^2 - h^2)$.

b) Sección en el cilindro rebajado = Aro con círculo interior de radio h y círculo exterior de radio r.

$\therefore$ **Área** $A_b = \pi r^2 - \pi h^2 = \pi(r^2 - h^2)$

Entonces: $A_a = A_b$ y por el principio de Cavalieri, los 2 sólidos tienen el mismo volumen.

$\therefore$ Volumen de la semiesfera = Volumen del cilindro menos Volumen del cono.
$(V_{se} = V_{ci} - V_{co})$

$$\therefore \quad V_e = 2\left(\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3\right)$$

$$= 2\left(\frac{2}{3}\pi r^3\right)$$

$$V_e = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Procesos similares al método de los indivisibles fueron utilizados por Torriceli, Fermat, Pascal y Barrow.

8.4 ORIGEN DE LA DERIVACIÓN.

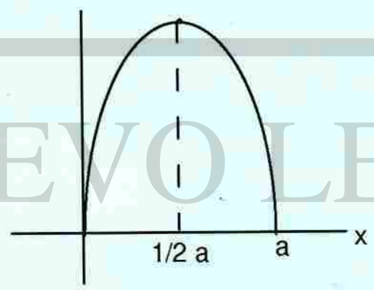
La derivación surgió prácticamente de los problemas de determinar tangentes a curvas y máximos y mínimos de funciones. Aunque estos problemas fueron considerados desde la época de los griegos, la primera anticipación notable del método de derivación la proporcionó Fermat al desarrollar en 1629 el siguiente método para determinar máximos y mínimos de funciones de una variable.

SI **f (x)** tiene un máximo (o mínimo) en **x**, entonces **f (x-e)** es "casi igual" a **f (x)** si **e** es un número *muy pequeño*. Por lo tanto, haciendo **f (x-e) = f (x),** simplificando y después asignando a **e** el valor cero, se encuentran los valores de **x** que corresponden a máximo o mínimo de **f (x).**

Ejemplo: Dividir el número **a** en 2 partes tales que su producto sea máximo.

Solución. Sean **x** y **(a-x)** las 2 partes.

Maximizar: $f(x) = x(a - x)$
$f(x) = ax - x^2$



Proceso de Fermat:

1. $f(x - e) = a(x - e) - (x - e)^2$
$= ax - ae - x^2 + 2ex - e^2$

2. Hagamos $\mathbf{f(x-e) = f(x)}$

$$\mathbf{ax - x^2 + 2ex - ea - e^2 = ax - x^2}$$

$$\mathbf{\div\ e \neq 0 \quad 2ex - ea - e^2 = 0}$$

$$\mathbf{2x - a - e = 0}$$

3. Ahora, haciendo $\mathbf{e = 0}$:

$$\mathbf{2x - a = 0}$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}a}$$

Puesto que debe haber un máximo **f (x)** y $x = \frac{1}{2}$ a es el único posible máximo o mínimo, entonces corresponde al máximo y las partes son **1/2 a** y **1/2 a**.

Por el método actual del cálculo:

Máx. $\mathbf{f(x) = ax - x^2}$

$\mathbf{f'(x) = a - 2x = 0}$ **p.c.t.h.**

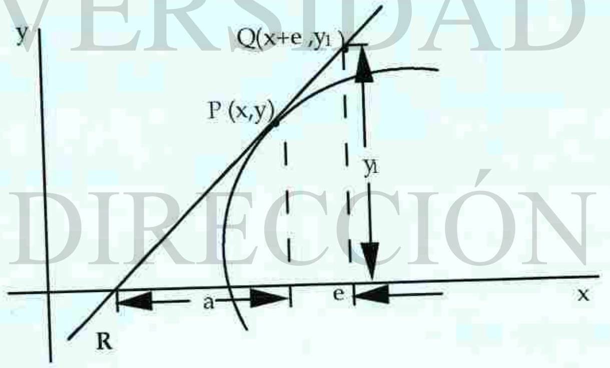
$$\boxed{x = \frac{1}{2}a}$$

$\therefore$

$$\mathbf{f''(x) = -2 < 0} \Rightarrow$$

$\therefore \quad x = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}a$ corresponde a Máx **f (x)**

Fermat también desarrolló un método para encontrar la tangente a una curva en un punto dado P, a partir de su ecuación cartesiana:



Sea **a** = sub-tang. de **f (x,y) = 0** en **P**.

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{y_1}{a+e} = \frac{y}{a} \Rightarrow y_1 = \frac{a+e}{a}y = y\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{a}}\right)$$

Si **e** es "muy pequeño", entonces **Q** está *casi* en la curva de **f(x, y) = 0**. Considerando provisionalmente que **Q** está en la curva, se tiene:

$$\mathbf{f(x+e),\ y\ (1 + e/a) = 0}$$

Simplificando y haciendo después **e = 0** para que la ecuación sea correcta, se encuentra **a** en términos de las coordenadas de **P**.

Ejemplo: Encontrar la sub-tangente en cualquier punto del folio de Descartes:

$$\mathbf{x^3 + y^3 = nxy}$$

Solución: En **Q (x + e, y (1 + e/a)):** $(x+e)^3 + y^3(1+e/a)^3 - n(x+e)y(1+e/a) = 0$

$$\cancel{x^3} + 3x^2e + 3xe^2 + e^3 + \cancel{y^3} + \frac{3e}{a}y^3 + \frac{3e^2}{a^2}y^3 + \frac{e^3}{a^3}y^3$$

$$-\ \cancel{nyx} - nye - \frac{ne}{a}yx - \frac{ne^2}{a}y = 0$$

Dividiendo entre **e ≠ 0**:

$$\mathbf{3}x^2 + \frac{\mathbf{3}}{a}y^3 - \frac{n}{a}xy - ny + e\left(\mathbf{3}x + \frac{\mathbf{3}}{a^2}y^3 - \frac{n}{a}y\right) + \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{a^3}y^3\right) = \mathbf{0}$$

Para **e = 0**:

$$\mathbf{3}x^2 - ny = \frac{nxy}{a} - \frac{\mathbf{3}y^3}{a}$$

$$\therefore \quad \boxed{a = \frac{nxy - \mathbf{3}y^3}{\mathbf{3}x^2 - ny}}$$

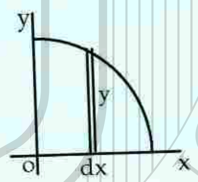
8.5 JOHN WALLIS (1616 - 1703).

Profesor de matemáticas en Oxford durante 54 años, desde 1649 hasta su muerte. Fue el primero en considerar las cónicas como ecuaciones de segundo grado.

En 1656 publicó su libro ***Arithmetica Infinitorum*** en el que amplía y sistematiza los métodos de Descartes y Cavalieri. Induce resultados como los siguientes (en notación actual):

$\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{m+1}$, para toda **m** racional diferente de **-1**.

Explica completamente el significado de los exponentes negativos, cero y fraccionarios e introduce el símbolo actual ∞ para infinito. Determina el número π, encontrando el área de un cuadrante del círculo $x^2 + y^2 = 1$, lo cual equivale a evaluar



$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 (1-x^2)^{1/2} dx$$

En 1673 escribió el primer libro inglés importante, sobre historia de las matemáticas, publicado en 1685 con el título : ***De Algebra Tractatus Historicus et Practicus***. En este libro presenta una interpretación gráfica de las raíces complejas de las ecuaciones cuadráticas. Fue miembro fundador de la Royal Society.

ISAAC BARROW (1630 - 1677).

Graduado en Cambridge con honores en Matemáticas, fue el primero en ocupar la plaza de la fundación Henry Lucas, renunciando en 1669 para pasar su lugar a su discípulo Isaac Newton.

Su principal obra es un libro publicado en 1669 con el título ***Lectiones Opticae et Geometricae*** en el que se aproxima al actual proceso de diferenciación al determinar tangentes a curvas. Establece que la derivación y la integración son procesos inversos.

RESUMEN. Hasta este momento del cálculo se han realizado integraciones para obtener áreas y volúmenes, y derivaciones para encontrar máximos y mínimos y tangentes a curvas con una idea informal del concepto de límite. Lo que falta es la creación de un simbolismo general y completo y un conjunto de reglas analíticas y conceptos formales, lo cual fue realizado por Newton y Leibiniz. Cien años después, el analista francés Agustín Louis Cauchy estableció las bases rigurosas para la formalización de los conceptos fundamentales del Cálculo, en el siglo XIX.

8.6 ISAAC NEWTON (1642 - 1727)

Hijo de un granjero que murió antes de que él naciera, y que esperaba que se dedicara a la granja; desde niño mostró gran habilidad y entusiasmo para los modelos mecánicos y los experimentos. Construyó un molino de juguete que convertía el trigo en harina, usando un ratón como fuerza motriz y un reloj de madera accionado por una corriente de agua.

En 1660, entró al Trinity College de Cambridge, interesándose por las matemáticas al leer los ***Elementos*** de Euclides, que encontró claros, y la ***Geometrie*** de Descartes, que le pareció oscura y algo difícil. También estudió los trabajos de Viète y de Kepler y la ***Aritmética Infinitorum*** de Wallis. En 1665, a los 23 años, estableció el **Teorema General del Binomio** y desarrolló el **Método de la fluxiones** que ahora conocemos como Cálculo Diferencial.

Los siguientes 2 años los pasó en su granja por una epidemia que obligó a cerrar la Universidad. Entonces, trabajó en experimentos de óptica y desarrolló la **Teoría de la Gravitación**. Regresó a Cambridge y continuó sus investigaciones de óptica, iniciando su carrera como profesor de Física y Matemáticas de 1669 a 1687.

En 1675 envió a la Royal Society su **Teoría Corpuscular de la luz**. De 1673 a 1683 enseño álgebra y Teoría de ecuaciones. En 1684, Edmund Halley visitó a Newton para discutir la ley de la fuerza que hace que los planetas se muevan en órbitas elípticas alrededor del sol. El trabajo de Newton en este asunto aparece en el primero de los tres libros de su ***Principia_Mathematica***, editado por cuenta de Halley en 1687 y que tuvo aceptación en toda Europa.

De 1692 a 1694 padeció una enfermedad mental, después de lo cual se dedicó a la química y a la teología, de manera preponderante.

En 1703 fue elegido presidente de la Royal Society y en 1705 fue nombrado Caballero del Rey. Sus principales trabajos fueron publicados mucho después de su realización:

1687 ***Philosophiae Naturalis. Principia Mathematica.***

1704 ***Opticks.***

1707 ***Arithmetica Universalis.***

1711 ***Analysis per Series, fluxiones et Methodus Dfferentialis.***

1729 ***Lectiones Opticae.***

1736 ***The Method of Fluxions and Infinite Series.***

Este libro fue escrito por Newton en 1671 y publicado después de su muerte. En él, Newton considera las curvas generadas por el movimiento continuo de un punto cuya abcisa y ordenada son en general, cantidades variables. A una cantidad variable le llama *"fluente"* (Cantidad que fluye) y a la velocidad de cambio le llama la *"fluxión" del fluente.* Si un fluente, tal como la ordenada de un punto que genera una curva, la representa por $\mathbf{y}$, entonces la fluxión correspondiente la representa por $\dot{\mathbf{y}}$, y la fluxión de $\dot{\mathbf{y}}$ la representa por $\ddot{\mathbf{y}}$. Se consideran 2 tipos de problemas:

1. Dada una relación entre 2 ó más fluentes, encontrar una relación entre estos fluentes y sus fluxiones (Derivación).

2. Dada una relación entre los fluentes y sus fluxiones, encontrar una relación entre los fluentes solamente (Solución de ecuaciones diferenciales).

Introduce el concepto de límite y aplica el método de fluxiones para determinar máximos y mínimos, tangentes, curvaturas, puntos de inflexión y concavidad de curvas. Realiza integraciones, resuelve ecuaciones diferenciales y encuentra un método de aproximación para encontrar raíces reales de una ecuación algebraica ó trascendente por diferenciales, conocido como Método de Newton.

En su libro ***Arithmetica Universalis***, demuestra que las raíces complejas de un polinomio con coeficientes reales, aparecen por pares conjugados y la regla para la multiplicidad de las raíces en términos de los coeficientes del polinomio.

8.7 GOTTFRIED W. LEIBNIZ. (1646 - 1716)

Nació en Leipzig, Alemania. Aprendió a leer latín y griego desde niño y antes de los 20 años dominaba las matemáticas, filosofía, teología y leyes. Debido a su corta edad, la Universidad de Leipzig se negó a otorgarle el grado de doctor, por lo que se trasladó a Nuremberg donde se graduó con una brillante tesis sobre la enseñanza de leyes por el método histórico. Entonces, inició su carrera diplomática en Mainz y Hannover por el resto de su vida. En 1666 desarrolló su ***Characteristica Generalis*** conteniendo matemáticas generales que posteriormente florecieron en la lógica simbólica de George Boole (1815 - 1864), y en 1910 en la obra ***Principia Mathematica*** de Bertrand Russell.

En 1672, estando en París en misión diplomática, dio lecciones de matemáticas al científico Christian Huygens y en 1673; estando en Londres en misión política presentó su máquina calculadora a la Royal Society y sus fórmulas de derivación con una notación que en la actualidad se sigue utilizando.

De 1682 a 1692 editó una revista titulada ***Acta Eruditorum*** en la cual se publicaron la mayor parte de sus trabajos de matemáticas. En 1700 fundó la **Academia de Ciencias de Berlín**.

En los últimos 7 años de su vida, se vio envuelto en la controversia con Newton sobre quien había sido el "inventor" del cálculo. En 1714 fue cesado de su trabajo por el primer rey alemán de Inglaterra y 2 años después, en 1716, murió abandonado, siendo acompañado en su funeral únicamente por su secretario.

Desarrolló su teoría de la lógica matemática y un método simbólico con reglas formales para sistematizar los razonamientos, reduciendo el esfuerzo mental. Estableció las propiedades fundamentales de la suma lógica, multiplicación, negación e inclusión y observó la semejanza entre las propiedades de inclusión de conjuntos y la implicación de proposiciones.

Inventó su cálculo entre 1673 y 1676. En 1675 utilizó el signo actual de integral como una ese alargada $\int$ para denotar la suma infinita de los indivisibles de Cavalieri. Además introdujo los símbolos actuales de diferenciales y derivadas, así como los integrales $\int y\,dx$; $\int x\,dy$

Su primer trabajo de Cálculo apareció publicado en 1684, donde considera a **dx** como un intervalo finito y define **dy** por la proporción: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\text{subtangente}}$

Obtuvo la mayoría de las reglas de derivación que se utilizan actualmente y una regla para obtener la enésima derivada de un producto de 2 funciones que se conoce como **Regla de Leibniz**. Su notación es mejor que la notación fluxional de Newton. Sin embargo, Inglaterra conservó la notación de Newton hasta el siglo XIX.

