Veamos los siguientes números en este sistema:

1,993 = X 𐅅 HHHH𐅄 ΔΔΔΔ I I I

20,530 = M M 𐅅 ΔΔΔ

2003= X X I I I

306 = HHH Γ I

No se requiere el cero para la representación escrita de los números y los numerales se escriben de izquierda a derecha de mayores a menores.

Otro sistema de agrupación simple que usaron los Griegos desde el año 450 A. C., es el sistema jónico o cifrado en el cual establecen numerales para cada uno de los conjuntos posibles de unidades de diferentes órdenes: 1, 2, 3, ...9, 10, 20, 30,....., 90, 100, 200, 300,....., 900. Los 27 numerales necesarios son las 24 letras mayúsculas del alfabeto griego más 3 letras obsoletas: S, Q, y A; además definen símbolos y reglas especiales para números grandes. Este sistema tiene la desventaja de que es necesario memorizar un conjunto grande de numerales, pero facilita las operaciones aritméticas comparado con otros sistemas de agrupación simple. Sistemas similares a este fueron utilizados por los Hebreos y los Sirios.

SISTEMA JÓNICO GRIEGO.

Numerales para 1,2,3,...,(b-1),b,2b,3b,....(b-1)b,b^2,$2b^2$,$3b^2$,..... (450 A. C.)

$1 \rightarrow \alpha$ __ Alfa	$60 \rightarrow \xi$ __ Xi
$2 \rightarrow \beta$ __ Beta	$70 \rightarrow o$ __ Omicron
$3 \rightarrow \gamma$ __ Gama	$80 \rightarrow \pi$ __ Pi
$4 \rightarrow \delta$ __ Delta	*$90 \rightarrow$ ϙ __ Koppa
$5 \rightarrow \varepsilon$ __ Epsilon	$100 \rightarrow \rho$ __ Ro
*$6 \rightarrow$ ς __ Digama	$200 \rightarrow \sigma$ __ Sigma
$7 \rightarrow \zeta$ __ Zeta	$300 \rightarrow \tau$ __ Tau
$8 \rightarrow \eta$ __ Eta	$400 \rightarrow \upsilon$ __ Upsilon
$9 \rightarrow \theta$ __ Teta	$500 \rightarrow \phi$ __ Phi
$10 \rightarrow \iota$ __ Iota	$600 \rightarrow \chi$ __ Chi
$20 \rightarrow \kappa$ __ Kappa	$700 \rightarrow \psi$ __ Psi
$30 \rightarrow \lambda$ __ Lamba	$800 \rightarrow \omega$ __ Omega
$40 \rightarrow \mu$ __ Mu	*$900 \rightarrow$ ϡ __ Sampi
$50 \rightarrow \nu$ __ Nu	

Obsoletas *.

Ejemplos: $15 = \iota\,\varepsilon$

$598 = \underline{\phi\,ϙ\,\eta}$

$613 = \chi\,\iota\,\gamma$

Los griegos representaban a los números por magnitudes geométricas. A partir de un origen en una recta y de una unidad de medida para el **1**, trasladaban sucesivamente esta medida con el compás sobre la recta para construir los números naturales o enteros positivos en una dirección y los enteros negativos en la otra dirección. Las fracciones $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ con **a** entero positivo o negativo y **b** número natural, las expresaban como múltiples enteros de fracciones unitarias $\mathbf{a}\left(\frac{1}{b}\right)$, adoptaban una unidad de medida para $\frac{1}{b}$ sobre una recta y la trasladaban a veces con el compás.

Durante un tiempo consideraron que todas las magnitudes geométricas podían construirse con un compás sobre una recta, a partir de una unidad de medida para $\frac{1}{n}$ con **n** en los naturales, es decir, que todos los segmentos de recta eran lo que ahora llamamos números racionales.

3. Números romanos. Sistema similar al griego, de agrupación simple base 10 con símbolos intermedios, representación decreciente horizontal, con cambio de orden en una pareja de símbolos para representar la resta del segundo menos el primero.

