6. 1350 A. C. El papiro Rollins, actualmente en el museo del Louvre, en París, contiene contabilidades con números grandes sobre fabricación de pan.

7. 1167 A. C. El papiro Harris, preparado por el faraón Ramsés IV, contiene inventarios sobre las riquezas de Egipto y los trabajos realizados por su padre Ramsés III.

Fuentes de datos más recientes muestran un retroceso en la cultura matemática de Egipto.
* Son los más importantes.

2.7 ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA.

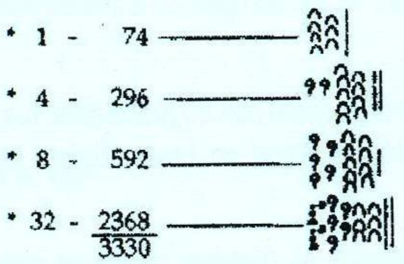
Los 110 problemas de los papiros de Moscú y Rhind son numéricos y la mayoría son de origen práctico y muy simple. El carácter aditivo de su sistema de numeración, les permitió desarrollar un algoritmo para multiplicar 2 números por duplicación de uno de los factores y sumando aquellos que correspondan a la expresión del segundo factor en base **2**, es decir como una suma de potencias de 2. Por ejemplo, para multiplicar (45) por (74)

$$(45)_2 = 101101 = 1 + (2)^2 + 1(2)^3 + 1(2)^5$$

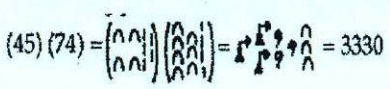
$$= 1 + 4 + 8 + 32$$

$$\therefore \quad (45)74 = (1 + 4 + 8 + 32)74$$

$$= 74 + 4(74) + 8(74) + 32(74)$$



En numerales egipcios:



Las fracciones las descomponen en sumas de fracciones unitarias $\frac{1}{n}$ = *n*. Esto sería por ejemplo: $\frac{1}{3}$ = , $\frac{1}{10}$ = ; $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ = Λ

Hay una excepción para la fracción 1 / 2 representada a veces por $\frac{1}{2}$ =

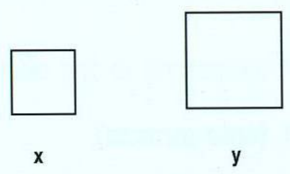
Problemas sobre mezclas para alimento de ganado y almacenamiento de granos que conducen a ecuaciones lineales resueltas por el método de falsa posición (tanteos).

Por ejemplo, para resolver la ecuación: $2\chi - \frac{x}{8} = 60$, se intenta con x = 8:

$$2(8) - \frac{8}{8} = 16 - 1 = 15 = \frac{1}{4}(60)$$

$$\therefore \; x = 4(8) = 32 \text{ resuelve la ecuación } 2(32) - \frac{32}{8} = 64 - 4 = 60$$

En un papiro de 1950 A. C. se encuentra el siguiente problema: "Una superficie de 100 unidades de área es la suma de 2 cuadrados cuyos lados son uno al otro como 1: $\frac{3}{4}$". La solución para los lados sería:

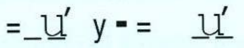


$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 = 10^2 & (2) \\ x = \tfrac{3}{4} y & (1) \end{cases}$$

Por el método de falsa posición tenemos en (1) y = 4; x = 3

Sustituyendo en (2) $\quad 9 + 16 = 25 = \frac{1}{4}(100) = (\frac{1}{2}(10)2)$

$\therefore \quad y = 2(4) = 8; \quad x = 6$ es la solución.

En el papiro Rhind están los símbolos para **+** =  y **-** = ,el positivo son unos pies caminando hacia la izquierda, sentido en que escribían los egipcios.

2.8 GEOMETRÍA.

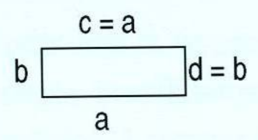
26 de los 110 problemas de los papiros Rhind y de Moscú son geométricos, la mayoría se refieren a cálculo de áreas de terrenos y volúmenes de graneros y pirámides. Calculan el área de un círculo con la fórmula aproximada:

$$A = \left[\frac{8}{9}d\right]^2$$

El volumen de un cilindro lo calculan bien como el área de la base por la altura.