Inició la teoría de los determinantes en 1693, al considerarlos en relación con los sistemas de ecuaciones lineales, aunque 10 años antes, el matemático japonés Seki Kowa había hecho consideraciones similares.

Realizó la generalización del **Teorema del binomio** al **Teorema multinomial** para el desarrollo de $(a_1 + a_2 + ... + a_n)^n$.

Nota: El primer texto de cálculo que tuvo amplia difusión y aceptación en Europa fue editado y obsequiado por el Marqués de L'Hôpital en 1696 de las notas de clase de su maestro, Johann Bernoulli. En este libro aparece la Regla de **L'Hôpital** para encontrar el límite de una fracción de

funciones elementales, donde el numerador y el denominador tienden a **0** ó ∞, produciendo las formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$. La regla establece que, si éste es el caso, entonces:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esta regla surgió en la Villa de L'Hôpital, donde el marqués invitaba a los matemáticos de su época a vacacionar.

Actualmente, se realizan eventos donde los maestros e investigadores de matemáticas y de otras ciencias, tienen oportunidad, en sus vacaciones, de asistir a congresos, tomar cursos especiales, escuchar conferencias y participar en mesas redondas para mejorar su trabajo. Como ejemplos se pueden citar la Escuela de Verano de la Fundación Ford, el Programa para Mejorar la Enseñanza de las Ciencias de la Organización de Estados Americanos y, en México, los cursos de verano de la UNAM y el IPN, y el Coloquio Nacional de Matemáticas que se realizó en el Centro Vacacional del IMMS de Oaxtepec, Morelos, en 1968.

EJERCICIO 10. **GEOMETRÍA ANALÍTICA Y CÁLCULO.**

1. Por el método de Criba de la Eratóstenes, encontrar todos los números primos menores que **500** y calcular la densidad correspondiente.

2. Por el método de Arquímedes, encontrar el área entre la parábola $y = x^2$ y la **recta** $y = 4$. Graficar y verificar el resultado por cálculo integral.

3. Los recíprocos negativos $\underline{\mu}$ y $\underline{\nu}$ de las intersecciones con los ejes **a** y **b** de una línea recta, son las coordenadas de línea de Plucker. Encontrar las coordenadas de línea de la recta $5x + 3x - 6 = 0$

4. Encontrar la ecuación en coordenadas cartesianas de la recta cuyas coordenadas de Plucker son **L (1, 3).** Graficar.

5. Encontrar la pendiente de la tangente al círculo $x^2 + y^2 = 25$ en el punto **P (3, 4)** por el método de Fermat para la sub-tangente. Graficar y verificar por cálculo diferencial.

6. Establecer el desarrollo en serie de Mac Laurin de **Sen x** y, usando este resultado, demostrar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{Sen} x}{x} = 1$$

7. Explique la siguiente paradoja del cálculo integral $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2$ Pero $f(x) = \frac{1}{x^2}$ es positiva para todo $x \neq 0$ real. Entonces la integral anterior no puede ser **-2**.
   Sugerencia: Graficar $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

8. Integrando de 2 maneras se obtiene $\int \operatorname{Sen}x \operatorname{Cos}x\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{Sen}^2 x = -\frac{1}{2}\operatorname{Cos}^2 x$
   Entonces $\operatorname{Sen}^2 x + \operatorname{Cos}^2 x = 0$. Explique este absurdo. Sabemos que para todo **x**, $\operatorname{Sen}^2 x + \operatorname{Cos}^2 X = 1$.

9. Un número real algebraico si es raíz de un polinomio con coeficientes enteros. Muestre que todo número racional es algebraico y por lo tanto los números trascendentes ó no algebraico son irracionales. ¿Podemos afirmar que todo número irracional es trascendente ? ¿Por qué?

10. Demostrar el siguiente teorema de Fermat: **"Todo número primo mayor que 2, puede expresarse en forma única como una diferencia de cuadrados en N"**.
    Sugerencia: Verificar que para todo **P** primo impar, $P = \left(\frac{P+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{P-1}{2}\right)^2$

11. Inducir la regla de Leibniz para la derivada de un producto de funciones $y = f(x).g(x)$. Encontrar la quinta derivada de $y = (x^2-3)e^{2x}$, aplicando la regla anterior.

12. Establecer la regla de Leibniz para el cuadrado de un polinomio $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$. Encontrar $(x^2 - 3x + 5)^2$ aplicando la regla anterior.

CAPÍTULO 9

LA INFLUENCIA DEL CÁLCULO

9.1 INTRODUCCIÓN.

A fines del siglo XVII, el cálculo ha sido realizado formalmente por Newton y Leibniz, apoyados en la geometría analítica de Descartes y el álgebra simbólica del siglo XVI. Estos 3 grandes pilares: el álgebra simbólica, la geometría analítica y el cálculo, ofrecen poderosas herramientas para resolver problemas e impulsar el desarrollo de nuevas ramas de las matemáticas. Estas actividades se orientan durante el siglo XVIII hacia las ecuaciones diferenciales, la probabilidad y estadística matemática, la mecánica analítica y la astronomía. A fines del siglo XVIII y principios del XIX se revisan los conceptos fundamentales del cálculo para evitar la presencia de contradicciones y resolver las paradojas que resultan precisamente por la falta de rigor básico. Los maestros e investigadores se vuelven exigentes y rigurosos con las matemáticas, propiciando la liberación del álgebra y la geometría de sus moldes tradicionales. Así surgen las geometrías no-euclidianas y el álgebra abstracta, el análisis matemático, las álgebras lineales y la Lógica Matemática, todo esto en el siglo XIX.

En este capítulo trataremos la época de fines del siglo XVII a principios del siglo XIX, presentando en forma cronológica y sintetizada a los principales personajes y sus actividades matemáticas, académicas y de investigación.

9.2 LA FAMILIA BERNOULLI.

En la segunda mitad del siglo XVII, un rico comerciante y consejal suizo de nombre Nicolaus Bernoulli, procrea 2 hijos, Jakob y Johann, quienes se dedican a las matemáticas influenciados por las publicaciones de Leibniz y contribuyen al desarrollo del cálculo en sus aplicaciones y su divulgación en Europa. Posteriormente, 4 nietos y 2 biznietos de Nicolaus, 5 de ellos descendientes de Johann, se distinguen también como maestros investigadores de matemáticas, aunque sin llegar a superar la obra de sus ancestros, los hermanos Jakob y Johann Bernoulli.

EJERCICIO 10. **GEOMETRÍA ANALÍTICA Y CÁLCULO.**

1. Por el método de Criba de la Eratóstenes, encontrar todos los números primos menores que **500** y calcular la densidad correspondiente.

2. Por el método de Arquímedes, encontrar el área entre la parábola $y = x^2$ y la **recta** $y = 4$. Graficar y verificar el resultado por cálculo integral.

3. Los recíprocos negativos μ y ν de las intersecciones con los ejes **a** y **b** de una línea recta, son las coordenadas de línea de Plucker. Encontrar las coordenadas de línea de la recta $5x + 3x - 6 = 0$

4. Encontrar la ecuación en coordenadas cartesianas de la recta cuyas coordenadas de Plucker son **L (1, 3).** Graficar.

5. Encontrar la pendiente de la tangente al círculo $x^2 + y^2 = 25$ en el punto **P (3, 4)** por el método de Fermat para la sub-tangente. Graficar y verificar por cálculo diferencial.

6. Establecer el desarrollo en serie de Mac Laurin de **Sen x** y, usando este resultado, demostrar que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Sen}x}{x}=1$$

7. Explique la siguiente paradoja del cálculo integral $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-1-1=-2$ Pero $f(x)=\frac{1}{x^2}$ es positiva para todo $x \neq 0$ real. Entonces la integral anterior no puede ser **-2**.
Sugerencia: Graficar $f(x)=\frac{1}{x^2}$.

8. Integrando de 2 maneras se obtiene $\int \mathrm{Sen}x\mathrm{Cos}x\,dx=\frac{1}{2}\mathrm{Sen}^2x=-\frac{1}{2}\mathrm{Cos}^2x$
Entonces $\mathrm{Sen}^2x + \mathrm{Cos}^2x = 0$. Explique este absurdo. Sabemos que para todo **x**, $\mathrm{Sen}^2x + \mathrm{Cos}^2X = 1$.

9. Un número real algebraico si es raíz de un polinomio con coeficientes enteros. Muestre que todo número racional es algebraico y por lo tanto los números trascendentes ó no algebraico son irracionales. ¿Podemos afirmar que todo número irracional es trascendente ? ¿Por qué?

10. Demostrar el siguiente teorema de Fermat: **"Todo número primo mayor que 2, puede expresarse en forma única como una diferencia de cuadrados en N"**.
Sugerencia: Verificar que para todo **P** primo impar, $P=\left(\frac{P+1}{2}\right)^2-\left(\frac{P-1}{2}\right)^2$

11. Inducir la regla de Leibniz para la derivada de un producto de funciones $y = f(x).g(x)$. Encontrar la quinta derivada de $y = (x^2-3)e^{2x}$, aplicando la regla anterior.

12. Establecer la regla de Leibniz para el cuadrado de un polinomio $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2$. Encontrar $(x^2 - 3x + 5)^2$ aplicando la regla anterior.

CAPÍTULO 9

LA INFLUENCIA DEL CÁLCULO

9.1 INTRODUCCIÓN.

A fines del siglo XVII, el cálculo ha sido realizado formalmente por Newton y Leibniz, apoyados en la geometría analítica de Descartes y el álgebra simbólica del siglo XVI. Estos 3 grandes pilares: el álgebra simbólica, la geometría analítica y el cálculo, ofrecen poderosas herramientas para resolver problemas e impulsar el desarrollo de nuevas ramas de las matemáticas. Estas actividades se orientan durante el siglo XVIII hacia las ecuaciones diferenciales, la probabilidad y estadística matemática, la mecánica analítica y la astronomía. A fines del siglo XVIII y principios del XIX se revisan los conceptos fundamentales del cálculo para evitar la presencia de contradicciones y resolver las paradojas que resultan precisamente por la falta de rigor básico. Los maestros e investigadores se vuelven exigentes y rigurosos con las matemáticas, propiciando la liberación del álgebra y la geometría de sus moldes tradicionales. Así surgen las geometrías no-euclidianas y el álgebra abstracta, el análisis matemático, las álgebras lineales y la Lógica Matemática, todo esto en el siglo XIX.

En este capítulo trataremos la época de fines del siglo XVII a principios del siglo XIX, presentando en forma cronológica y sintetizada a los principales personajes y sus actividades matemáticas, académicas y de investigación.

9.2 LA FAMILIA BERNOULLI.

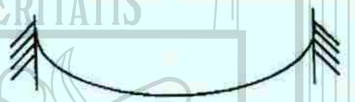
En la segunda mitad del siglo XVII, un rico comerciante y consejal suizo de nombre Nicolaus Bernoulli, procrea 2 hijos, Jakob y Johann, quienes se dedican a las matemáticas influenciados por las publicaciones de Leibniz y contribuyen al desarrollo del cálculo en sus aplicaciones y su divulgación en Europa. Posteriormente, 4 nietos y 2 biznietos de Nicolaus, 5 de ellos descendientes de Johann, se distinguen también como maestros investigadores de matemáticas, aunque sin llegar a superar la obra de sus ancestros, los hermanos Jakob y Johann Bernoulli.

JACKOB BERNOULLI. (1654 - 1705).

Profesor titular de Matemáticas de la Universidad Basel, en Basilea, Suiza, desde 1687 hasta su muerte en 1705. Sus principales contribuciones a las matemáticas fueron las siguientes:

1. Coordenadas polares para el cálculo del radio de curvatura de curvas planas.

2. Estudio de curvas catenarias de cuerdas homogéneas y de densidad variable y bajo la acción de una fuerza central.



3. Estudio de varillas elásticas y hojas rectangulares flexibles sujetas a diversas condiciones de carga.

4. Figuras cerradas isoperimétricas en el plano, determinando la que proporciona máxima área. (Cálculo de variaciones).

5. Probabilidades y Estadística. Lo que ahora conocemos como el *Teorema de Bernoulli* y la *distribución de Bernoulli* aparecen en su libro ***Ars Conjentandi*** publicado post-mortem en 1713.

6. Ecuaciones Diferenciales. La *Ecuación de Bernoulli*.

7. Teoría de números. Los números y polinomios de Bernoulli que intervienen en la definición de los números primos regulares. En 1850, Kummer demostró el último teorema de Fermat para exponentes primos regulares.

8. Curva isocrona, a lo largo de la curva de un cuerpo en caída libre, tiene componente vertical de velocidad constante. Este trabajo fue publicado en 1690 en el ***Acta Eruditorum*** de Leibniz, donde aparece por primera vez la palabra integral en el cálculo.

JOHANN BERNOULLI. (1667 - 1748)

Maestro de matemáticas en la Universidad de Gröningen de 1697 a 1705. En 1705, a la muerte de su hermano Jakob, es nombrado Profesor titular de matemáticas de la Universidad Basel,

cargo que ocupa hasta su muerte en 1748. Johann fue amigo y defensor de Leibinz y al mismo tiempo antagonista de su hermano Jakob en sus investigaciones.

Su principal contribución como maestro de matemáticas, fue la edición financiada por el Marqués G.F. de L' Hôpital (1661 - 1704) de sus apuntes del curso de cálculo que enseñaba en 1696 y que fue distribuida gratuitamente por Europa, influyendo notablemente en la adopción del cálculo como materia fundamental de las matemáticas.

En investigación, escribió sobre diversidad de temas entre los cuales se mencionan los siguientes:

Fenómenos ópticos de reflexión y refracción.

Trayectorias ortogonales de familias de curvas.

Cálculo de áreas por series.

Cálculo exponencial.

Trigonometría analítica.

Curvas baquistocrona y tautocrona, correspondientes a trayectorias de velocidad máxima y tiempo uniforme de caída de partículas pesadas. La solución de estos problemas conduce a curvas cicloides y fueron aplicadas por Huygens en 1673 para la construcción de relojes de péndulo.

9.3 <u>CÁLCULO DE PROBABILIDADES.</u>

ABRAHAM DE MOIVRE. (1667 - 1754)

Nació en Francia, pero vivió casi toda su vida en Inglaterra donde cultivó amistad con Newton.

Sus principales publicaciones fueron las siguientes:

1. Anualidades sobre la vida. Importante trabajo que influye en el desarrollo de las matemáticas actuariales.

2. Cálculo de Oportunidades. Esta publicación contiene gran cantidad de material nuevo sobre el cálculo de probabilidades.

3. Miscelánea Analítica. Contribución para el estudio de probabilidades, series y trigonometría analítica.

De Moivre estableció la fórmula de aproximación para factoriales grandes que se atribuye erróneamente a Stirling:

$$n! \approx (2\pi n)^{1/2}(n/e)^n$$

Para calcular potencias de números complejos en forma polar, demostró para exponentes **n** en los naturales el llamado **Teorema de Moivre**

$$(\mathrm{Cos}\ x + i\ \mathrm{Sen}\ x)^n = \mathrm{Cos}\ nx + i\mathrm{Sen}\ nx$$

Además estableció las distribuciones normales de probabilidad como $y = ce^{-hx^2}$, con **c** y **h** constantes.