Numerales:

I	V	X	L	C	D	M	$\overline{M}$	$\overline{\overline{M}}$	$\overline{\overline{\overline{M}}}$
1	5	10	50	100	500	1,000	10,000	100,000	1´000,000

Ejemplo: Expresar en números romanos y sumar 365 y 1993

2,003 = MMIII

365 = CCCLXV

\+

<u>1 993 = MCMXCIII</u>

2 358 = MMCCCLVIII

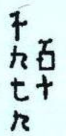
B) SISTEMAS MULTIPLICATIVOS. En los sistemas multiplicativos hay 2 conjuntos de símbolos: uno para las unidades simples 1, 2, 3,…(b - 1) y el otro para las unidades de orden b, b2, b3,…, bn,…

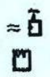
Los números que contienen conjunto de unidades de diferentes órdenes, se representan agrupando parejas formadas por un símbolo del primer conjunto con otro del segundo conjunto en orden descendente de las potencias de b, cuyo valor es la multiplicación de los numerales de cada pareja y el número es la suma de esto productos. Consideramos un ejemplo de un sistema de esta clase:

Sistema chino-japonés. Es un sistema multiplicativo de base 10 con los siguientes numerales:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1000
一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百	千

Ejemplos:

1979 = 

204 = 

En el primer ejemplo hay una sola unidad de millar por lo que no se requiere formar la pareja del 1 con el 1000 y el número se obtiene de arriba abajo como 1(1000) + 9(100) + 7(10) + 9 = 1979.

En el segundo ejemplo se observa que en estos sistemas tampoco se requiere el cero pues el número queda perfectamente expresado como 2(100) + 4 = 204.

C) SISTEMAS POSICIONALES. En los sistemas posicionales se utilizan numerales para los números menores que la base b incluyendo el cero, aún cuando los primeros sistemas de este tipo no tenían símbolo para el cero, estos resultaban deficientes y complicados en las operaciones. Entonces, se requieren símbolos para 0, 1, 2, 3,..., (b - 1).

Cada número natural es una sucesión ordenada de estos símbolos, permitiendo repeticiones, donde el primer símbolo de derecha a izquierda, representa unidades simples; el segundo, unidades de primer orden, es decir, es un múltiplo de **b**; El tercero es múltiplo de $\mathbf{b}^2$; de manera que la representación de un número por la sucesión: $a_n a_{n-1}....a_1 a_0$ corresponde a la suma: $a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_1 b + a_0$, es decir, es un polinomio de potencias de la base **b**. Esta representación es similar a la de los sistemas multiplicativos, pero en un sistema posicional no se requieren símbolos para las potencias de la base y la identificación de las unidades de diferentes órdenes la proporciona la posición de cada numeral en la sucesión ordenada.

Además, en un sistema posicional, es necesario el símbolo para el cero, para indicar la ausencia de unidades de determinado orden y conservar el valor posicional de los demás símbolos de la sucesión ordenada. Para los números fraccionarios se utiliza un punto que separa la parte entera de la parte fraccionaria en la sucesión ordenada, de manera que a la derecha del punto el primer símbolo corresponde a unidades de orden -1, es decir un múltiplo de la fracción unitaria $b^{-1} = \frac{1}{b}$, el segundo es un múltiplo de $b^{-2} = \frac{1}{b^2}$ etc.. En general se tiene lo siguiente:

$$a_n a_{n-1}...a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2}.... = a_n b^n + ... + a_1 b + a_0 + a_{-1} b^{-1} + ...$$

Para los negativos se antepone el signo (-) completando el sistema posicional de base ***b***.

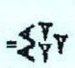
Consideremos algunos ejemplos:

1. Sistema Cuneiforme Babilonio. La antigua civilización Babilonia, alrededor del año 3000 A. C., empezó a registrar por medio de su escritura con caracteres en forma de cuñas, lo que consideraban importante.

Desde la segunda mitad del siglo pasado hasta la fecha se han desenterrado más de 500,000 tabletas de arcilla cocida grabadas, de las cuales 300 son exclusivamente matemáticas. De acuerdo con esta fuente de información, inventaron un sistema de numeración posicional base 60 sin cero, combinado con agrupación simple base 10 para los numerales necesarios. Los símbolos para los numerales del 1 al 59 eran los siguientes:

1 10

Además, utilizan el símbolo  para indicar restas y simplificar sus numerales. Por ejemplo:

23 =  49 = 

Para números mayores que 59, el sistema es posicional, base 60. Por ejemplo:

$$1993 = (33)(60) + 13 = \quad = (33,13)_{60}$$

$$2003 = 33\,(60) + 23 = (33,23)_{60} = \begin{matrix} \nabla & \nabla \\ \nabla & \nabla\nabla \\ \nabla & \end{matrix}$$

El sistema base 10 de agrupación simple para los numerales y la falta del cero dificulta la expresión escrita de los números y las operaciones aritméticas.