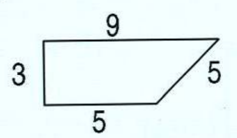
El área de un cuadrilátero la calculan como:

$\mathbf{A = \frac{1}{4}(a + c)(b + d)}$, fórmula correcta para rectángulos porque



$$A = \frac{1}{4}(a + c)(b + d) = \frac{1}{4}(2a)(2b) = ab$$

En cambio, para un trapecio resulta falsa. Por ejemplo:



$A = \frac{1}{2}(5 + 9) * (3) = 21$ (área correcta)

La fórmula egipcia resulta:

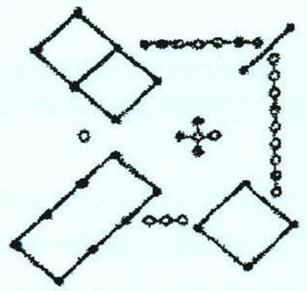
$A = \frac{1}{4}(5 + 9)(3 + 5) = 28$ (error de 7 unidades cuadradas)

En el papiro de Moscú calculan el volumen de una pirámide truncada con la fórmula correcta $\mathbf{V = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)\,h}$. Esta fórmula la obtuvieron posiblemente por disección de la pirámide.

2.9 CHINA.

Las fuentes originales de la civilización china antigua se perdieron cuando el año 213 A. C. el emperador Shi – Huang - Ti ordenó que se quemaran todos los libros para iniciar una nueva civilización excepto los de medicina, agricultura y adivinación. Para evitar las invasiones de los bárbaros del norte, construyó LA GRAN MURALLA, más de 6,000 kms de 6 mts de altura, serpenteantes en unos 2,400 kms, 25,000 torres de vigilancia de 12 mts de altura, cada 200 mts. Participaron en la obra más de un millón de trabajadores, decenas de miles de ellos murieron y fueron sepultados en la muralla junto con la mayoría de la élite intelectual de la época. Este emperador unió al gran territorio de China.

CUADROS MÁGICOS Uno de los libros más antiguos de la matemática china es el I - King en el cual aparece una figura llamada lo - Shu con el más antiguo cuadro mágico conocido: Los Números del 1 al 9 con los pares en las esquinas y el 5 en el centro



Se dice que este dibujo fue encontrado por el emperador Yu, 2200 A. C., grabado en una tortuga a orillas del Río Amarillo (Hoang - Ho).

Definición: Un cuadro mágico de orden **n** es un arreglo en **n** hileras y **n** columnas de enteros positivos, tal que la suma de cualquier hilera, columna o diagonal mayor es la misma cantidad, llamada la constante mágica:

$$C = \frac{1}{2}n\,(n^2 + 1)$$

Definición: Un cuadro mágico de orden **n** es normal si los $\mathbf{n^2}$ números naturales que contiene son los primeros: 1, 2, 3,..., n^2.

El cuadro de la figura lo - Shu es mágico normal de orden 3.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

15 15 15 15

$C = (½)n\,(n^2 + 1)$

$(1/2)\,(3(9 + 1)$

$= (1/2)\,(3(10))$

$= 15$ Todas las hileras, columnas y diagonales principales suman 15

El francés De la Louberé encontró en Siam un método simple para construir cuadros mágicos de orden impar que consiste en lo siguiente:

1. Empezar con el 1 en la celda central de la hilera superior. Proceder de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba en diagonal con los números naturales en orden hasta salir del cuadro

2. Si se sale por arriba, colocar el número que sigue en la celda inferior de la columna inmediata a la derecha, para continuar.

3. Si se sale por la derecha, colocar el número en la primera celda de la hilera inmediata hacia arriba, para continuar.

4. Cuando se encuentre una celda ya ocupada, seguir con la celda inmediata inferior al último número colocado. La esquina superior derecha fuera del cuadro, se considera como una celda ocupada.

Por ejemplo, para n = 7

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

$$C = \frac{1}{2}\,n\,(n^2 + 1) = \frac{1}{2}\,7((50) = 175$$

En 1514, el pintor alemán Albrecht Dürer realizó su grabado ***Melancolía*** en el que hay un cuadro mágico normal de orden 4:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

$$C = \frac{1}{2}\,n(n^2 + 1) = \frac{1}{2}\,(4)(17)$$

$C = 34$ Todas sus hileras, columnas y diagonales mayores suman 34.

