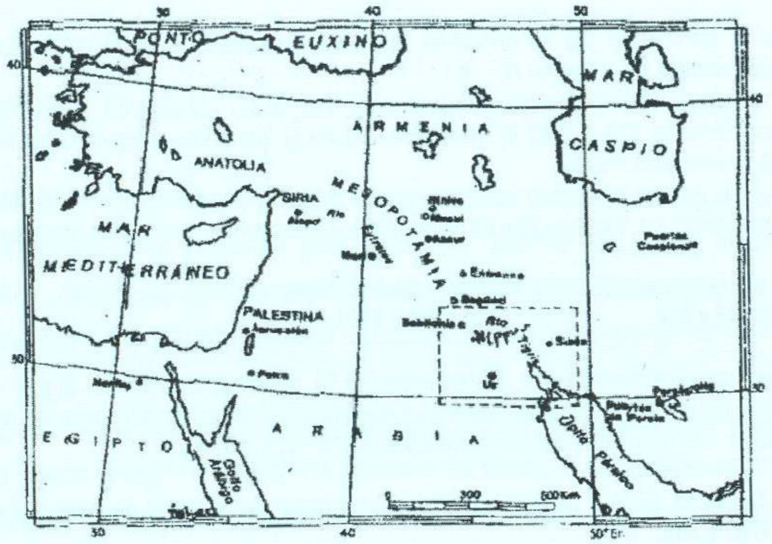
CAPÍTULO 2

MATEMÁTICAS DE LAS CIVILIZACIONES ANTIGUAS.



2.1 INTRODUCCIÓN.

Como ya hemos observado, las civilizaciones antiguas que dejaron registros perdurables son Babilonia y Egipto. De estos registros históricos, se han seleccionado aquellos que corresponden a Matemáticas, es decir, que contienen números y figuras geométricas y que plantean y resuelven problemas. Durante el cuarto milenio antes de nuestra era, aparecen casi simultáneamente en ambas civilizaciones, la escritura, el uso de la rueda y los metales, propiciando la necesidad de los números y las figuras geométricas para contar y medir. Es conveniente enfatizar que las Matemáticas de esta primera etapa son básicamente intuitivas y son impulsadas por necesidades prácticas. No se ha encontrado evidencia de demostraciones en las Matemáticas de estas civilizaciones, aún cuando encontraremos algunas fórmulas correctas ó aproximadas para resolver problemas.

2.2 BABILONIA (4500-600 A. C.)

Fuente principal. Desde la primera mitad del siglo XIX hasta la fecha, han sido desenterradas y clasificadas más de 500 000 tabletas de arcilla cocida, desde 5 x 5 hasta 40 x 40 centímetros. Las principales colecciones de estas tabletas se encuentran en los museos de París, Londres y Berlín y en

las Universidades de Yale, Columbia y Pensilvanya. Algunas están escritas por un solo lado, otras por ambos lados y hasta por los bordes redondeados. Aproximadamente 300 son de Matemáticas, tablas de operaciones, cuadrados, cubos, inversos y exponenciales.

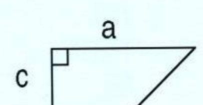
Interpretación. Clave descubierta por el inglés H. C. Rawlinson, en 1847, quien perfeccionó la clave anterior del alemán J. Gotefrend. Se han clasificado en 3 períodos:

a) Período Sumerio.	Hasta 3200 A. C.
b) Rey Hammurabi.	Hasta 2500 A. C.
c) Rey Nabucodonosor.	Hasta 600 A. C.

2.3 ARITMÉTICA Y GEOMETRÍA.

MATEMÁTICAS AGRARIAS Y COMERCIALES. Desde las tabletas más antiguas aparece el sistema posicional sexagesimal. Cálculos aritméticos de contabilidades, recibos, sistemas de pesas y medidas.

GEOMETRÍA. Áreas de triángulos rectángulos e isósceles. Trapecios con un lado perpendicular a los lados paralelos:



$$\mathbf{A = \frac{1}{2}\,(a + b)c}$$

La circunferencia del círculo de diámetro **d** la calculaban con la fórmula $\mathbf{C = 3d}$ y el área con la fórmula $\mathbf{A = \frac{1}{2}C^2}$ que corresponde a $\pi = 3$. Recientemente se encontró en una tableta $\pi = 3.125$.