2. Sistema Maya. Los Mayas inventaron un sistema de numeración posicional base 20, combinado con agrupación simple, base 5, para los numerales. Este sistema es similar al de los babilonios pero tiene la importante diferencia de que incluye al cero en sus numerales. Los símbolos para obtener los numerales del 1 al 19 por agrupación simple, base 5, son los siguientes: 1 =. ; 5= --. Por ejemplo:

12= ‥ ═   6= · _   18 = ⋯ ≡

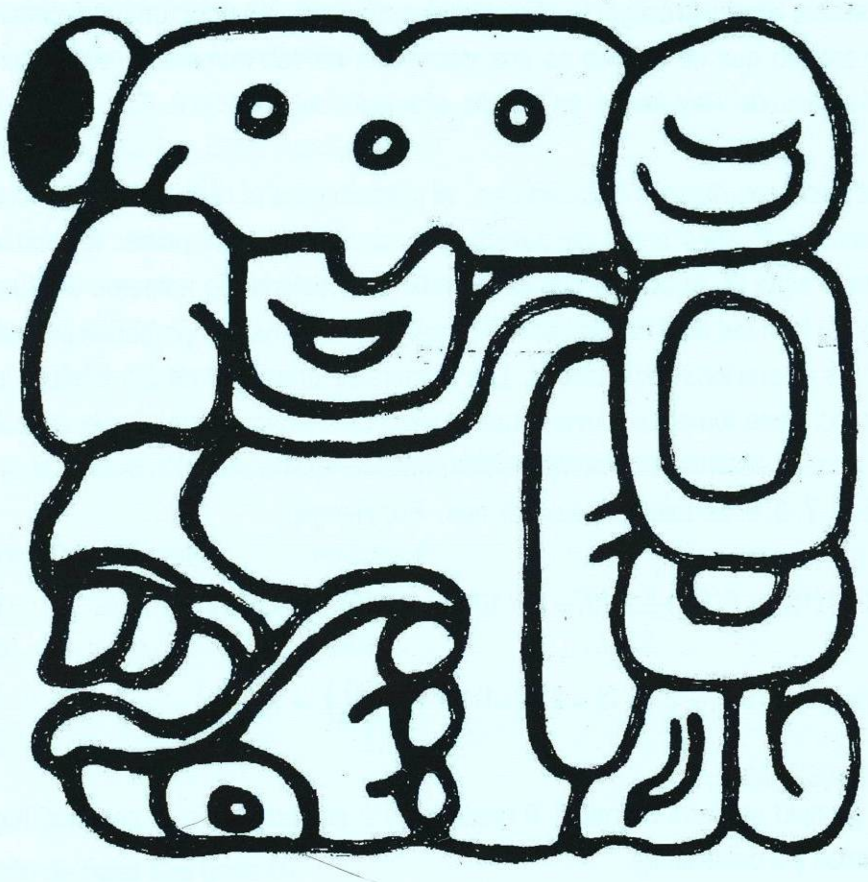
El símbolo para el cero es . Para los números mayores que 19 el sistema es posicional base 20, aunque en algunos registros aparecen las unidades de segundo orden como múltiplos de 18 (20). Por ejemplo, en el sistema puramente vigesimal:

$$1993 = 4(20^2) + 19(20) + 13 = \; = (4,19,13)_{20}$$

$$806 = 2(20^2) + 0(20) + 6 = \; = (2,0,6)_{20}$$

$2003 = (5, 0, 3)_{20}$ = -- ...

La importancia del cero en el sistema maya es un avance enorme, por lo que se le dedica una representación de complicados jeroglíficos para ser grabado en templos y palacios



Un cero maya, pintado en un mural de nuestra Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León.