Para **c = h = 1** encontró la siguiente integral impropia:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

9.4 REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES POR SERIES.

Las funciones son los objetos de estudio del Cálculo. Se clasifican en algebraicas y trascendentes y se ordenan para su análisis, de acuerdo con su complicación. Las funciones polinómicas son las primeras que se tratan en el cálculo diferencial por ser las funciones "buenas" entre las algebraicas. Su dominio es todos los números reales, no tienen puntos de discontinuidad, se derivan fácilmente y se simplifican al derivarlas. Entonces, cuando una función es complicada, su representación por medio de una serie polinómica infinita, aún para un intervalo finito de convergencia, puede ser de gran utilidad para su evaluación y para su análisis. Los primeros matemáticos que lograron este objetivo fueron los siguientes:

1. **BROOK TAYLOR.** (1685 - 1731)

Nació en Inglaterra. En 1715 publicó su teorema de desarrollo de una función en serie polinómica

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots$$

Desde luego, **f(x)** y todas sus derivadas sucesivas deben existir en **x = a,** para obtener a **f(x)** como una serie polinómica de **(x - a)** con un intervalo de convergencia alrededor de **x = a**. Para diferentes valores de a en el dominio de **f(x),** se obtiene la representación de **f(x)** alrededor del punto que se requiera.

Originalmente, Taylor aplicó su desarrollo en serie para la solución numérica de ecuaciones con una incógnita por aproximaciones sucesivas. Trabajó también en la *Teoría de la perspectiva*, método de dibujo matemático en el plano de figuras tridimensionales, que se utiliza actualmente en la visualización en un plano de figuras en el espacio a partir de sus proyecciones horizontales y verticales y en el estudio matemático de la fotogrametría, en el cual se toman fotografías desde un avión con propósitos topográficos para la determinación de las características de un terreno o con propósitos catastrales para la determinación de los impuestos prediales.

2. **COLIN MACLAURIN.** (1698 - 1746)

Nació en Escocia y desde temprana edad dio muestras de matemático prodigio. Ingresó a la Universidad de Glasgow a los 11 años y a los 15 obtuvo su maestría con una tesis sobre la gravedad. A los 19 años se inició como maestro de matemáticas y a los 21 años de edad publicó su ***Geometría Orgánica***. Propuso el desarrollo en serie polinómica de una función definida y derivable sucesivamente en **x = 0**, como un caso particular del *teorema general de Taylor* para **a = 0**

$$f(x) = f(0) = f'(0) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

De esta manera obtiene la representación de la función en serie polinómica y en un intervalo de convergencia alrededor del origen **x = 0**.

En 1742, publicó su Tratado de las Fluxiones, en 2 volúmenes, en el cual incluye la representación polinómica de funciones y gran variedad de aplicaciones a la geometría y a la física.

3. JOSEPH FOURIER. (1768 - 1830)

Nació en Francia. Hijo de un sastre que murió cuando Fourier tenía 8 años de edad, fue internado en una escuela militar dirigida por religiosos, donde posteriormente dio clases de matemáticas. Se distinguió en la Revolución Francesa y fue recompensado con un puesto titular de profesor de matemáticas en la Ècole Politechnique. De 1798 a 1801 fue gobernador del bajo Egipto y a su regreso a Francia fue nombrado prefecto de Grenoble, donde inició sus experimentos sobre el calor que lo conducen a la publicación en 1822 de su **Teoría Analítica del Calor**, dedicado al estudio matemático de la conducción del calor.

En esta obra, Fourier establece que cualquier función, continua o no, puede ser representada como una serie de senos y cosenos de múltiplos de la variable. Las series trigonométricas de Fourier influyen de manera importante en la evolución del concepto de función y en el desarrollo de los métodos matemáticos de la física, donde se utilizan ecuaciones diferenciales parciales sujetas a condiciones de frontera.

Evocando la expresión pitagórica "Vivimos en un Universo matemático" y de los filósofos griegos "La naturaleza es matemática", Fourier expresó "*El estudio profundo de la naturaleza es la fuente más prolífica de descubrimientos matemáticos*".

La **teoría Analítica del Calor** de Fourier influyó en la carrera de Wiliam Thomson, Lord Kelvin (1824 – 1907), y Clerk Maxwel se refirió a ella diciendo que es "Un gran poema matemático".

Después de los autores de la representación de funciones en series, encontramos un matemático francés muy distinguido, contemporáneo de Fourier

4. SIMEÓN POISSON. (1781 - 1840)

Estudió matemáticas en la Ècole Politechnique como alumno de Laplace y Lagrange y después fue profesor ahí mismo. Es autor de más de 300 trabajos publicados sobre integrales definidas (*La integral de Poisson*), series, probabilidades (*la ley y la distribución de Poisson*), ecuaciones diferenciales y elasticidad (*la constante de Poisson*).

En 1811 publicó su ***Tratado de Mecánica***, en 2 volúmenes; en 1833 su ***Teoría de la Acción de la Capilaridad***, y en 1835 su ***Teoría Matemática del Calor***. Publicó además sus teorías matemáticas sobre Electricidad y Magnetismo, Elasticidad y Astrofísica.

9.5 LEONHARD EULER (1707 - 1783).

Notable matemático Suizo influenciado por la escuela de Juan Bernoulli. Hijo mayor del Pastor Pablo Euler, alumno de Jacobo Bernoulli. Recibió las primeras enseñanzas de su padre. En 1720 ingresó a la Universidad Basel donde es alumno de Daniel y Nicholaus Bernoulli. Se gradúa de Bachiller en 1721 y obtiene su maestría en 1723.

En 1727 se publica su primer trabajo sobre trayectorias algebraicas recíprocas. Solicita la cátedra vacante de Física, pero no la consigue por su corta edad. Se traslada a la Academia de Petesburgo invitado por Daniel Bernoulli, obteniendo la cátedra de Física en 1730 y en 1733 sustituye a Daniel Bernoulli, quien regresa a Basel, en la cátedra de Matemáticas. En 1741 es nombrado Director de Matemáticas de la Academia de Berlín. En 1756 ocupa el puesto de Presidente de la Academia y en 1766 regresa a San Petesburgo.

Habiendo perdido la vista de su ojo derecho desde 1735, queda completamente ciego por cataratas en 1768, pero su hijo Juan y su nieto político N. Fuss le ayudan en la redacción de 250 trabajos de investigación hasta su muerte en 1783.

Los trabajos científicos de Euler se inician en San Petesburgo, influenciados por los métodos del Cálculo de los Bernoulli. En 1736 publica su ***Mecánica***, obra ejemplar donde el cálculo se aplica a los estados de movimiento de los cuerpos, (estática, cinemática, cinética y dinámica). En 1738 escribe su libro de ***Cálculo*** para la preparatoria incorporada a la Academia de San Petesburgo.

En sus investigaciones sobre series, analiza convergencia y divergencia por el método de comparación. Realiza integrales definidas por series utilizando la función $\beta : \int_0^1 x^p (1-x)^n dx$ y la función $\Gamma : \int_0^1 x^p e^{-x} dx$. Además, encontró paradojas que influyeron en la formalización del Cálculo en el siglo XIX. Por ejemplo, aplicando el *Teorema del Binomio* se obtiene:

$-1 = (1-2)^{-1} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots = \infty$, produciéndose la paradoja: $-1 = \infty$.

La explicación es que el desarrollo binomial de **(a - b) - n** con **a < b** y **n > 0** es divergente y por lo tanto el **Teorema del Binomio** no es aplicable a estos casos.

Euler introdujo la notación **f(x)** para funciones, **e** para la base logarítmica natural, **a**, **b**, y **c** para los lados del triángulo **ABC** y **s** para el semi-perímetro, Σ para sumatorias e **i** para la unidad imaginaria.

Para desarrollos en serie, estableció la llamada Fórmula de Euler : $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{Sen} x$, de donde, sustituyendo $x = \pi$ se obtiene la ecuación que relaciona a los importantes números **1, e, i** y π:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Las investigaciones de Euler sobre Teoría de números se dedican fundamentalmente a la obra de Fermat. Así descubre que no todos los números de Fermat $2^{2^p}+1$ son primos porque para **p = 5**, esta fórmula no da un número primo. Demuestra que $a^4 + b^4 = c^2$ no tiene solución en los naturales. Además, demuestra el **"pequeño teorema de Fermat"** $a^{p-1} \equiv 1 (\text{mod } p)$, y el **"último teorema de Fermat"** $a^n + b^n = c^n$ no tiene solución en los números naturales para **n > 2**; Euler lo demuestra para **n = 3**.

Encuentra un método para resolver las ecuaciones cuárticas por radicales y propone métodos por radicales para ciertos tipos de ecuaciones de grado mayor que **4**. Produce además una gran cantidad de trabajos de investigación sobre funciones continuas, ecuaciones diferenciales, geometría diferencial y cálculo de variaciones.

Define las funciones homogéneas de **n** variables, muy importantes actualmente en economía para las funciones de producción.

Definición: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es homogénea de grado **m** si $f(cx_1, cx_2, \ldots, cx_n) = c^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Para **m = 1**, la homogeneidad es lineal y resulta adecuada para representar a la producción total **z** como función de las cantidades de los factores productivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, considerando que la homogeneidad lineal significa rendimientos constantes a escala, lo cual es una ley económica a altos niveles de producción.

Una de las propiedades de estas funciones es el llamado **Teorema de Euler**

$$x_1 f x_1 + x_2 f x_2 + \ldots + x_n f x_n = mz$$

En términos económicos, para **m = 1** significa que: *"La suma de las cantidades de los factores productivos por sus respectivas productividades marginales es igual a la producción total"*.

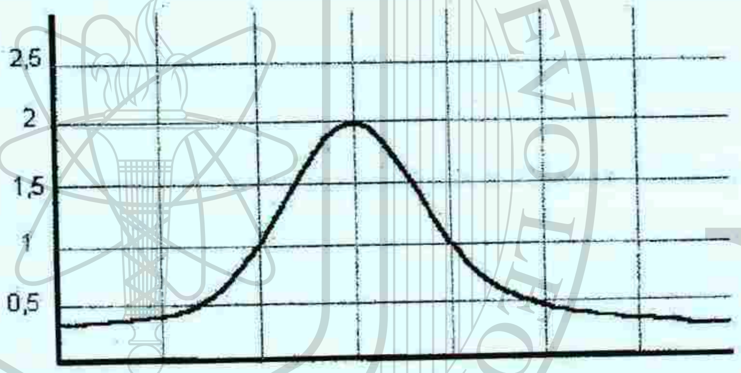
Euler publicó sus investigaciones y sus libros con gran claridad y detalle. En matemáticas aplicadas realizó trabajos sobre hidráulica, mecánica celeste, música, construcciones de barcos y otros.

9.6 MARÍA GAETANA AGNESI (1718 – 1799)

Apenas la segunda mujer importante en la historia de las matemáticas.

Nació en Milán, Italia, y desde temprana edad mostró una gran inteligencia y capacidad para los idiomas, tales como francés, latín, griego y hebreo. En su adolescencia debatía con matemáticos sobre temas como propagación de la luz, cuerpos transparentes y curvas geométricas. Escribió sobre tangentes a curvas. Fue la primera mujer en ocupar una cátedra de matemáticas en Milán.

En 1748 se publicó su libro ***Instituzione Analitiche*** de **Cálculo Diferencial**, que se tradujo a varios idiomas y se usó en Europa como texto. Estudió y analizó en particular las *"Curvas de Agnes"*, cuya ecuación es $\mathbf{y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}}$. Para **a = 2**, la curva es $\mathbf{y = \frac{8}{x^2 + 4}}$



El nombre latino de la curva es *Versoria* que significa cabo de vela

9.7 APLICACIONES FÍSICAS Y ASTRONÓMICAS.

1. Claude Alexis Clairaut (1713 - 1765)

Nació en París. Su padre fue profesor de matemáticas. Se distinguió desde temprana edad en matemáticas. A los 11 años de edad estudia las secciones cónicas de L' Hôpital y el Cálculo de Bernoulli.

1726 A sus 13 años escribe un tratado sobre curvas polinómicas de 4º grado y otro sobre curvas y superficies en el espacio.

1731 A los 18 años de edad escribe su ***Geometría Diferencial de Curvas no Planares en el Espacio***. La Academia Francesa lo acepta excepcionalmente, ya que sus estatutos requerían edad mayor a los 18 años.

1736 Participó en una expedición a Lapland para medir la longitud de un grado del meridiano para dilucidar una controversia sobre la forma de la tierra, confirmando la teoría de Newton de que la tierra es achatada en los polos, contra la afirmación del astrónomo italiano Giovani Cassini de que la tierra es alargada en los polos.

1739 Demostró que la 2ª derivada parcial cruzada de **z = f(x, y)** es independiente del orden de derivación $\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 z}{\delta y \delta x}$

1740 Escribe un ensayo sobre las funciones homogéneas.

1743 Como resultado de sus investigaciones después de sus expedición a Lapland, escribe ***Thèorie de la Figure de la Terre***.

1752 ***Thèorie de la Lune***. Estudio matemático de los movimientos lunares.

1759 Calculó con un mes de error el regreso del cometa Halley.

Trabajó en ecuaciones diferenciales y resolvió la llamada Ecuación de Clairaut

$$y = xy' + f(y').$$

2. Jean Le Round D'Alembert. (1717 - 1783)

Recién nacido fue abandonado en la iglesia de Saint Jean le Round de París, por lo que fue bautizado con ese nombre.

1741. Es admitido como miembro de la Academia Francesa. En cinética, parte de la mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos, tomando en cuenta las causas que lo producen y la naturaleza misma de los cuerpos, establece el llamado **Principio de D'Alembert**, el cual aplica para escribir y publicar los siguientes libros:

1743. **Traité de Dynamique**.

1744 **Equilibrio y Movimiento de Fluidos**.

1746 **Causas de los Vientos**.

1747 **Cuerdas Vibrantes**.

En estos trabajos plantea y resuelve ecuaciones diferenciales parciales.

1754 Ocupa el puesto de Secretario de la Academia Francesa hasta su muerte en 1783. En este mismo año de 1754 sugiere que una teoría de límites es el fundamento necesario para la formalización del Análisis, pero no consiguió interesar a sus contemporáneos.

1765 El Rey de Alemania le ofrece la presidencia de la Academia de Berlín, pero no la acepta por consideración a Euler.

3. Johann Heinrich Lambert. (1728 - 1777)

Hijo de un sastre suizo, no puede ir a la Universidad por falta de recursos. Trabaja como ayudante de su padre. En forma autodidacta aprende matemáticas directamente de los libros y trabaja como profesor particular.