Las celdas centrales de la hilera inferior dan la fecha del grabado: 1514.

Además se pueden verificar las siguientes propiedades:

1. La suma de los cuadrados de los números que están en las primeras 2 hileras es igual a la suma de los cuadrados de los números que están en las últimas 2 hileras.

2. La suma de los cuadrados de los números da las hileras 1 y 3 es igual a la suma de los cuadrados de los números que están en la 2ª y 4ª hilera.

3. La suma de los números que están en las diagonales mayores es igual a la suma de los números que están fuera de estas diagonales.

4. La suma de los cuadrados y de los cubos de los números de las diagonales mayores son respectivamente iguales a la suma de los cuadrados y los cubos de los números que no están en estas diagonales.

5. La suma de los elementos extremos de la diagonal principal, es igual a la suma de los extremos de la diagonal secundaria.

6. La suma de los elementos centrales de la diagonal principal, es igual a la suma de los elementos centrales de la diagonal secundaria.

7. El intercambio de hileras o columnas extremas o centrales producen nuevos cuadros mágicos normales.

Hay un procedimiento de origen desconocido para elaborar cuadros mágicos normales de orden múltiplo de 4, que consiste en lo siguiente:

1. Cruzar con línea suave todas las diagonales mayores de los bloques de 4 x 4 celdas diferentes que se forman, de izquierda a derecha y de arriba abajo.

2. Contar con los números naturales 1, 2, 3, ... las celdas del cuadro de izquierda a derecha, empezando con la esquina superior izquierda hasta completar la primera hilera y siguiendo de la misma manera con las hileras que siguen, colocando el número que le corresponda, en las celdas que no estén cruzadas.

3. Contar con los números naturales 1, 2, 3, ... empezando con la celda inferior derecha y en sentido inverso al anterior, colocando el número que le corresponda, en las celdas cruzadas.

Por ejemplo, para n = 4;

$C = \frac{1}{2}(4)(17) = 34.$

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Otro ejemplo para n = 8; $\frac{1}{2}(8)(65) = 260 = C$

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

Una regla para determinar cuadros mágicos no-normales de orden impar mayor que 3, es la siguiente:

1. Colocar en la primer hilera los números naturales: a, 2a, 3a,…, na.

2. En la segunda hilera repetir esto números, empezando por el que sigue al elemento de la celda central en la primera hilera, es decir, se empieza con $\frac{1}{2}(n + 3)$ a, siguiendo el mismo orden cíclico.

$$\frac{1}{2}(n + 3)\,a,\ \frac{1}{2}(n + 5)a,\ \ldots,\ na,\ a,\ 2a,\ \ldots,\ \frac{1}{2}(n + 1)a.$$

3. Repetir este proceso a partir de la segunda hilera, para obtener la tercera y así sucesivamente. Para estos cuadros: $\mathbf{C = \sum_{i=1}^{n} ia = a\sum_{i=1}^{n} i}$

$$\therefore\ \mathbf{C = \frac{n(n+1)}{2}a}$$

Por ejemplo, para n= 5 y a = 1, se tiene:

1	2	3	4	5
4	5	1	2	3
2	3	4	5	1
5	1	2	3	4
3	4	5	1	2

Todas las hileras, columnas y diagonales principales suman 15

$C = \sum_{i=1}^{n} i = 15$

Observación: Las simetrías del cuadrado $\{ I, R_{90}, R_{180}, R_{270}, H, V, D, D^1\}$ proporcionan 7 nuevos cuadros mágicos normales, a partir de un cuadro mágico normal de orden **n**.

Por ejemplo para n= 3, a partir del cuadro lo – Shu:

I=

4	9	2
3	5	7
8	1	6

; R_{90}=

8	3	4
1	5	9
6	7	2

; R_{180}=

6	1	8
7	5	3
2	9	4

R_{270}=

2	7	6
9	5	1
4	3	8

; H =

8	1	6
3	5	7
4	9	2

; V=

2	9	4
7	5	3
6	1	8

$$D=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 3 & 8 \\ \hline 9 & 5 & 1 \\ \hline 2 & 7 & 6 \\ \hline \end{array} \quad ; \qquad D^1=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 6 & 7 & 2 \\ \hline 1 & 5 & 9 \\ \hline 8 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

EJERCICIO 2. **BABILONIA (4000 - 600 A. C.).**

1. Demostrar la formula que usaron los Babilonios para el área de un trapecio con uno de los lados perpendicular a los lados paralelos: $\mathbf{A = \frac{1}{2}(a + b)c}$. Encontrar el área para **a = 8**; **b = 5** y **c = 3**, perpendicular a **a** y **b**.