3. Sistema Chino. Los chinos desarrollaron también un sistema de numeración posicional, base 10, con agrupación simple base 5 para los numerales del 1 al 9 sin el cero y con 2 símbolos para cada numeral que utilizaban según que el numeral ocupara posición par ó impar en la sucesión ordenada. Este sistema se llama Chino-Científico y no se sabe cuando lo empezaron a usar porque en la civilización China antigua como en la India, los Mayas y otras, las fuentes de información son escasas y no están debidamente ubicadas en el tiempo.

Posiciones impares:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
	I	II	III	IIII	IIIII	T	Π	╥	╥╥	0
Posiciones pares:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
	–	=	≡	≣	≣	⊥	⊥⊥	⊥⊥⊥	⊥⊥⊥⊥	0

4. Sistema Hindú-Arábigo. Es nuestro actual sistema posicional de números, base 10. El registro más antiguo que se conoce es una inscripción de sus numerales, sin incluir el cero, en las columnas del palacio del Rey Asoka, en la India, alrededor del año 250 A. C.

De acuerdo con algunos historiadores, el símbolo para el cero fue introducido por los hindúes aproximadamente 100 años antes de nuestra era, sin embargo, el primer registro escrito del cero aparece hasta el siglo IX, época en que se difundió este sistema de números en Europa a través de una traducción al latín del libro del árabe, Al-Khöwarizmi, en el que se proponen procesos sistemáticos para realizar las operaciones aritméticas. Los numerales originales de los hindúes evolucionaron a través del tiempo hasta tomar su forma actual al inicio del Renacimiento. Como en todos los sistemas posicionales, en este sistema cada número se expresa como una sucesión ordenada de sus numerales 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, permitiendo repeticiones. Por ejemplo:

$$1992 = 1(10^3) + 9(10^2) + 9(10) + 2 = 1000 + 9(100) + 9(10) + 2$$

$$21.32 = 2(10) + 1 + 3(10\text{-}1) + 2(10\text{-}2) = 2(10+1) + 1 + 3\left(\frac{1}{10}\right) + 2\left(\frac{1}{100}\right)$$

En el primer ejemplo se tiene un millar, 9 centenas y 2 unidades. En el segundo hay 2 decenas, 1 unidad, 3 décimas y 2 centésimas.

A partir del sistema Hindú-Arábigo decimal posicional, que ha sido adoptado casi universalmente, existen actualmente una gran variedad de sistemas de pesas y medidas de longitudes, áreas volúmenes y hasta en los sistemas monetarios, con diferentes bases para las unidades de agrupación, a pesar de los esfuerzos que se han realizado para establecer sistemas universales que faciliten la comunicación internacional en todo lo que se relaciona con números. Sin embargo, el hombre ha logrado considerables éxitos hasta la fecha, a partir de los números como instrumentos de cuantificación y medición de los fenómenos naturales y artificiales que permite, en algunos casos, expresarlos matemáticamente para su explicación y análisis y para su aprovechamiento en la obtención de objetivos determinados.

1.7 CAMBIO DE BASE.

Para obtener un número de nuestro sistema decimal posicional en otra base ***b*** cualquiera, se puede proceder como sigue:

Sea ***N*** el número en base 10 que queremos expresar en base ***b*** diferente de **10**:

1. Dividir ***N*** entre ***b*** para obtener: $N = q_1 b + \upsilon_1$; $0 \leq \upsilon_1 < b$ (1)
si $q_1 < b$, entonces N en base ***b*** $= (q_1 \upsilon_1)_b$

2. Si $q_1 \geq b$, dividir q_1 entre b para obtener:
$q1 = q_2 b + \upsilon_2$ (2)
$0 \leq \upsilon_2 < b$

Sustituyendo (2) en (1): $N = (q_2 b + \upsilon_2)b + \upsilon 1 = q_2 b^2 + \upsilon_2 b + \upsilon_1$
Si $q_2 < b \Rightarrow N = (q_2 \upsilon_2 \upsilon_1)_b$

3. Si $q_2 > b$, se requiere el proceso 2, hasta obtener un cociente $< b$.

Ejemplo: Expresar 198 en base 4:

$$\begin{array}{r} 49 \\ 4\overline{)198} \\ 38 \\ \underline{2} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 \\ 4\overline{)49} \\ 09 \\ \underline{1} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \underline{3} < 4 \\ 4\overline{)12} \\ \underline{0} \end{array}$$

$\Rightarrow 198 = (3012)_4$

Cambio de base b_1 a base b_2.