Volúmenes de paralelepípedos rectángulos y de cilindros circulares.
Volúmenes de pirámides truncadas mal calculadas como la semi-suma de las bases por la altura.
División de la circunferencia en 360 partes.
Proporciones de triángulos semejantes.
Medida lineal de aproximadamente 12 kilómetros dividida en 30 partes de aproximadamente 400 metros cada una.

2.4 ÁLGEBRA.

Hacia el año 2000 A. C. los Babilonios desarrollaron un *Álgebra en prosa* para resolver ecuaciones de primer y segundo grado. Hay una tableta que contiene los cuadrados y los cubos de números naturales y su suma $\mathbf{n^3 + n^2}$ de $\mathbf{n = 1}$ a $\mathbf{n = 30}$, que permite resolver ecuaciones cúbicas de la forma $\mathbf{x^3 + x^2 = b}$, con **x** número natural, desde **b = 2** hasta **b = 27,900**. Una tableta de Yale del 1600 A. C. contiene problemas no resueltos de ecuaciones simultáneas. Por ejemplo:

$$\begin{cases} xy = 600 \\ 150(x-y) - (x+y)^2 = -1000 \end{cases}$$

La segunda ecuación se transforma en cuadrática en (x – y) sustituyendo la identidad:

$(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy; \quad xy = 600$

$150(x-y) - (x-y)^2 - 2400 + 1000 = 0$

$\therefore \quad (x-y)^2 - 150(x-y) + 1400 = 0$

Resolviendo para $(x-y)$ por factores, $(x-y-10)(x-y-140) = 0$

$\therefore \quad x - y - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y + 10$

o $\quad x - y - 140 = 0 \quad$ o $\quad x = y + 140$

Sustituyendo en $xy = 600$:

$(y+10)y = 600.$

$y^2 + 10y - 600 = 0.$ $\quad \boxed{\begin{matrix} y_1 = -30; & x_1 = -20 \\ y_2 = 20; & x_2 = 30 \end{matrix}}$

$(y+30)(y-20) = 0.$

Las otras 2 soluciones se encuentran con x = y + 140

En una tableta de 1600 A. C., en Yale, aparecen aproximaciones de raíces cuadradas que sugieren el uso de la fórmula.

$\mathbf{(a^2 + h)^{1/2} \approx a +} \dfrac{h}{2a}$ (Primeros 2 términos del desarrollo binomial).

Ejemplo:

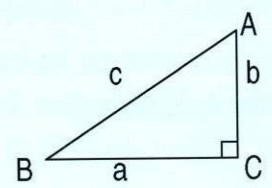
$\sqrt{26} = \mathbf{(5^2 + 1)^{1/2} \approx 5 +} \dfrac{1}{10} \mathbf{= 5.1}$

2.5 TRIGONOMETRÍA.

PLIMPTON 322. Tableta de la colección G. A. Plimpton, en la Universidad de Columbia, de 1900 A. C. descrita por Neugebauer en 1945. Está parcialmente destruida a derecha e izquierda, pero se aprecian claramente 3 columnas y la existencia de una 4ª semiborrada a la izquierda, todas ellas de números en el sistema sexagesimal. Las primeras 4 columnas son las que aparecen en la tableta y han sido completadas para encontrar una lista de 15 ternas pitagóricas correspondientes a ángulos B de un triángulo rectángulo del 45° al 31°

Definición: Una terna de números en N, (a, b, c), es pitagórica si corresponde a los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Es decir, si $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$.

a	b	c		u	υ	∠B
120	119	169	1	12	5	45°
3456	3367	4825	2	64	27	44
4800	4601	6649	3	75	32	43
13500	12709	18541	4	125	54	42
72	65	97	5	9	4	41
360	319	481	6	20	9	40
2700	2291	3541	7	54	25	39
960	799	1249	8	32	15	38
600	481	769	9	25	12	37
6480	4961	8161	10	81	40	36
60	45	75	11	2	1	35
2400	1679	2929	12	48	25	34
240	161	289	13	15	8	33
2700	1771	3229	14	50	27	32
90	56	106	15	9	5	31



2000 años después de que los Babilonios hicieron esta tableta, los árabes encontraron que las ternas de números (a, b, c) de forma: $a = 2u\upsilon$; $b = u^2 - \upsilon^2$ y $c = u^2 + \upsilon^2$ con $u > \upsilon \in N$ son pitagóricas porque:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (2uv)^2 + (u^2 - v^2)^2 \\ &= 4u^2v^2 + u^4 - 2u^2v^2 + v^4 \\ &= u^4 + 2u^2v^2 + v^4 \\ &= (u^2 + v^2)^2 = c^2 \end{aligned}$$

$\therefore$ (a, b, c) es una terna pitagórica (a, b y c son formas paramétricas de **u** y **v**).