1752 Su inquietud intelectual lo conduce a la invención del **Perspectógrafo**, aparato para trazar perspectivas.

1759 Escribe y publica su **Tratado de Perspectiva**, el cual resulta mejor, en el aspecto práctico, que el de Taylor que estaba en uso y se acababa de re-editar.

1761 Escribe un tratado del Universo con su propia teoría, titulado **Cosmología**.

1766 **Teoría de las Paralelas**.

1768 Demuestra que π es irracional porque $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ es racional y previamente establece que las tangentes de ángulos racionales son irracionales. Este teorema y el hecho de que $\frac{\pi}{4}$ tiene tangente racional, implican que $\frac{\pi}{4}$ es irracional y por tanto π es irracional.

1769 Publica su ***Teoría de las Funciones Hiperbólicas***, considerándolas tan importantes como las trigonométricas. Construye una tabla de funciones hiperbólicas.

Además, contribuye con sus trabajos a otras ramas de las matemáticas aplicadas como la Geometría Descriptiva, la Teoría de Proyecciones para elaboración de mapas y el estudio de las Orbitas de Cometas.

9.8 JOSEPH LOUIS LAGRANGE. (1736 - 1813)

Lagrange y Euler están considerados como los más grandes matemáticos investigadores del siglo XVIII. Nació en Turín, Italia; hijo de un empleado de origen francés quien, arruinado por especulaciones comerciales, desea que su hijo sea abogado. Sin embargo, Lagrange se aficiona a la geometría en la Escuela Superior de Revelli y al Cálculo, al leer las obras de Newton, Leibniz, Juan y Jacobo Bernoulli y Euler.

1755 A los 19 años de edad, se inicia como profesor de matemáticas en la Academia de Artillería de Turín.

1757 Miembro fundador de la Academia de Turín.

1759 En la **Miscelánea Matemática** de la Academia de Turín publica sus primeros escritos:

- I Cálculo Diferencial de una y varias variables con aplicaciones.
- II Teoría de Variaciones y Series.
- III Ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales con aplicaciones.
- IV Ampliación al Cálculo de Variaciones.
- V Casos de errores de observación.

1761 Sufre un padecimiento nervioso que lo obliga a ordenar su ritmo de trabajo.

1766 Matemático de la Corte de Federico el Grande, sucesor de Euler como Presidente de la Academia de Berlín durante 20 años.

1767 Publica su Tratado de la Solución de Ecuaciones De todos los Grados.

1786 Se jubila en la Academia de Berlín, se naturaliza francés y empieza como profesor de la Ècole Politechnique, contribuyendo a elevar su nivel académico y ubicándola como la mejor institución académica de Europa en ésa época.

1788 Realiza numerosas investigaciones sobre ecuaciones diferenciales y series y publica su ***Mecánica Analítica***, incluyendo la ecuación general de un sistema dinámico, que se conoce como la **Ecuación de Lagrange**.

1795 Profesor de la Ècole Normale, contribuyendo también a su prestigio académico.

1797 Publica una de sus grandes obras: ***Theorie des Founctions Analytiques Contenant les Principes de Calcul Differentiel***. Este libro puede considerarse como un primer intento de una Teoría de funciones de una variable real. Introduce la idea de cardinalidad a través de representaciones polinómicas infinitas de funciones desarrolladas en series de Taylor, aunque descuida detalles de convergencia para la representación en series.

1801 ***Soluciones Singulares de Ecuaciones Diferenciales***.

1812 Se publican sus **Apuntes de Matemáticas Generales**. (Conferencias en la Ècole Normale).

Escribió también en Teoría de números varios ensayos como la demostración del **Teorema de los 4 cuadrados**: *"Todo número natural puede expresarse como la suma de cuatro o menos cuadrados"*. Fue pionero del Álgebra Abstracta, contribuyendo por ejemplo, con su **Terorema de Lagrange**: *"El orden de un subgrupo de un grupo finito G es divisor del orden de G."*

En las aplicaciones del Cálculo Diferencial, Lagrange propone su **Criterio de Lagrange** para intentar la solución de los problemas de optimización, que en su forma general canónica tiene la forma siguiente:

Máximo o Mínimo de $\mathbf{Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$

Sujeta a :

$$\begin{cases} g1(x1, x2, \ldots, xn) = 0 \\ g2(x1, x2, \ldots, xn) = 0 \\ \approx \quad \approx \quad \approx \\ gn(x1, x2, \ldots, xn) = 0 \end{cases}$$

Para el efecto, define $\mu = Z - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i$ para ligar las condiciones laterales a la función objetivo. Los posibles máximos o mínimos relativos de **z** deberán satisfacer la condición necesaria del primer diferencial de $\mu = 0$. Esto conduce al llamado "**Sistema de Ecuaciones de Lagrange**", que incluye las condiciones laterales y contiene **(m + n)** ecuaciones con **(m + n)** incógnitas. *Si el sistema es consistente*, es decir, si tiene un número finito de soluciones, entonces la solución óptima será la que proporcione el máximo (o mínimo) valor de **z**, según el caso.

Este críterio sirvió de punto de partida para el Equipo de Investigación de Operaciones que se encargó de la optimización de recursos militares a fines de la Segunda Guerra Mundial, en Inglaterra (1943). Desde luego, el criterio es inaplicable cuando el sistema de ecuaciones de Lagrange es imposible de resolver o cuando es indeterminado, es decir, cuando tiene un conjunto infinito de soluciones, como en el caso de la Programación Lineal, que se resolvió con Álgebra Lineal, por el Método Simplex del Dr. G. Dantzig en 1947.

9.9 GEOMETRÍAS DESCRIPTIVA Y PROYECTIVA.

GASPARD MONGE. (1746 - 1818)

Nació en Beaune, Francia; hijo mayor de un comerciante. Se educó en colegios religiosos de Beaune y Lyons.

1762 A sus 16 años de edad se inicia como profesor de Física en Lyons, pero no acepta ser religioso.

1764 Ingresa a la Escuela Militar de Mézières como diseñador y constructor de obras militares. Sus novedosos proyectos de fortificaciones fueron elogiados por los militares y declarados secreto militar.

1768 Profesor de matemáticas en Mézières, donde enseña Geometría Descriptiva.

1771 Profesor de Física en Mézières.

1772 Miembro de la Academia Francesa.

1780 Profesor de hidráulica en el Liceo de París.

1795 Profesor fundador en la Ècole Polytechnique.

1798 Acompañó a Napoleón y Fourier a Egipto.

1816 Es expulsado de la Academia a la caída de Napoleón.

Monge realizó un gran número de investigaciones publicadas sobre cálculo de variaciones, fundamentos de geometría diferencial, ecuaciones funcionales, ecuaciones diferenciales parciales, geometría descriptiva, geometría proyectiva y temas de Física y Química. Está considerado como el creador de la geometría proyectiva y uno de los pioneros de la geometría diferencial. Fue un maestro muy seguido por sus alumnos, entre los cuales se distinguen Charles Dupin, (1784 - 1873), en geometría diferencial y Victor Poncelet, (1788 - 1867), en geometría proyectiva.

9.10 LA MECÁNICA CELESTE.

PIERRE SIMÓN LAPLACE. (1749 - 1827).

Hijo de noble familia, nació en Normandía.

1765 A sus 16 años, estudia en Caen.

1772 Profesor de matemáticas en la Escuela Militar de París, donde Napoleón es su alumno.

1774 – 75 Escribe sobre investigaciones de problemas de probabilidad. A partir de este año trabaja intensamente en el cálculo de probabilidades culminando con una obra cumbre sobre este tema en 1812.

1779 Contribuye en ecuaciones diferenciales (**Transformada de Laplace**) y en ecuaciones diferenciales parciales (**Método de Cascadas**).

1794 – 95 Escribe sus cursos de Introducción a las matemáticas en la Ècole Normale que se publican en 1812.

1799-1825 Como resultado de sus trabajos astronómicos durante estos años, publica su obra principal ***Traité de Mécanique Céleste***, en 5 volúmenes.

1812 Publica su ***Théorie Analytique des Probabilités,*** obra monumental, resultado de sus trabajo de más de 30 años en este campo de las matemáticas.

EJERCICIO 11. **MACLAURIN, TAYLOR, DE MOIVRE, EULER, LAMBERT Y LAGRANGE.**

1. Representar en serie de Maclaurin **$f(x) = \operatorname{sen} x$** y **$g(x) = e^x$**. Determinar sus intervalos de convergencia.

2. Derivando la serie polinómica de **sen x**, encontrar la representación en serie de **cos x** y determinar su intervalo de convergencia.

3. Aplicar los resultados de los problemas anteriores, para demostrar la ecuación de Euler **$\cos x + i\operatorname{sen} x = e^{ix}$**.

4. Utilizar la Ecuación de Euler del problema anterior para establecer una ecuación que relacione los números **1, π, e, i.**

5. Demostrar por inducción matemática la fórmula de De Moivre **$(\cos x + i\operatorname{sen} x)^n = \cos nx + i\operatorname{sen} nx;\ n \in N$.**

6. Con el resultado anterior, encontrar **sen 3x** y **cos 3x** como funciones de **sen x** y **cos x**.

7. Aplicando la fórmula de De Moivre, encontrar las **5** raíces quintas de la unidad **1**.

8. Graficar la curva de distribución normal **$y = 100e^{-x^2}$**. Determinar su dominio **D** y su co-dominio **C**, su sentido de crecimiento en **D** y sus puntos críticos de tangente horizontal.

9. Encontrar el valor aproximado del factorial de **90**, aplicando la fórmula de De Moivre atribuida a Stirling

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

10. Demostrar la siguiente identidad de funciones hiperbólicas **$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$.**

Definición:

$$\operatorname{senh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

11. Verificar que la siguiente función de producción de tipo Cobb - Douglas es lineal homogénea y que satisface el Teorema de Euler. Interpretar en términos económicos **$z = 1500\, x^{1/3} y^{2/3}$**

12. Aplicando el criterio de optimización de Lagrange, determinar la caja rectangular sin tapa, de máximo volumen, que puede obtenerse de manera que su área total, base y caras laterales, sea igual a **1,728 cms²**.

CAPÍTULO 10.

LIBERACIÓN Y FORMALIZACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS.

10.1 INTRODUCCIÓN

A partir de Lagrange, se observa la intención de formalizar e independizar las matemáticas del mundo físico real, para lograr su desarrollo autónomo riguroso y debidamente fundamentado. Esto se consigue en el siglo XIX con la liberación de los pilares de las matemáticas:

a). **La geometría**, en el primer tercio del siglo, a través de las geometrías no-euclidianas hiperbólica y elíptica.

b). **El álgebra,** a mediados de siglo, a través de las estructuras no-conmutativas de los Cuaternios, los hipercomplejos y las álgebras lineales.

Además, se formaliza el análisis matemático, el álgebra abstracta y sus estructuras algebraicas y a fines del siglo y principios del siglo XX, se desarrolla la lógica matemática, los fundamentos de las matemáticas, su meta-lenguaje y la aritmética transfinita a través de la teoría de conjuntos. En el segundo cuarto del siglo XX, se desarrolla la topología y culmina la computación electrónica. Las matemáticas modernas, rigurosas, formales y bien cimentadas, producen un efecto de desarrollo acelerado de la física, la astrofísica, la optimización y en general, de todas las ciencias que utilizan a las matemáticas.

En este capítulo se presenta una síntesis de algunos sucesos y personajes relevantes de este período, desde fines del siglo XVIII y hasta el siglo XX.

10.2 LIBERACIÓN DE LA GEOMETRÍA.

La geometría de Euclides fue la primera estructura unificadora de un sistema de conocimientos matemáticos, que reúne los teoremas de 3 siglos del período griego del 600 al 300 A. C. A partir de un conjunto de 5 axiomas y 5 postulados consistentes e independientes en el sentido de la axiomática, y aplicando la lógica deductiva de Aristóteles, Euclides presenta sus 465 proposiciones en los 13 libros

EJERCICIO 11. **MACLAURIN, TAYLOR, DE MOIVRE, EULER, LAMBERT Y LAGRANGE.**

1. Representar en serie de Maclaurin $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = e^x$. Determinar sus intervalos de convergencia.
2. Derivando la serie polinómica de **sen x**, encontrar la representación en serie de **cos x** y determinar su intervalo de convergencia.
3. Aplicar los resultados de los problemas anteriores, para demostrar la ecuación de Euler $\cos x + i\operatorname{sen} x = e^{ix}$.
4. Utilizar la Ecuación de Euler del problema anterior para establecer una ecuación que relacione los números **1**, π, **e**, **i**.
5. Demostrar por inducción matemática la fórmula de De Moivre $(\cos x + i\operatorname{sen} x)^n = \cos nx + i\operatorname{sen} nx;\ n \in N$.
6. Con el resultado anterior, encontrar **sen 3x** y **cos 3x** como funciones de **sen x** y **cos x**.
7. Aplicando la fórmula de De Moivre, encontrar las **5** raíces quintas de la unidad **1**.
8. Graficar la curva de distribución normal $y = 100e^{-x^2}$. Determinar su dominio **D** y su co-dominio **C**, su sentido de crecimiento en **D** y sus puntos críticos de tangente horizontal.
9. Encontrar el valor aproximado del factorial de **90**, aplicando la fórmula de De Moivre atribuida a Stirling

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

10. Demostrar la siguiente identidad de funciones hiperbólicas $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$.

Definición:

$$\operatorname{senh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

11. Verificar que la siguiente función de producción de tipo Cobb - Douglas es lineal homogénea y que satisface el Teorema de Euler. Interpretar en términos económicos $z = 1500\, x^{1/3} y^{2/3}$
12. Aplicando el criterio de optimización de Lagrange, determinar la caja rectangular sin tapa, de máximo volumen, que puede obtenerse de manera que su área total, base y caras laterales, sea igual a **1,728 cms²**.

CAPÍTULO 10.

LIBERACIÓN Y FORMALIZACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS.

10.1 INTRODUCCIÓN

A partir de Lagrange, se observa la intención de formalizar e independizar las matemáticas del mundo físico real, para lograr su desarrollo autónomo riguroso y debidamente fundamentado. Esto se consigue en el siglo XIX con la liberación de los pilares de las matemáticas:

a). **La geometría**, en el primer tercio del siglo, a través de las geometrías no-euclidianas hiperbólica y elíptica.

b). **El álgebra,** a mediados de siglo, a través de las estructuras no-conmutativas de los Cuaternios, los hipercomplejos y las álgebras lineales.

Además, se formaliza el análisis matemático, el álgebra abstracta y sus estructuras algebraicas y a fines del siglo y principios del siglo XX, se desarrolla la lógica matemática, los fundamentos de las matemáticas, su meta-lenguaje y la aritmética transfinita a través de la teoría de conjuntos. En el segundo cuarto del siglo XX, se desarrolla la topología y culmina la computación electrónica. Las matemáticas modernas, rigurosas, formales y bien cimentadas, producen un efecto de desarrollo acelerado de la física, la astrofísica, la optimización y en general, de todas las ciencias que utilizan a las matemáticas.