Primero, es conveniente pasar de la base b_1 a la base 10 y después a la base b_2

Ejemplo: $(132)_4 = 1(4^2) + 3(4) + 2$
$= 16 + 12 + 2$
$= 30$

Ahora expresamos 30 en otra base digamos 7: $\begin{array}{r} \underline{4} < 7 \\ 7\overline{)30} \\ \underline{2} \end{array}$

$(132)_4 = 30\ (42)_7$

De esta manera cambiamos el número $(134)_4$, de la base 4 a la base 7, obteniendo $(134)_4 = (42)_7$

Operaciones en una base cualquiera *b*:

Para operar con números en base b es útil tener tablas de suma y multiplicación en esa base.

Por ejemplo, las tablas de multiplicación y suma en base 7 son:

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	10
2	2	3	4	5	6	10	11
3	3	4	5	6	10	11	12
4	4	5	6	10	11	12	13
5	5	6	10	11	12	13	14
6	6	10	11	12	13	14	15

x	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	11	13	15
3	0	3	6	12	15	22	24
4	0	4	11	15	21	26	33
5	0	5	13	21	26	34	42
6	0	6	15	24	33	42	51

Ejemplo Sumar y multiplicar $(325)_7$ y $(164)_7$

Verificar transformándolos a base 10, hacer la operación y volver el resultado a base 7.

$$\begin{array}{r} (325)_7 \\ \underline{+\ (164)_7} \\ (522)_7 \end{array}$$

$166 + 95 = 261 \longrightarrow = (522)_7$

$(325)_7 = 3(7^2) + 2(7) + 5 = 147 + 14 + 5 = 166.$

$(164)_7 = (7^2) + 6(7) + 4 = 49 + 42 + 4 = 95.$

$$\begin{array}{r} (325)_7 \\ \underline{\times\ (164)_7} \\ 1636 \\ 2622 \\ \underline{325} \\ (63656)_7 \end{array} \qquad (166)(95) = 15770$$

$(63\,656)_7 = 6(7^4) + 3\,(7^3) + 6\,(7^2) + 5(7) + 6 = 15\,770$

Otro ejemplo: Tablas suma y multiplicación para base 4.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

x	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

Sumar y multiplicar: $(123)_4$ y $(201)_4$

$$\begin{array}{r} 123 \\ \underline{+\ 201} \\ (330)_4 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 201 \\ \underline{\times\ 123} \\ 1203 \\ 1002 \\ \underline{201} \\ (31\,323)_4 \end{array}$$

Comprobación:

$(123)_4 = 1(4^2) + 2(4) + 3 = 16 + 8 + 3 = 27$

$(201)_4 = 2(4^2) + 1 = 32 + 1 = \underline{33}$

60

Ahora:

$60 = (330)_4$

$(31323)_4 = 891 = (33)(27)$ L. C. D. C.

1.8 COMPUTACIÓN PRIMITIVA.

Los cálculos numéricos en los sistemas de numeración previos al sistema hindú-arábigo que utilizamos actualmente, enfrentaban dificultades derivadas de las siguientes limitaciones:

a) Limitaciones mentales, por los idiomas deficientes, sin alfabeto y reglas gramaticales que ordenaran el lenguaje. Además, los sistemas de numeración también eran deficientes, aunque algunos consideran que es cuestión de práctica y familiaridad para computar eficientemente en cualquier sistema.

b) Limitaciones físicas. Los medios para expresarse por escrito eran escasos y difíciles de producir manualmente. Algunos de los principales recursos en las primeras civilizaciones, son los siguientes:

TABLETAS DE ARCILLA COCIDA. Los Babilonios escribían sobre moldes de arcilla húmeda y suave que luego sometían al fuego.

PAPIROS. Los egipcios obtuvieron este material de la caña pappus cortada en tiras longitudinales que acomodaban horizontalmente, cruzadas con trozos de 20 a 40 centímetros, presionándolas piedra sobre piedra, se ponían a secar pegándose con la goma que soltaban. Después se pulían con piedra.