Observación: Estas fórmulas para a, b, y c no proporcionan todas las ternas pitagóricas. Por ejemplo, la terna (9, 12, 15) es pitagórica porque $\mathbf{9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2}$.

Esta terna no se obtiene de las fórmulas dadas porque si $a = 12 = 2uv$, con $u > v$, se tiene:

$$12 = \begin{cases} 2(6.1) \rightarrow \begin{cases} u = 6 \quad (1) \\ v = 1 \end{cases} \\ 2(3.2) \rightarrow \begin{cases} u = 3 \quad (2) \\ v = 2 \end{cases} \end{cases}$$

De la 1ª alternativa, se obtiene:
$b = u^2 - v^2 = 36 - 1 = 35$; $b = 35$
$c = u^2 + v^2 = 36 + 1 = 37$; $c = 37$

Entonces, la terna de las fórmulas sería (12, 35, 37); $12^2 + 35^2 = 37^2$

De la 2ª alternativa: $u = 3$; $v = 2$:
tenemos: $b = 9 - 4 = 5$; $b = 5$
$c = 9 + 4 = 13$; $c = 13$
y la terna de las fórmulas sería (12, 5, 13) ; $12^2 + 5^2 = 13^2$

Todas las ternas de la tableta son pitagóricas y provienen de las fórmulas encontradas por los árabes con los valores de u y v que se dan a la derecha de la tabla.

Definición: Una ***terna pitagórica*** (a, b, c) es **primitiva** si el máximo común divisor de a, b y c es 1. Es decir si los números naturales de la terna son primos entre sí.

Las ternas pitagóricas de las fórmulas que estamos considerando son primitivas bajo ciertas condiciones sobre u y v, de acuerdo con el siguiente teorema:

Teorema: Las ternas pitagóricas de la forma: $a = 2uv$; $b = v^2$ y $c = u^2 + v^2$ con $u > v$, u y $v \in N$ son primitivas si y solo si $(u, v) = 1$ y u y v son de diferente paridad.

Demostración: 1ª Hipótesis

$$\begin{cases} a = 2uv \\ b = u^2 - v^2 \\ c = u^2 + v^2 \\ (a, b, c) = 1 \end{cases} \quad ; \quad u > v \in N$$

P.D. $\begin{cases} u \text{ y } v \text{ son de diferente paridad} \\ (u, v) = 1 \end{cases}$

Supongamos por reducción a lo absurdo que $(u, v) \neq 1$. Entonces existe $m > 1 \in N$ tal que:

$$\left.\begin{array}{l} m / u \\ \\ m / v \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m / a = 2uv \\ m / b = u^2 - v^2 \\ m / c = u^2 + v^2 \end{array}\right\} \Rightarrow (a, b, c) \neq 1 \text{ contra la hipótesis!}$$

$\therefore \quad (u, v) = 1$

Además, supongamos por reducción a lo absurdo que u y v son de la misma paridad:

Si u y v son pares: $\begin{cases} a = 2uv \\ b = u^2 - v^2 \\ c = u^2 + v^2 \end{cases}$ son pares

Si u y v son impares: $\Rightarrow$ a, b y c son pares.

$\therefore$ (a, b, c) $\neq 1$, contra la hipótesis original.
$\therefore$ u y v son de diferente paridad. L. C. D. D.