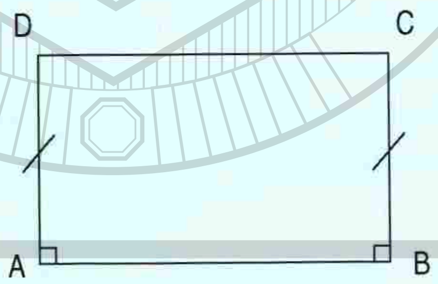
En este capítulo se presenta una síntesis de algunos sucesos y personajes relevantes de este período, desde fines del siglo XVIII y hasta el siglo XX.

10.2 LIBERACIÓN DE LA GEOMETRÍA.

La geometría de Euclides fue la primera estructura unificadora de un sistema de conocimientos matemáticos, que reúne los teoremas de 3 siglos del período griego del 600 al 300 A. C. A partir de un conjunto de 5 axiomas y 5 postulados consistentes e independientes en el sentido de la axiomática, y aplicando la lógica deductiva de Aristóteles, Euclides presenta sus 465 proposiciones en los 13 libros de sus ***Elementos***, de tal manera que esta obra educativa resiste el paso de más de 2 milenios. Los conceptos fundamentales de su geometría, la línea recta y el círculo son asociados al mundo físico real y esto contribuye a su éxito, por su clara utilidad práctica.

Las 2 figuras básicas de la geometría de Euclides -la recta y el círculo- se consideran de cualquier longitud y radio, pero se reducen a una problemática finita, al considerar a las figuras geométricas como aquellas que tienen límites. Sin embargo se establece que 2 rectas pueden prolongarse indefinidamente, abandonando la definición de figura y por lo tanto, es necesario establecer el comportamiento de estas 2 rectas, por medio del famoso 5º postulado de las paralelas. La consecuente teoría de las paralelas produce una controversia milenaria que finalmente conduce a las geometrías no-Euclidianas.

Durante más de 2 milenios se intentó eliminar el postulado de las paralelas y deducirlo como teorema de los restantes 9 axiomas y postulados, pero no se consiguió este objetivo. En 1733, el jesuita italiano GIROLAMO SACCHERI (1667-1733), profesor de matemáticas en la Universidad de Pavia, fue el primero en justificar el postulado de las paralelas en su libro ***Euclides ab Omni Naevo Vindicatus*** (Euclides ha sido reivindicado). Aplicando el método de reducción a lo absurdo, Saccheri considera un cuadrilátero **ABCD** con ángulos **A** y **B** rectos y lados **AD** y **BC** iguales:



Se demuestra que el ángulo **D** es igual al ángulo **C** y se consideran 3 posibilidades: Los ángulos **D** y **C** son agudos, obtusos o rectos. Las hipótesis de que son obtusos o agudos conducen a contradicciones, por lo que se concluye que son rectos.

La hipótesis del ángulo obtuso se descarta, suponiendo la infinitud de la línea recta. Al buscar la contradicción en la hipótesis del ángulo agudo no logra obtener algo convincente. Sin embargo obtiene importantes teoremas que lo acreditan como el descubridor o creador de la geometría no-Euclidiana.

35 años después de la publicación de Saccheri, J.H. Lambert escribe su libro ***Die Theorie Der parallellinien***, donde propone un cuadrilátero de 3 ángulos rectos y considera las hipótesis del 4º ángulo agudo, obtuso o recto, deduciendo nuevos teoremas a partir de la hipótesis del ángulo agudo y del ángulo obtuso.

Adrien - Marie Legendre (1752-1833) popularizó el problema del postulado de las paralelas en su libro de gran aceptación ***Eléments de Geometrie.***

K. F. Gauss (1777-1855) fue el primero en considerar la independencia del postulado de las paralelas, es decir, que no puede ser deducido del resto del sistema axiomático de Euclides. Entonces, prescinde de este postulado y considera 3 hipótesis equivalentes a las del ángulo agudo, ángulo recto y ángulo obtuso de Lambert y Saccheri. Las hipótesis de Gauss son: "Por un punto cualquiera P puede trazarse más de una, sólo una ó ninguna paralela a una recta dada L". Pero Gauss no publicó sus resultados, aunque en 1831 redactó lo que por primera vez se llamó una **Geometría No-Euclidiana.**

En 1830, el matemático ruso Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (1793-1856) publicó conclusiones similares en su obra titulada **Pangeometría**.

El matemático húngaro Janos Bolyai (1802-1860) también llegó simultáneamente a conclusiones similares publicadas en 1832 en un apéndice de 26 páginas de una obra didáctica de su padre, donde escribe sobre lo que llama una "*Geometría Absoluta*", independiente del postulado de las paralelas, donde la geometría de Euclides es un caso particular, así como la trigonometría esférica.

La geometría no euclidiana de Gauss, Lobachevsky y Bolyai fue llamada **Geometría Hiperbólica**, como actualmente se le conoce, por Félix Klein (1849-1921). En esta geometría, dada una recta **L**, por un punto **P** fuera de **L** puede trazarse un conjunto de más de una recta que no cortan a **L**. Esto corresponde a la hipótesis del ángulo agudo en los cuadriláteros de Lambert y Saccheri.

Posteriormente, el matemático alemán Georg Friedrich Bernard Riemann (1826-1866) considera la tercera hipótesis que libera a la geometría del postulado de las paralelas: "Por un punto exterior a una recta, no pasan rectas que no la corten", equivalente a la hipótesis del ángulo obtuso de Saccheri, obteniendo otra geometría no-euclidiana que se llama **Geometría Elíptica.** Su trabajo original de 1854, fue publicado en 1867 con el título ***Sobre las Hipótesis en que se Funda la Geometría.***

La **Geometría Euclidiana** permanece como intermedia entre la geometría hiperbólica y la geometría elíptica, por lo que se le llama **Geometría Parabólica**, donde *"por un punto exterior a una* *recta, pasa una sola recta paralela, es decir, una sola recta que no la corta"*, lo cual corresponde a la alternativa del ángulo recto en el cuadrilátero de Saccheri.

En 1870, se difunden ampliamente las geometrías no-euclidianas, hiperbólica y elíptica, y se relacionan con la geometría proyectiva y la geometría euclidiana, estableciéndose su validez lógica, ya que la existencia de una supuesta contradicción en las geometrías no-euclidianas, implicaría una contradicción en la geometría de Euclides, la cual no está en duda.

El método que conduce a las geometrías no-euclidianas produce, más adelante, otras geometrías. Además, induce al estilo detallado del método axiomático para las matemáticas por sí mismas y para su relación con la física.

10.3 KARL FRIEDERICH GAUSS. (1777 - 1855)

Nació el 30 de abril de 1777 en Brunswick, Alemania. Su abuelo paterno fue un campesino que emigró a Brunswick, donde trabajó como jardinero. El padre de Gauss fue jardinero y, después, albañil y maestro de obras; deseaba que su hijo Karl trabajara con él, pero K. F. Gauss tenía otro destino. El apoyo de su madre Dorothea y la influencia de su tío materno Friederich, impulsaron a Gauss, quien llegó a ser uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos, junto con Newton y Arquímedes.

La precosidad de Gauss es de las más notables en la historia. A sus 3 años de edad corrigió a su padre en la suma de una nómina de pago para sus trabajadores. A esta edad recitaba el alfabeto y aprendió a leer. Entendía el significado de los dígitos 0, 1, 2, 3, …, 9 y realizaba cálculos mentales con números naturales. A la edad de 7 años empezó su instrucción escolar y a los 10 años de edad sorprendió a su maestro al sumar correctamente los 100 términos de una progresión aritmética,

observando que la diferencia constante entre los términos consecutivos permite sumarlos como el promedio del primero y el último, multiplicado por el número de sumandos. El maestro le obsequió un libro de aritmética y su ayudante, Johann Martin Bartels (1769-1836) estudió con Gauss, extendiendo la aritmética hacia el álgebra y el análisis elemental.

La primera investigación de Gauss fue sobre la demostración de la ley del Binomio de Newton $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n$, para **n** no-natural. Para Gauss y Bartels no era satisfactorio el tratamiento de los textos, porque se producían paradojas como el caso de **n = -1** con **a = 1** y **b = -2**:

$$(1-2)^{-1} = 1 + 2 + 2^2 + \ldots \qquad \therefore\ -1 = \infty$$

Gauss considera que una demostración no debe ser aceptada si produce paradojas, hasta que estas situaciones absurdas sean aclaradas y las condiciones del teorema sean rigurosamente establecidas.

A sus doce años de edad, domina la geometría euclidiana y a los 16 vislumbra la posibilidad de una geometría no-Euclidiana. A los 17 años es un crítico de la Teoría de Números, dedicado a la tarea de completar lo que sus antepasados habían realizado a medias.

Cuando Gauss tenía 14 años de edad, Bartels invitó a personas influyentes a conocer a Gauss y éstos a su vez, impresionados por el genio de Gauss, lo recomendaron con el Conde de Brunswick, Carl Wilhelm Ferdinand, quien aseguró la educación del joven, inscribiéndolo en el Collegium Carolinum, donde estudió 3 años el ***Principia Matemática*** de Newton y los trabajos de Euler y Lagrange. A sus 17 años, Gauss re-descubre por inducción el *Theorema Aureum* o *La Gema de la Aritmética*, conocida como la ***Ley de reciprocidad cuadrática***, siendo el primero en demostrarla. Para esto, define la congruencia sobre los números naturales de la siguiente manera:

Definición: **a** es congruente **b**, módulo **m**, si **(a - b)** es múltiplo de **m**.

Notación: $a \equiv b \pmod{m}$, si $a - b = km$, $k \in \mathbb{N}$.

La ley de reciprocidad cuadrática establece lo siguiente: *Las congruencias* $x^2 \equiv q \pmod{p}$ *y* $x^2 \equiv p \pmod{q}$, *donde* **p** *y* **q** *son primos, tienen ambas solución o ninguna la tiene, a menos que ambos* **p** *y* **q** *dejen residuo* **3** *al dividirse entre* **4**, *en cuyo caso, una de ellas tiene solución y la otra no.*

Por la importancia de este teorema en la Teoría de Números, Gauss lo demostró de 6 maneras, una de las cuales se relaciona con la construcción de polígonos regulares con regla y compás. El 30 de marzo de 1796, a la edad de 19 años, Gauss logró la construcción del polígono de 17 lados con regla y compás y esto lo decidió a dedicarse a las matemáticas. Fue entonces cuando inició su ***Diario Científico***, hasta el 9 de julio de 1814. Este diario contiene 146 brevísimas presentaciones de sus descubrimientos y fue distribuido en 1898 por la Royal Society, 43 años después de la muerte de Gauss. Después en 1917 fue publicado con la colección de trabajos de Gauss.

De 1795 a 1798, Gauss estudia en la Universidad de Götingen bajo el patrocinio financiero del Duque Ferdinand. Desde 1795, a sus 18 años de edad, empieza a trabajar en estudios profundos y detallados de la Teoría de Números que completa en 1798 y lo titula ***Disquisitiones Arithmeticae,*** libro que fue publicado en 1801 y está considerado una de las obras maestras de Gauss. Consta de 7 secciones sobre propiedades de números enteros y fracciones.

Las primeras tres secciones tratan la teoría de congruencias, analizando exhaustivamente la congruencia binomial $\mathbf{x^n \equiv A \pmod{p}}$, donde **n** y **A** son cualquier enteros dados, **p** es primo y la incógnita **x** debe ser entero; esta teoría es similar a la ecuación algebraica $\mathbf{x^n = A}$, pero mucho más complicada y rica en posibilidades.

La cuarta sección trata la teoría de los residuos cuadráticos (un número entero **r**, no divisible entre **m**, es un residuo cuadrático de **m** si la congruencia $\mathbf{x^2 \equiv r \pmod{m}}$ tiene solución para **x** entero). Aquí se presenta la primera demostración publicada de la **Ley de reciprocidad cuadrática**, por inducción matemática.

En la quinta sección se aplica la ley de reciprocidad cuadrática a la **Teoría de las formas cuadráticas binarias,** $\mathbf{ax^2 + 2bxy + cy^2 = m^2}$, donde se buscan las soluciones enteras **x** y **y** de esta ecuación indeterminada, considerando que **a**, **b**, **c** y **m** son enteros dados. Además contiene la teoría de las formas **cuadráticas ternarias**, $\mathbf{ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2}$, donde **a, b, c, d, e, f** y **m**, son enteros y se buscan soluciones enteras para **x, y** y **z**. Un caso particular, aparentemente sencillo, se presenta cuando $\mathbf{b = d = e = 0}$: $\mathbf{ax^2 + cy^2 + fz^2 = m}$, de donde para $\mathbf{a = c = 1, f = -1}$ y $\mathbf{m = 0}$, se tiene la ecuación de las ternas pitagóricas $\mathbf{x^2 + y^2 = z^2}$, la cual es indeterminada y fue resuelta por los griegos.

La sexta sección aplica los resultados de la sección anterior a casos especiales como el de encontrar las soluciones enteras **x** y **y** de $\mathbf{ax^2 + cy^2 = m}$, donde **a, c** y **m** son enteros dados.

En la séptima sección, Gauss aplica todo lo anterior, especialmente su teoría de congruencias binomiales para analizar la ecuación algebraica $\mathbf{x^n = 1}$, donde **n** es cualquier entero dado, ligando perfectamente la aritmética, el álgebra y la geometría, porque esta ecuación es el planteamiento algebraico del problema geométrico de construir un polígono regular de **n** lados y lo resuelve a través de la congruencia aritmética $\mathbf{x^m \equiv 1 \pmod{p}}$, donde **p** es primo y **m** entero.

Esta obra de Gauss comprende como casos particulares, algunos de los descubrimientos anteriores de Fermat, Euler y Lagrange. Es muy complicada, aún para especialistas de la teoría de números y fue presentada en condiciones muy accesibles por Peter Gustave Lejeune Dirichlet (1805-1859). En 1804, Lagrange escribe a Gauss diciéndole que sus disquisiciones lo han distinguido como el primer matemático. Este libro fue dedicado por Gauss al duque Ferdinand.

En 1799, Gauss recibió su doctorado (in absencia) de la Universidad de Helmstedt por su trabajo *Una nueva demostración de que toda función polinómica racional entera de una variable, puede descomponerse en un producto de factores de primero y segundo grado.* Esta tesis contiene en realidad la primera demostración del llamado **Teorema Fundamental del Álgebra**, que en términos más conocidos establece que toda ecuación algebraica en una incógnita tiene una solución en los complejos.

Fue uno de los primeros en considerar a los complejos $\mathbf{a + bi}$, donde **a** y **b** son números reales, y representarlos en un sistema cartesiano como puntos de coordenadas **(a, b).** Presenta 4 pruebas distintas del teorema y además considera que los polinomios son funciones continuas, por lo que todo polinomio de grado impar tiene por lo menos una raíz real, es decir, su curva cruza el eje **X** por lo menos una vez.