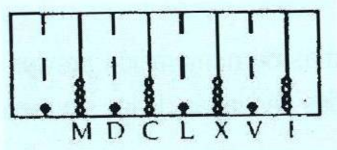
VITELA. Tela obtenida limpiando y secando piel de vaca, especialmente de fetos de becerros.

PERGAMINOS. Obtenidos de la piel de animales, especialmente ovejas.

PIZARRONES. *Pizarrones* de arena fueron usados desde la época de los griegos (700-200 A. C.) para cálculos numéricos y figuras geométricas. Tabletas de piedra se usaban para grabar registros importantes, desde las épocas prehistóricas. Hace unos 2000 años, los romanos utilizaron pequeños pizarrones con una delgada capa de cera, donde escribían con un estilete.

ÁBACOS. Para superar estas dificultades físicas y mentales, se inventaron los ábacos, empezando por el ábaco griego de arena, de piedra y de barro. Los ábacos aparecieron de diversas formas durante la edad media y constituyeron el primer dispositivo mecánico para cálculos numéricos utilizado por el hombre desde el período griego.

Ábaco Romano:



Ejemplo: Sumar:

2 534 + 1 837 = MMDXXXIV + MDCCCXXXVII
= MMMMCCCLXXI = 4 371

PAPEL. Por medios manuales, fue producido primeramente por los chinos de las cortezas de los árboles. Por medios mecánicos, se logró producirlo hasta 1850 y la imprenta de caracteres móviles fue inventada por Gütemberg en 1457. En China y Corea se realizaban impresiones mecánicas con linotipos de madera, desde el año 900. Los coreanos aseguran haber empleado moldes metálicos desde 1 240 D. C., pero casi no los usaron hasta alrededor de 1 450 D. C., cuando en Europa el alemán Gütemberg perfeccionaba la imprenta de caracteres móviles hechos de metal.

EJERCICIO 1. **SISTEMAS DE NUMERACIÓN**

1.1 Un paleontólogo mide una radioactividad de **0.05 = 5%** de la normal en vida, en un fósil humano. Determinar la antigüedad del fósil.

1.2 Aplicando la técnica del $\mathbf{C_{14}}$ se encuentra que un fósil humano tiene 110,000 años de edad. Cuál fue la radiactividad medida en el fósil r_t / r?

2. Escribir los números **375** y **1642** en jeroglíficos egipcios, numerales griegos, numerales romanos, cuneiformes babilonios y numerales mayas.

3. Sumar y multiplicar los números **28** y **63** en jeroglíficos egipcios y en numerales romanos.

4. Expresar en numerales mayas y sumar los siguientes números:
a) 45 y 318 **b) 1800 y 9531**

5. Probar que para multiplicar x por y, ambos entre **5** y **10**, podemos levantar **(x - 5) y (y - 5)** dedos en cada mano, sumar los dedos levantados para las decenas y multiplicar los dedos cerrados para las unidades.
Observación: Los dedos que quedan cerrados son: **(10 - x) y (10 - y).**

6. Construir tablas de suma y multiplicación para un sistema de números de base **5**. Expresar en esta base los números **1782 y 485.**

7. Sumar y multiplicar $\mathbf{(1332)_5}$ **y** $\mathbf{(342)_5}$. Verificar, transformando a base **10**, efectuando las operaciones y volviendo a base **5.**

8. Expresar $\mathbf{(31102)_4}$ en base **7**, transformando a base **10** y después a base 7.

9. Determinar para qué base es **2 x 3 = 10.** En qué base es **3 x 3 = 12.**

10. Demostrar que se puede pesar en una balanza simple de brazos iguales cualquier número entero **w** de kilos, disponiendo de pesas de $\mathbf{1, 2, 2^2, 2^3}$,..........kilos.

11. Demostrar que se puede pesar en una balanza simple de brazos iguales cualquier número entero **w** de kilos disponiendo de pesas de $1, 3, 3^2, 3^3$,..........kilos. Sugerencia: $\mathbf{2(3)^n = 3^{n+1} - 3^n}$

12. Si a alguien se le pide que piense un número de 2 dígitos, que multiplique el dígito de las decenas por 5, que le agregue 7, que lo multiplique por 2 y que le agregue el dígito de las unidades, probar que, restando 14 del resultado final, se obtiene el número original.