2ª Hipótesis

$$\begin{cases} a = 2uv \\ b = u^2 - v^2 \\ c = u^2 + v^2 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} (u, v) = 1 \\ u \text{ y } v \text{ diferente paridad} \\ \text{P. D. } (a, b, c) = 1 \end{array}$$

Supongamos, por reducción a lo absurdo, que $(a, b, c) \neq 1$

Entonces, existe **m** primo en **N** tal que **m / a, b y c**

$\therefore\ m / a + c = (u+v)^2 = (u+v)(u+v)$

$\therefore\ m / u+v$

Además: $m / a + b = (u-v)^2 \Rightarrow m / (u-v)$

$$\therefore \begin{cases} m / u+v \\ m / u-v \end{cases}$$

$$\therefore \overline{m / 2u\,;\, m / 2v}$$

$$\text{Si } m \neq 2 \Rightarrow \begin{cases} m / u \\ \\ m / v \end{cases} \Rightarrow (u-v) \neq 1, \text{ contra la hipótesis.}$$

$$\text{Si } m = 2 \Rightarrow \begin{cases} u+v = 2k_1 \\ \\ u-v = 2k_2 \end{cases}$$

$\therefore\ u$ y v son de la misma paridad, contra la hipótesis.

$\therefore (a, b, c) = 1$ L. C. D. C.

Con la excepción de las ternas de las hileras 11 y 15 de la tableta, todas las demás son primitivas. La tableta contiene una cuarta columna parcialmente destruida que corresponde a los valores de c/a que son las secantes del ángulo A. Estos hallazgos sugieren la conveniencia de examinar e investigar cuidadosamente las tabletas. Posiblemente se verá si existen o existieron otras tabletas como ésta correspondientes a los ángulos del 30° al 16° y del 15° al 1°.

2.6 EGIPTO. (3500 – 1000 A. C.)

Los egipcios de esta época no lograron un avance matemático tan notable como el de los babilonios, tal vez porque tenían menos problemas de ingeniería en su árido territorio, aislado de las rutas comerciales de las caravanas de las antiguas civilizaciones. Sin embargo, tuvieron que enfrentar los problemas de construir sus enormes pirámides para conservar los cuerpos de sus faraones y los registros principales de sus papiros, que de otra manera habrían sido destruidos, porque eran de material orgánico.

Para conservar los cuerpos de sus faraones, además de construir tumbas ocultas y selladas en las pirámides, desarrollaron técnicas de embalsamamiento consistentes en extraer la sangre y las vísceras, colocar el cuerpo en una plataforma de aproximadamente 2 metros de altura, cubiertos con una capa de 1cm. de sal y así exponerlos al sol durante un mes para deshidratarlos y después cubrirlos con vendas impregnadas con sustancias químicas conservadoras.

Además, fabricaban ataúdes herméticos y sellados, que se depositaban en las tumbas ocultas y también selladas en sus pirámides. Hay una gran cantidad de papiros y otros registros que proporcionan información sobre el avance matemático egipcio en esta época, pero los más importantes son los siguientes:

FUENTES DE DATOS:

1. 3100 A. C. Escudo Real Egipcio, grabado con números grandes relativos a batallas victoriosas. Actualmente en el museo de Oxford, en Inglaterra.

2. 2900 A. C. Construcción de la Gran Pirámide de Gizeh con 2´000,000 de bloques colocados en un área de aproximadamente 5 hectáreas (50,000 Mts2).

En promedio, cada bloque pesa 2.5 toneladas y fueron llevados de un banco situado del otro lado del Río Nilo. Los techos de las cámaras son de bloques de granito de 8.25 mts de largo por 1.25 mts de espesor y 54 toneladas de peso cada uno. La base es cuadrada con un error relativo en sus lados, menor que 1/14,000 y, en los ángulos de sus esquinas, menor que 1/27,000. El trabajo fue realizado por 100,000 hombres durante 30 años.

***3. 1850 A. C. a)** El papiro de Moscú de 8 cms por 5.44 mts, con 25 problemas, fue publicado en 1930.

b) El más antiguo sextante para observaciones astronómicas, actualmente en el museo de Berlín.

***4. 1650 A. C.** El papiro Rhind, especie de manual con 85 problemas, fue publicado en 1927, después de haber sido obtenido por el Inglés Henry Rhind en Luxor, Egipto y se encuentra en el museo Británico.

5. 1500 A. C. a) El más grande obelisco existente, en Tebas, frente al Templo del Sol. Tiene base cuadrada de 3 metros, una altura de 33 metros y pesa 430 toneladas.

b) El más antiguo sextante para mediciones basadas en los movimientos del Sol, actualmente en Berlín.