En 1807 es nombrado Director del Observatorio de Göttingen, con la obligación de dar clases de matemáticas en la Universidad, con un modesto salario.

En 1809 publica su segunda obra maestra ***Teoría del movimiento de los cuerpos celestes alrededor del sol en órbitas de secciones cónicas***. En esta obra presenta un análisis exhaustivo de las órbitas de planetas y cometas, incluyendo perturbaciones. Por estas fechas sufre la pérdida de su protector, el duque Ferdinand, en 1806; la de su padre, en 1808 y la de su primera esposa Johanne, en 1809.

En 1811, habiéndose casado de nuevo, vuelve a producir matemáticas en el campo de la **teoría de las funciones analíticas de una variable compleja,** que tiene importantes aplicaciones a las teorías de movimiento de fluidos y la electricidad y posteriormente a la aerodinámica y la electrónica.

En 1812 publica un trabajo sobre **Series hipergeométricas**, incluyendo casos especiales que conducen al cálculo y tabulación de logaritmos, funciones trigonométricas y otras funciones de la Física y la Astronomía, así como aplicaciones a las ecuaciones diferenciales de la física.

A pesar de sus limitaciones económicas, Gauss declinó la invitación de la Academia de París para participar en la competencia de 1816-1818, donde se ofrece un premio en efectivo al primero que demuestre el "*Ultimo teorema de Fermat*", por considerarlo una proposición aislada de poco interés para sus investigaciones de carácter más general.

Considera a los números complejos **a + bi**, con **a** y **b** reales e $i^2 = -1$, como rotaciones del plano y extiende esta idea a las rotaciones de espacios tridimensionales con lo que él llama *mutaciones* que son los cuaterniones **a + bi + cj + dk**, con **a, b , c, d** reales, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$; $ij = -ji = k$; $jk = -kj = i$; $ki = -ik = j$, donde no vale la ley conmutativa de la multiplicación, anticipándose a Hamilton, quien publica su ***Tratado de Cuaterniones*** en 1853. La falta de publicaciones de Gauss lo hacen perder calidad de pionero en este tema, como le sucede en otros tantos otros como funciones elípticas, teoría de funciones analíticas y las geometrías no-euclidianas.

En 1825, define sus números **Enteros Gaussianos** como números complejos **a + bi**, con **a** y **b** **enteros racionales**, para resolver el problema de las reciprocidades cúbica y cuadrática y dar paso a la consideración de congruencias binomiales de cualquier grado **n:** $x^n \equiv a \pmod{m}$. Por este camino, inicia la teoría de los **números algebraicos**, que son las raíces de los polinomios, es decir las soluciones de las ecuaciones polinómicas.

Gauss, como Arquímedes y Newton, también utiliza las matemáticas aplicadas para inventar. Así inventa el **heliotropo** para transmitir señales casi instantáneamente por reflexiones de luz. Mejoró notablemente sus instrumentos astronómicos y, para sus investigaciones de electromagnetismo, en 1833 inventó su **telégrafo eléctrico.**

De 1821 a 1848, fue consejero científico de los gobiernos de Hannover y Holanda, en un levantamiento geodésico de gran magnitud, manejando masas de datos, a los cuales ajusta curvas por su **método de mínimos cuadrados** de los errores e iniciando el estudio de superficies curvadas que conduce a la primera etapa de la **Geometría diferencial**. Inspirado en estos trabajos de Gauss, Riemann inicia la segunda etapa de esta nueva rama de las matemáticas que actualmente se utiliza en

la ***Teoría General de la Relatividad***. Para el estudio de superficies, Gauss utiliza representaciones paramétricas a través de los manifolds. Así la longitud y la latitud de un punto sobre la superficie de la tierra es un manifold bidimensional que sustituye a las coordenadas cartesianas (x_0, y_0, z_0) tridimensionales, para la localización del punto.

Gauss se muestra como un científico liberal respecto a las mujeres, cuando propone a la Universidad de Götingen el doctorado honorario para la matemática francesa Sophie Germain (1776-1831) por su trabajo para la determinación de los números primos impares **p** que resuelven cada una de las congruencias $x^3 \equiv 2 \pmod{p}$ y $x^4 \equiv 2 \pmod{p}$. En 1874, otra mujer rusa llamada Sonja Kowaleski (1850-1891) recibió el doctorado en matemáticas de Götingen, después de que Berlín se rehusó a otorgárselo por ser mujer. Otra de las mujeres notables en matemáticas que también se graduó en Götingen, Emmy Noether (1882-1935) emigró a Pensilvania, E.U., y llegó a ser notable en el campo del Álgebra Abstracta.

Gauss se retiró de Götingen en 1854 para observar la construcción del ferrocarril y falleció en 1855, dejando su presencia en casi todas las matemáticas modernas.

10.4 <u>SOPHIE GERMAIN</u> (1776 – 1831)

Nació en París, el 1º de abril de 1776. Su padre fue diputado y llegó a ser Director del Banco de Francia. Poseía una enorme biblioteca que le permitió a Sophie educarse en casa, fascinada por los trabajos de matemáticas.

A los 13 años leyó sobre Arquímedes y su trágica muerte, tomando la decisión de convertirse en matemática, lo que en los siglos XVIII y XIX era inadecuado para una mujer. Sus padres se opusieron. Después de estudiar Latín y Griego, leyó a Newton y Euler.

A los 18 años le fue imposible entrar a la Universidad, por lo que tuvo que seguir las clases a la puerta del aula, consiguiendo los apuntes con los compañeros varones; así, pudo tener las notas de Lagrange sobre análisis. Tomando el nombre de Antoine Leblanc, envió un artículo a Lagrange sobre este tema, quien lo encontró original y exacto, descubriendo que el autor era ella. Desde entonces, Lagrange se convirtió en su tutor matemático.

Posteriormente, sostuvo correspondencia con Legendre sobre problemas de Teoría de números. Una importante contribución de Sophie Germain fue sobre **el último Teorema de Fermat**: ***$a^n + b^n = c^n$ no tiene solución a, b y c para todo n > 2***.

En 1806, la Academia Francesa ofreció un premio para el mejor trabajo sobre la **Naturaleza de las Vibraciones en Placas Elásticas**, y Sophie ganó el premio con el seudónimo que usaba.

Después leyó las ***Disquisiciones Arithmeticae*** de Gauss a quien envió ampliaciones y generalizaciones de la obra. Gauss quedó impresionado y en 1807 la conoció, descubriendo que se había presentado con el nombre de Antoine Leblanc.

En sus últimos trabajos escribió ***Pensées Diverses*** y ***Considerations Générales Sur L'etat des Sciences et des Letras***, obras filosóficas publicadas póstumamente, en 1879.

Cuando fue revelada su identidad, Gauss solicitó un Doctorado Honorario de la Universidad de Göttingen para ella, pero su muerte le impidió recibir este honor.

Otras distinguidas mujeres matemáticas posteriores a Sophie Germain fueron: Sofía Kovalevskaya, de Rusia (1850 – 1891) y Emma Amalie Noerther, de Alemania (1882 – 1935), primera mujer que fue admitida como oyente en las Universidades de Erlangen y Göttingen y que obtuvo su Doctorado en 1907, después que cambiaron los estatutos en 1903.

10.5 AUGUSTIN - LOUIS CAUCHY. (1789 - 1857)

Nació en París, durante la revolución que obligó a cerrar las escuelas. Sus padres, católicos radicales, se trasladaron a su casa de campo y Cauchy recibió la instrucción primaria de su padre. Laplace conoció a Cauchy, por ser vecinos y descubrió en él un gran talento matemático.

En 1800, el padre de Cauchy es electo secretario del senado con oficina en el palacio de Luxemburgo, donde Lagrange conoce al niño de 11 años y queda impresionado por su habilidad para las matemáticas. Sin embargo, recomienda a su padre que no lea matemáticas superiores hasta que tenga 17 años y que se prepare en literatura y gramática para que pueda escribir sus trabajos.

En 1802, a sus 13 años, Cauchy entra a la Ècole Central do Panthéon, donde gana todos los premios de composición e idiomas, griego y latín, instituidos por Napoleón.

En 1804, cuando deja la escuela, gana un premio especial en humanidades. Después estudia matemáticas con un tutor por 10 meses.

En 1805 entra a la Ècole Polytechnique, estudiando con Lagrange y Laplace hasta 1807, cuando entra a la Ècole des Ponts et Chaussées, de ingeniería civil. En 1810 es contratado por 3 años como ingeniero militar en Cherbourg para la construcción de puertos y fortificaciones, llevándose consigo la ***Mecánica Celeste*** de Laplace y el ***Tratado de Funciones Analíticas*** de Lagrange. Trabajando desde las 4 de la mañana, Cauchy se daba tiempo para investigar.

En 1811, envió a la Academia Francesa su primer ensayo sobre ***Teoría de los Poliedros*** demostrando que hay únicamente 5 poliedros regulares y extendiendo la fórmula de Euler **a + 2 = c + v** (El número de aristas más 2 es igual al número de caras más el número de vértices).

1813 Deja la Ingeniería Civil y se inicia como Profesor de matemáticas en la Ècole Polythecnique.

1814 Cauchy realiza un trabajo sobre **Integrales Definidas con Limites Complejos**, iniciando formalmente la ***Teoría de Funciones de Variable Compleja***. Este trabajo de 180 páginas fue publicado en 1827.

1815 Demuestra el teorema general de los números poligonales o figurales, que había sido planteado por Fermat y que Euler y Lagrange no pudieron demostrar. Gauss lo demostró para los triangulares:

Teorema: Todo *entero positivo es la suma de 3 números triangulares, 4 cuadrados, 5 pentagonales, etc., considerando al cero como elemento inicial de cada sucesión de los números figurales.* Por ejemplo, la sucesión de los números cuadrados es 0, 1, 4, 9, 16, 25, …

1816 Obtiene el Gran Premio de la Academia Francesa por su trabajo de más de 300 páginas ***Teoría de la Propagación de Ondas Sobre la Superficie de un fluido Pesado de Profundidad Indefinida***. A sus 27 años de edad, Cauchy recibe ofrecimiento de membresía de la Academia para la primera vacante que se presente, por lo cual, ocupa el lugar que deja posteriormente Monge.

1818 Se casa con Aloise de Bure procreando 2 hijas.

1821 Animado por Laplace, publica sus ***Conferencias del Curso de Análisis***, que está enseñando en la Ècole Polytechnique, incluyendo definiciones rigurosas de límite y continuidad y detallando el tema sobre convergencia de series, y la **Prueba de la Integral de Cauchy**.

1826 – 30 Inicia la publicación de un Journal titulado **Ejercicios de Matemáticas**, que continúa con una segunda serie titulada **Ejercicios de Análisis Matemático** y de Física donde aparecen todos sus trabajos de matemáticas puras y aplicadas.

1830 Por dificultades con al Academia, se exilia voluntariamente a Suiza, donde se dedica a la investigación y ofrece conferencias científicas. Después se traslada a Turín, Italia para ocupar un puesto de Profesor de matemáticas.

1833-1838 Es encargado de la educación de un niño de 13 años, hijo del Duque de Bordeaux.

1837 Extenso trabajo **Sobre la Dispersión de la Luz**, donde explica el fenómeno de la separación de la luz blanca en diferentes colores, bajo la hipótesis de que la luz es causada por las vibraciones de un sólido elástico. Las fórmulas de esta falsa hipótesis, obtenidas por Cauchy, aún se usan, pero la teoría de los sólidos elásticos falla en casos de dispersiones anómalas.

1838-1857 Realiza más de 500 trabajos sobre todas las ramas de las matemáticas, mecánica y astronomía.

1840 Extenso trabajo con gran cantidad de cálculos numéricos sobre **Astronomía Matemática.**

1845 Inicia su **Teoría de Sustituciones** (o Permutaciones) que conduce a la **Teoría de Grupos Finitos**, donde define el concepto de grupo a través de sus 4 cuatro postulados: cerramiento, asociatividad, identidad e inverso. Esta teoría fue extendida posteriormente por otros matemáticos y se han encontrado gran cantidad de aplicaciones matemáticas y físicas.

En total Cauchy realizó 789 trabajos científicos que ocupan 24 grandes volúmenes, siendo junto con Euler y Cayley, los matemáticos más prolíficos de la historia de las matemáticas.

10.6 NIELS HENRIK ABEL (1802-1829)

Nació en Findö, Noruega, hijo de un Pastor de amplia cultura y en una época de gran pobreza del país por sus recientes guerras con Inglaterra y Suiza.

En la escuela primaria, su primer maestro golpeaba a sus alumnos y fue sustituído por Berat Michael Holmböe (1795-1850), quién observó el genio del niño Abel, convirtiéndose en su protector y editor de la primera publicación de los trabajos completos de Abel en 1839, Post-mortem.

A sus 16 años, Abel estudió por su cuenta las principales obras de matemáticas, incluyendo trabajos de Newton, Euler y Lagrange. A sugerencia de Holmböe, estudia la más difícil de las obras clásicas, ***Las Disquisiciones Aritméticas de Gauss.*** Descubrió que algunas de las demostraciones de los grandes matemáticos, no eran correctas o estaban incompletas. Así, realiza la primera demostración del **Teorema General del Binomio**, sobre el cual, Newton y Euler habían demostrado casos especiales. Esta prueba del caso general fue el inicio de un amplio programa de Abel para la teoría y aplicación de series infinitas.

En 1820 murió el padre de Abel, por lo que tiene que trabajar como maestro de alumnos particulares para ayudar a sostener a su madre y sus 6 hermanos. Hölmboe trató de conseguirle fondos del gobierno para sus investigaciones y aún contribuyó con algo de sus propios ingresos para ayudarlo.

1821 Abel cree haber resuelto algebraicamente la ecuación general de 5º grado $ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$, pero encuentra una falla en el proceso y demuestra que es imposible resolverla algebraicamente, es decir, a través de las operaciones del álgebra clásica: sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potencias y raíces de los coeficientes (independientemente del trabajo de Paolo Rufino, de 1813).

1822 Abel termina sus estudios en la Universidad de Kristiana. Sus amigos y maestros, a través de la Universidad, solicitaron un subsidio del gobierno noruego que le permita viajar por Europa. Para el efecto, Abel entrega un amplio trabajo para su publicación, algo imposible por falta de fondos que finalmente se perdió. El gobierno le otorgó una beca para que continuara sus investigaciones en la Universidad de Kristiana. Trabajó intensamente en matemáticas y estudiando francés y alemán.

1825 El gobierno noruego le otorga, por fin, modestos recursos para su viaje. En Alemania, entregó su trabajo sobre la quíntica a Gauss, pero éste no mostró interés, tal vez por tratarse de la demostración sobre un caso particular. En Berlín, conoce a August Leopold Crelle (1789-1856), un Ingeniero Civil, aficionado a las matemáticas y constructor del primer ferrocarril de Alemania. Crelle fundó la primera revista dedicada exclusivamente a la investigación matemática: *Revista de Matemáticas Puras y Aplicadas*. Los primeros tres volúmenes del Journal de Crelle contienen 22 trabajos de Abel, incluyendo la prueba de irresolubilidad algebraica de la ecuación quíntica.

1826 Viaja a Freiburg y trabaja sobre lo que conocemos como el **Teorema de Abel** sobre representación algebraica y logarítmica de funciones. Después viaja a Francia, donde presenta

a la Academia de París su trabajo ***Sobre una Propiedad General de un muy extenso conjunto de Funciones Trascendentes***. Aquí, Abel se refiere al limitado conjunto de funciones trascendentes que están siendo consideradas por los matemáticos, ya que se reducen a las logarítmicas, exponenciales y trigonométricas o circulares, por lo que presenta un extenso nuevo conjunto de funciones trascendentes, las funciones elípticas, cuyas derivadas pueden expresarse por medio de ecuaciones algebraicas cuyos coeficientes son funciones racionales de una variable.

Desafortunadamente, los miembros del jurado de la Academia para este trabajo, Cauchy y Legendre, menospreciaron su gran importancia. Cauchy lo llevó a su casa y lo perdió y Legendre declaró que era casi ilegible. En 1829, Jacobi declara que el trabajo de Abel es un gran descubrimiento, tal vez el más grande del siglo. La Academia enmendó su error, otorgando el Gran Premio de Matemáticas de 1830 a Abel y Jacobi, pero para entonces Abel había fallecido. Posteriormente, Hermite se refiere a este trabajo, como algo que tendrá ocupados a los matemáticos por cientos de años.

Abel descubrió que sus nuevas funciones obtenidas de la inversión de integrales elípticas, tienen dos períodos, cuya razón es imaginaria, mientras que las funciones circulares tienen un período y declara: "Estudien las funciones inversas".

Definición: *La inversa de una función* $y = f(x)$ *es la que se obtiene considerando a* x *como variable dependiente. Si se puede despejar* x, *entonces* $x = g(y)$ *es la inversa. Si no se puede despejar* x, *entonces se considera* x *como función implícita de* y *para al inversa.*

Ejemplos: $y = 2x - 6$; $x = (1/2)y + 3$
$y = ex$; $x = \ln y$
$y = \operatorname{sen} x$; $x = \operatorname{sen}^{-1} y$

En cada uno de estos casos, $y = f(x)$ y $x = f(y)$ son funciones inversas.

Los investigadores que siguieron el análisis de las funciones elípticas y sus generalizaciones, llamadas funciones abelianas, (Jacobi, Weirstrass, Riemann y otros), descubrieron funciones de n variables con 2n períodos y aplicaron estas funciones a la solución de problemas de geometría, mecánica y física matemática.

1827 Agotados sus recursos económicos, incluyendo una pequeña aportación de Hölmboe, Abel regresa a Kristiana muy débil por su desnutrición y ya afectado de tuberculosis pulmonar.

Había una vacante en la Universidad pero no se otorga a Abel por considerarlo inexperto como maestro. Hölmboe ocupa el puesto, que de otra manera iba a ser otorgado a un profesor extranjero, y envía alumnos a Abel para clases particulares.

Abel trabaja sobre lo que ahora se llaman integrales abelianas y establece el **Criterio Logarítmico de Convergencia de Series.**

Por su parte Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) sistematiza el estudio de las funciones elípticas mediante series. Abel y Jacobi liberan el análisis matemático de la física y el mundo real, casi simultáneamente con la geometría, que logra su independencia a través de las geometrías no-euclidianas.

Abel trabajó también sobre álgebra abstracta en lo que ahora se llaman grupos abelianos.

10.7 EVARISTE GALOIS (1811-1832)

Nació en Bourg-La-Reine, cerca de París. Su padre fue un intelectual, alcalde del pueblo y amante de la libertad. Recibió la primera educación de su madre.

1823 A los doce años de edad, Galois entra al Liceo Luis-le-Grand de París, donde obtuvo premios por su buena preparación.

1824 – 25 Su trabajo académico de literatura, retórica, griego y latín es calificado como mediocre; se aburre con estas materias, hasta que inicia sus cursos de matemáticas a sus 14 años de edad. Se entusiasma con la geometría de Legendre, la cual digiere con facilidad. En su curso de álgebra, le disgusta el libro de texto, por lo que se dedica a leer a Lagrange y los trabajos de los grandes matemáticos de su época, sobre solución de ecuaciones y teoría de funciones analíticas. Descuida su trabajo escolar normal, pero en el examen general de matemáticas obtiene el primer lugar.

1826 A sus 15 años, se considera a sí mismo como un ser superior en matemáticas y parece disfrutar al demostrarlo ante sus compañeros y sus maestros, quienes lo consideran un niño extraño de gran ambición por las matemáticas, pero que desprecia sus demás materias. Pierde la simpatía de sus maestros, quienes consideran que debería dedicarse únicamente a las matemáticas.

1827 Su maestro de matemáticas, Vernier, trata de convencerle de que trabaje sistemáticamente, pero Galois no hace caso y sin completar sus conocimientos de matemáticas elementales, intenta entrar a la Ècole Polytechnique, la gran institución francesa, fundada durante la revolución para proporcionar a los ingenieros civiles y militares la mejor preparación científica del mundo en esa época. Galois fracasó en sus exámenes a pesar de su notable inteligencia para las matemáticas, que sus examinadores no lograron entender.

1828 A sus 17 años, conoce a Louis-Paul-Èmile Richard (1795-1849) profesor de matemáticas avanzadas en el Liceo de Louis-le-Grand, quien inmediatamente reconoce el genio de Galois y lo considera el más extraordinario de sus alumnos, que debería haber sido admitido en la Ècole Polytechnique sin someterlo a exámenes. Este maestro impulsó a sus alumnos que llegaron a ser notables científicos como Leverrier, descubridor por medio del análisis matemático, del planeta Neptuno y Hermite, algebrista de primera categoría. Richard reconoce en Galois una notable superioridad sobre sus otros alumnos y le otorga el primer premio en su curso.

1829 Galois publica su primer trabajo de investigación sobre **fracciones continuas**, y lleva a la Academia Francesa un trabajo con sus principales descubrimientos, recibiendo de Cauchy la promesa de presentarlo. Sin embargo, Cauchy no sólo olvida su promesa, sino que pierde el escrito de Galois, repitiendo el desastre de su relación con Abel. Curiosamente, las dos fallas de Cauchy se presentan ante 2 genios jóvenes que después de su muerte, obtienen amplio reconocimiento por sus descubrimientos.

Intenta de nuevo ingresar a la Ècole Polytechnique pero vuelve a fracasar ante un jurado que no entiende su genio, inclusive tiene una controversia con uno de sus examinadores, quien estaba equivocado y obstinado en su error, por lo que Galois pierde la paciencia y le arroja el borrador a la cara. Para completar su frustración ante la sociedad, pierde a su padre, quien se suicida ofendido por una campaña difamante de un predicador, en su contra.

Regresa a la escuela para prepararse como maestro. Después de sus exámenes finales, sus maestros le dan calificaciones de excelencia en física y matemáticas, pero en literatura lo consideran una nulidad, con serias dificultades para expresarse con claridad, por lo que dudan pueda llegar a ser un buen maestro.

1830 A sus 19 años, fue aprobado para pasar a la Universidad. Trabaja por su cuenta y produce 3 ensayos que contienen su ***Teoría de ecuaciones algebraicas***, presentándola a la Academia deCiencias para competir por el Gran Premio de Matemáticas, al cual sólo aspiraban los más notables matemáticos de la época. El Secretario recibe el manuscrito, lo lleva a su casa para examinarlo, pero desgraciadamente fallece y se pierde todo rastro del manuscrito. Ante estas circunstancias, decide unirse al grupo radical de los republicanos, por lo que es expulsado de la escuela.

Galois decide ofrecer un curso particular de Álgebra Superior con un programa que contiene todos sus descubrimientos:

1. Nueva teoría de los imaginarios (Los imaginarios de Galois, muy importantes actualmente en álgebra y teoría de números).
2. Teoría de la solución de ecuaciones por radicales. (Teoría de Galois).
3. Teoría de números.
4. Funciones elípticas por álgebra.

Nadie se inscribe para este curso y Galois decide ingresar al ejército. Vuelve a escribir su trabajo sobre ***Teoría general de ecuaciones*** y lo envía a la Academia de Ciencias, pero Poisson le encuentra "incomprensible".

1831 – 1832 Galois se ve envuelto en problemas políticos, por lo que es arrestado, liberado y vuelto a arrestar por considerarlo un peligroso radical, siendo condenado a 6 meses de prisión, de donde sale en abril de 1832 bajo palabra. Tiene su única relación amorosa y se compromete en duelo con pistolas a 25 pasos, donde resulta herido en el intestino y abandonado en el campo del honor. Un campesino lo lleva al hospital, donde fallece de peritonitis el 31 de mayo de 1832.

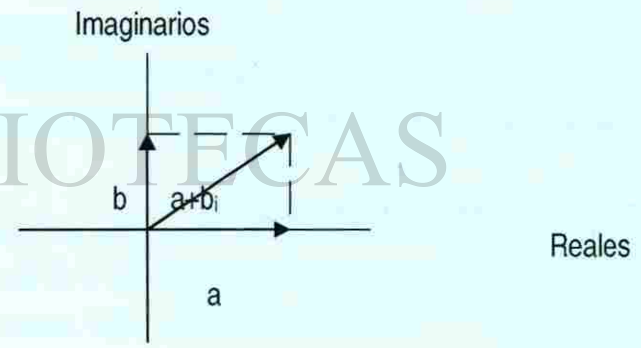
Antes del duelo, Galois escribe frenéticamente sus descubrimientos, incluyendo la teoría de grupos y sus implicaciones con brillante éxito, en un escrito de 60 páginas, que envía a su amigo Auguste Chevalier con la esperanza de que alguien pueda disfrutar de todo esto en el futuro.

Catorce años después, en 1846, Joseph Liouville (1809 - 1882) publicó algunos de los escritos de Galois en su *Journal de Matemáticas Puras y Aplicadas*. Posteriormente, Jules Tannery completó la publicación de los trabajos de Galois en 1908, conteniendo las más importantes propiedades de los grupos y sus extensiones a campos. En 1870, Camille Jordan(1838 - 1922) publica su ***Tratado de Sustituciones***, en el que reconoce el carácter unificador de la **Teoría de Galois**. Dos discípulos de Jordan, Felix Klein (1849 - 1925) y Marios Sophos Lie (1842 - 1899) exponen en sus trabajos de investigación, el poder sistemático y unificador de la Teoría de Galois.

10.8 LIBERACIÓN DEL ÁLGEBRA.

A partir de mediados del siglo XIX, el álgebra avanza notablemente en abstracción y generalización. Del concepto de grupo, nombre propuesto por Galois, surgen una gran cantidad de sistemas algebraicos o estructuras, agregando o quitando condiciones. Así tenemos los semigrupos, cuasigrupos, monoides, anillos, ideales, dominios enteros, anillos de división, campos, espacios vectoriales, álgebras lineales, etc.

En particular el *vector*, nombre propuesto por Hamilton, provisto de magnitud y dirección, es utilizado por los físicos desde finales del siglo XVII para representar fuerzas y velocidades. Sin embargo, el matemático no le dedica mayor atención hasta principios del siglo XIX cuando Gauss los usa implícitamente en la representación geométrica de los números complejos **a + bi** en el plano



Esta representación geométrica de los vectores con los números complejos, se utiliza para el estudio de las rotaciones del plano. Hamilton considera que esto puede ser extendido al estudio de las rotaciones del espacio y para el efecto, construye un sistema algebraico, los cuaternios o cuaterniones, donde se liberan las condiciones tradicionales de una suma asociativa y conmutativa y una multiplicación asociativa, conmutativa y distributiva sobre la suma. Los cuaternios de Hamilton constituyen el primer sistema algebraico con una multiplicación no conmutativa, indispensable para cumplir los propósitos generalizantes del álgebra y al mismo tiempo, satisfacer los requerimientos de la Física y la Geometría.

10.9 <u>WILLIAM ROWAN HAMILTON.</u> (1805 - 1865)

Nació en Dublín, Irlanda. Huérfano desde pequeño, fue educado por un tío, con una orientación hacia la literatura y los idiomas.

1820 A sus 15 años de edad, Hamilton se entusiasma por las matemáticas al asistir a una presentación del notable calculista mental americano Zerah Colburn. Estudia la aritmética, la geometría analítica, el cálculo y los 4 volúmenes del ***Principia Matemática*** de Newton.

1823 Encuentra un error matemático en la **Mecánica Celeste** de Laplace y escribe su primer ensayo sobre este tema.

1824 - 28 Estudia en el Trinity College de Dublín y a sus 22 años de edad, es propuesto como Astrónomo Real, Director del Observatorio y profesor de astronomía de la Universidad. Matemáticamente predice que en los cristales biaxiales la refracción es cónica, lo cual es verificado experimentalmente.

1833 Presenta a la Academia Irlandesa un trabajo sobre los números complejos, considerándolos como un sistema algebraico abstracto de parejas ordenadas de números reales **a + bi = (a, b)** donde las operaciones o leyes de composición se definen de la siguiente manera:

Suma: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

Multiplicación: $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

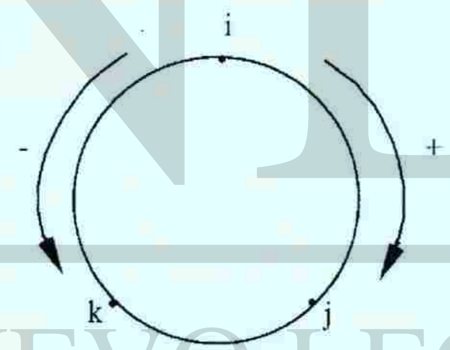
Los números reales están contenidos en este sistema en la forma **(a, 0)** y los números imaginarios puros también pertenecen al sistema como **(0, b).** Esta concepción abstracta de los complejos permite la posibilidad de extensión del sistema algebraico de los complejos a otro sistema similar que lo contenga.

1843 Observando que los números complejos son adecuados para el estudio de los vectores y las rotaciones del plano, Hamilton desarrolla un sistema algebraico para el estudio de vectores y las rotaciones en el espacio. Para el afecto, considera las cuaternas ordenadas de números reales, extendiendo la suma y multiplicación de los complejos para obtener un sistema algebraico similar con tres unidades imaginarias **i**, **j** y **k**.

Los cuaternios **Q** de Hamilton pueden presentarse en forma más objetiva y práctica que las cuaternas ordenadas de números reales, de la siguiente manera:

$$\left\{a + bi + cj + dk \,\middle|\, a, b, c, d \in R;\ i^2 = j^2 = k^2 = 1;\ ij = ji = k;\ jk = kj = i;\ ki = ik = j\right\}$$

La suma y multiplicación de cuaternios se definen como si fueran polinomios, con las reglas establecidas en **Q** para multiplicar las unidades imaginarias **i, j** y **k,** las cuales pueden establecerse objetivamente en términos de rotaciones de la siguiente manera:



En este sistema algebraico, la suma es asociativa y conmutativa, mientras que la multiplicación es asociativa y distributiva sobre la suma, pero no es conmutativa, por lo que por primera vez Hamilton libera al álgebra de su molde tradicional, creando un nuevo sistema algebraico que incluye en sus cursos desde 1843 y que fue publicado en 1853 con el título de ***Elementos de Cuaterniones***.

Hamilton trabajó el resto de su vida en una extensión de su obra sobre los cuaternios, pero este sistema pierde interés al desarrollarse el Análisis Vectorial del físico y matemático americano de la Universidad de Yale Josiah Willard Gibbs (1839 - 1903).

10.10 LAS ÁLGEBRAS LINEALES.

Los cuaternios de Hamilton, fueron generalizados casi simultáneamente, en 1844, por el matemático alemán Herman Günther Grassman (1809-1877) en su ***Tratado de hiper-complejos***, definidos como **$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$.**

Los **e_j** son las unidades de este sistema algebraico; una de ellas es 1, la unidad de los reales, las demás son imaginarias y las **x_j** son números reales. Las reglas para la multiplicación de los **e_j** pueden ser similares o diferentes a las de los cuaternios. Grassman orienta su tratado de hipercomplejos hacia la metafísica, por lo que tampoco tiene éxito, a pesar de que su sistema es mucho más general.

Lo que definitivamente viene a superar los esfuerzos de Hamilton y Grassman, es la creación de las álgebras matriciales en 1857, por el matemático inglés Arthur Cayley (1821 - 1895). Trabajando en su ***Teoría de los Invariantes***, Cayley define las matrices 2 * 2 para representar transformaciones lineales en el plano que llevan **P(x, y)** a **Q(x', y')** de la siguiente manera

$$(1)\quad \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

donde **a, b, c y d** son números reales. Esta transformación la representa con la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que se aplica al punto **P(x, y)** de manera que $AX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = X'$.

ARTHUR CAYLEY

Definiendo la multiplicación de 2 transformaciones como su aplicación sucesiva **$X(T_A \bullet T_B) = (XT_A)T_B = X''$**. Si **$T_B$** lleva **Q(x', y')** a **R(x'', y'')** de manera similar a **T_A**, se tiene

$$(2)\quad \begin{cases} x'' = ex' + fy' \\ y'' = gx' + hy' \end{cases}$$

donde **e, f, g y h** son números reales.

La matriz correspondiente a **T_B** es $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$. Entonces, el producto de las matrices debe ser la matriz del producto de las transformaciones que se obtiene sustituyendo **x'** y **y'** de **(1)** en **(2)** de lo cual resulta lo siguiente:

$$x'' = e(ax + by) + f(cx + dy) = (ea + fc)x + (eb + fd)y$$

$$y'' = g(ax + by) + h(cx + dy) = (ga + hc)x + (gb + hd)y$$

$$\therefore \quad (BA)X = B(AX) = BX' = X'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

debe ser $BA = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea+fc, & eb+fd \\ ga+hc, & gb+hd \end{pmatrix}$. Entonces, cada hilera de la matriz producto, se obtiene sumando los productos de los elementos de la correspondiente hilera del primer factor **B** por los correspondientes elementos de las columnas del segundo factor **A**.

La generalización a matrices **nXn**, con **$n \in N$**, de esta multiplicación no-conmutativa, proporciona una estructura de Álgebra Lineal para cada **n,** al definir suma y multiplicación por escalar de la siguiente manera:

$$A + B = (a_{ij})_{nXn} + (b_{ij})_{nXn} = (a_{ij} + b_{ij})_{nXn}$$

$$kA = k(a_{ij})_{nXn} = (ka_{ij})_{nXn}$$

Además para todo **m, $n \in$ N**, las matrices **mXn** proporcionan una estructura de Espacio Vectorial con la suma y la multiplicación por escalares de un campo cualquiera. De esta manera, las álgebras matriciales de Cayley proporcionaron mejores condiciones que los cuaternios de Hamilton y los hipercomplejos de Grassman, por lo que éstos se convierten rápidamente en reliquias históricas.

Los cuaternios son una curiosa estructura algebraica de las que ahora se llaman anillo de división no-conmutativo.

Las **álgebras de matrices**, nombre propuesto por Cayley, pueden ser consideradas como ampliaciones del concepto abstracto general de **espacio vectorial**, definido como un conjunto no-vacío **S** de elementos llamados vectores, con una relación de igualdad (equivalencia universal), una suma **+** tal que **(S,+)** es un grupo conmutativo, es decir, la suma es cerrada, asociativa, conmutativa, con identidad e inverso y una multiplicación por elementos de un campo llamados escalares, (por ejemplo, los números reales) que es asociativa, con unidad y distributiva sobre la suma de vectores y sobre la suma de escalares.

Agregando al espacio vectorial **(S, +, •)** una multiplicación de vectores **x** que sea asociativa y bilineal, es decir, distributiva sobre la suma por ambos lados, se tiene una estructura de Álgebra Lineal (S,+, •, x). Las múltiples aplicaciones de las álgebras lineales en todas las actividades profesionales actuales, a través de los modelos lineales y la investigación de operaciones, han obligado a incorporar a los planes de estudio, un curso de Álgebra Lineal conteniendo álgebras matriciales, espacios vectoriales y transformaciones lineales.

La ***Teoría de los Invariantes*** de Cayley proporcionó posteriormente a Félix Klein (1849 - 1925) la base para una geometría general y unificadora, de la cual la geometría euclidiana, la geometría hiperbólica y la geometría elíptica, son casos particulares. En esta geometría, como en el álgebra, agregando y quitando o modificando postulados, se obtienen diferentes geometrías que fueron codificadas por Klein en su famoso programa de la Universidad de Erlanger.

Otro campo de investigación matemática de Cayley es el estudio de las **Formas Cuadráticas** de **n** variables:

$$\mathbf{q(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j, \quad \text{donde } a_{ij} = a_{ji}.$$

En términos matriciales, si:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad A = (a_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

es una matriz simétrica y $\mathbf{X' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ es la transpuesta de **X:** $\mathbf{q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X'AX}$.

Las formas cuadráticas de Cayley son funciones polinómicas de **n** variables, simétricas y homogéneas de segundo grado, de gran utilidad en las matemáticas aplicadas de la actualidad.

10.11 GEORGE CANTOR (1845 – 1918)

George Ferdinand Ludwig Phillips Cantor nació en San Petersburgo, Rusia, en 1845, aunque sus padres eran holandeses. En 1856, su familia emigró a Frankfurt, Alemania. Su padre sugería que estudiara una carrera de ingeniería para especializarse en filosofía, física y matemáticas.

Cantor estudió en Zurich, Göttingen y Berlín, donde estuvo bajo la influencia de Weinstrass, obteniendo su Doctorado en 1869. Viajó a Holanda y realizó una larga carrera de 36 años, dedicados a la enseñanza en la Universidad de Halle, de 1869 a 1905. Allí falleció en una clínica psiquiátrica, en 1918. Sus primera investigaciones fueron en **Teoría de Números**, publicando varios artículos sobre esta materia, en 1867 y 1871.

En 1872 conoció en Suiza a Richard Dedekind, surgiendo una amistad entre ellos y, por consiguiente, una correspondencia de muchos años, con una notable influencia de la lógica profunda de Dedekind para que se desarrollaran las ideas de Cantor sobre Teoría de Conjuntos. En ese mismo año Dedekind publicó su definición de los números reales a través de las llamadas *Cortaduras de Dedekind.* Recordemos que en el año 370 A. C. Eudoxus resuelve el problema de los irracionales con su Teoría de Proporciones. Cantor investigó sobre series trigonométricas y publicó, en ese mismo año, un artículo definiendo los números irracionales en términos de secuencias convergentes de números irracionales

En 1873, Cantor demostró que los racionales son numerables, es decir, que pueden ponerse en correspondencia uno a uno con los números naturales.

En 1874 publicó un artículo que marca el nacimiento de la *Teoría de Conjuntos.* Aquí considera dos tipos de infinito: El de los números naturales y el de los reales. Al examinar el conjunto de los números reales, es decir, el conjunto de todas las raíces de todas las ecuaciones polinómicas con coeficientes enteros, demuestra que es numerable. En este mismo artículo demuestra que los números reales no pueden ponerse en correspondencia uno a uno con los números naturales, mediante un método complicado que mejoró en 1891.

De 1879 a 1884 publicó su ***Teoría de Conjuntos***, en seis partes, a pesar de la oposición de sus ideas, especialmente por parte de Kronecher. En 1883, en la quinta parte, presenta los conjuntos bien ordenados, los números ordinales, la suma y multiplicación de números transfinitos. En 1884 tiene su primera crisis mental.

En 1895 y 1897 publica su ***Tratado de la Teoría de Conjuntos***, con una introducción que parece un libro moderno de **Teoría de Conjuntos.** Su contribución al metalenguaje de las matemáticas es utilizada actualmente en todas las ramas de las matemáticas.

10.12 CONCLUSIÓN.

La evolución histórica de las matemáticas sigue una notable proliferación de largos caminos hasta nuestros días. Como ejemplos podemos citar los siguientes:

a). La lógica deductiva de Aristóteles, evoluciona con Leibniz en el siglo XVII y se formaliza a mediados del siglo XIX, empezando con George Boole (1815 - 1864), fundador de la **Lógica Simbólica,** y culmina con la obra de Bertrand Russell (1872 - 1970) con la colaboración de Alfred N. Whitehead (1861 - 1947), ***Principia Mathematica***, publicada en 1910, que presenta a la matemática fundamental, como una lógica.

b). La axiomática de la geometría euclidiana se formaliza y generaliza en las matemáticas, a fines del siglo XIX, empezando con Moritz Pasch (1843 - 1931) en su obra de 1882 ***Lecciones de Geometría Moderna***, que incluye un sistema de postulados para la exposición rigurosa de la Geometría Proyectiva. Después, Richard Dedekind (1831 - 1916) expone en 1888 un sistema de axiomas para fundamentar la aritmética. Simultáneamente, el matemático italiano Guiseppe Peano (1858 - 1932) presenta en 1899 sus ***Principios de la Geometría expuestos lógicamente*** y en 1891 sus ***Formularios Matemáticos*** conteniendo los ***Principios de la Aritmética***, a partir de un sistema de 9 postulados de los cuales, 5 de ellos fundamentan la construcción de los números naturales. David Hilbert (1862 - 1943) sistematiza el método axiomático en 1899 con su obra ***Fundamentos de la Geometría***, donde presenta un método universal y fecundo para toda la matemática. Convencido de la necesidad de problemas definidos en la investigación, Gilbert propone en su conferencia *Problemas de la Matemática,* presentada en el Congreso de París, en 1900, 23 problemas fundamentales que sirvieron de base para el desarrollo de gran parte de la investigación matemática del siglo 20.

Así como en los ejemplos mencionados, podríamos seguir con la aritmetización del análisis, la Teoría de Conjuntos con la formalización del metalenguaje de las matemáticas y la aritmética transfinita, el desarrollo de la Topología, etc. En 1945, cuando la electrónica hace posible la creación de las computadoras, se propicia el desarrollo de la Investigación de Operaciones (Optimización) y de gran cantidad de ramas de la ciencia donde se aplican las matemáticas, como la Física, la Astrofísica, etc. En todas estas direcciones, se presentan interesantes historias y biografías que deben darse a conocer en los cursos universitarios donde se manifiesta su presencia.

EJERCICIO 12. **EL SIGLO XIX.**

1. Expresar de una o más formas, los primeros **20** números naturales, como una suma de **4** ó menos números cuadrados. ¿Cuál es el que tiene el mayor número de representaciones de esta forma?

2. Encontrar los primeros **4** términos y determinar la convergencia o divergencia de las siguientes series:

2.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ Prueba de la razón.

2.2 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ Prueba de la integral.

3. Demostrar que las unidades de los complejos **1** é **i**, junto con sus inversos aditivos **-1** y **-i** constituyen un grupo abeliano finito bajo multiplicación. Construir la tabla de multiplicación.

4. Verificar que el conjunto de los números reales es un subconjunto de los complejos y que éste a su vez es un subconjunto de los cuaternios. Ilustrar esto con un diagrama de Venn.

5. Demostrar que la multiplicación de cuaternios no es conmutativa.

6. Mostrar que en el álgebra de las matrices reales 2X2, toda matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1+a \\ 1-a & -a \end{pmatrix}$, con $a \in R$ es una raíz cuadrada de la matriz identidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7.- Explique las siguientes paradojas del álgebra de los reales:

a). $2 > 1$. Multiplicando ambos miembros de la desigualdad por $\log(1/3)$:

$$2\log(1/3) > \log(1/3)$$

$$\therefore \quad \log(1/3)^2 > \log(1/3)$$

$$\therefore \quad (1/3)^2 = 1/9 > 1/3 \quad \textbf{(¡Absurdo!)}$$

b). $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ para todo $a, b \in R$.

$$\therefore \quad \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{1} = 1$$

Ahora $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = i \cdot i = i^2 = -1$

$$\therefore \quad 1 = -1 \quad \textbf{(¡Absurdo!)}$$

8. En 1906, Maurice Fréchet define **espacio métrico** como un conjunto no vacío **P** con una *distancia:* $d_{\overline{PQ}} \in R$ tal que para todo $P, Q, R \in P$:

1). $d_{\overline{PQ}} \geq 0$

2). $d_{\overline{PQ}} = 0$ **si y sólo si P = Q.**

3). $d_{\overline{PQ}} = d_{\overline{QP}}$

4). $d_{\overline{PQ}} + d_{\overline{QR}} \geq d_{\overline{PR}}$ (Ley del Triángulo).

Verificar que los números reales **R** con $d_{\overline{PQ}} = |P - Q|$ es un espacio métrico.

9. Mostrar que el conjunto de puntos del plano con $d_{\overline{PQ}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ para todo $P(x_1, y_1)$; $Q(x_2, y_2)$ es un espacio métrico.

10. Consideremos la geometría plana de Euclides limitada a los puntos del interior de un círculo con centro en **C** y radio **r**, donde las rectas son las intersecciones no-vacías del círculo con las rectas del plano euclidiano no-tangentes al círculo. Verificar que esta **geometría** es **hiperbólica** porque por un punto **P** fuera de la recta **L**, pasan un conjunto infinito de rectas, que no intersectan a **L** (Modelo de F. Klein).

Las Matemáticas de primer nivel universitario son indispensables para todo profesionista. El conocimiento de su origen, a través de los registros escritos de las primeras civilizaciones y su evolución histórica hasta el siglo XX, se presenta en 10 capítulos que incluyen ejercicios para cada curso semestral de Historia de las Matemáticas