2. Verificar que el valor de π es **3** en la fórmula babilónica para el área de un círculo: $\mathbf{A = \frac{1}{12} C^2}$.

3. Encontrar el error que tenían los Babilonia al calcular el área de un círculo de radio 4, considerando que calculaban **C = 3d**.

4. En una tableta que se encuentra en el Museo de Louvre, en Francia, se calcula el tiempo necesario para duplicar una cierta cantidad **Co** a un interés compuesto anual del 20%. Resolver este problema con la fórmula actual $\mathbf{C1 = Co\,(1 + r)^t}$

5. Calcular $\mathbf{(1{\cdot}2)^3}$ y $\mathbf{(1{\cdot}2)^4}$ y por interpolación lineal obtener **x** tal que: $\mathbf{(1{\cdot}2)^x = 2}$. Este fue el resultado obtenido por los babilonios en el problema anterior.

6. Resolver el siguiente problema de una tableta babilonia de 1800 A. C. El lado de un cuadrado es **2/3** del lado de otro cuadrado, menos **10**. Si la suma de las áreas de los **2** cuadrados es **1000**, encontrar los lados de los cuadrados.

7. Resolver el siguiente problema similar a los que aparecen en una tableta Babilonia: Encontrar los lados del rectángulo de área **1** y semiperímetro **4**.

8. Una tableta Babilonia contiene una tabla de valores de $\mathbf{n^3 + n^2}$ que sugiere la solución de algunas ecuaciones cúbicas.
Construir una tabla de $\mathbf{n^3 + n^2}$ de **n = 1** a **n = 10** y resolver la ecuación cúbica $\mathbf{(x - 1)^3 + 4x^2 - 3x - 391 = 0}$

9. Un problema Babilonio de 1800 A. C. plantea el siguiente sistema de ecuaciones: $xyz + xy = \frac{7}{6}$; $y = \frac{2}{3}x$; $z = 12x$. Resolver este sistema usando la tabla del problema anterior.
sugerencia: Eliminar y y z por sustitución en la primera ecuación y sustituir $\mathbf{x = (1/12)m}$

10. Neugebauer opina que los Babilonios pudieron haber encontrado la igualdad: $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \sum_{i=1}^{n} i^2$ para varios valores de n. Probar por inducción matemática que esta fórmula es válida para todo **n** entero positivo.

11. Encontrar la raíz cuadrada de **66** aplicando la fórmula de aproximación de los babilonios $\mathbf{(a^2 + h)^{1/2} \approx a + \frac{h}{2a}}$

EJERCICIO 3. **EGIPTO (3500-1000 A. C.)**

1. Multiplicar **137** por **48** aplicando el algoritmo de duplicación de los egipcios.

2. En un papiro de 800 A. C., se encuentran descomposiciones de fracciones en suma de fracciones unitarias de fórmula $\frac{z}{pq} = \frac{1}{pr} + \frac{1}{qr}$ donde $r = \frac{p+q}{z}$ Demostrar que esto es correcto.

3. Descomponer en suma de fracciones unitarias las fracciones $\frac{2}{7}$ y $\frac{3}{8}$ aplicando la fórmula del problema anterior.

4. Resolver la ecuación $3x - \frac{x}{5} = 42$ por el método de falsa posición de los egipcios.

5. En el papiro Rhind se calcula el área de un círculo con la fórmula $A = \left[\frac{8}{9}d\right]^2$. Encontrar el valor de π que resulta de esta fórmula.

6. Calcular el área de un círculo de radio r = 5 con la fórmula egipcia y encontrar el error que se comete, calculando el valor correcto con $A = \pi r^2$

CHINA (Cuadros Mágicos)

7. Demostrar que la constante de un cuadro mágico normal de orden **n** es $C = \frac{n(n^2+1)}{2}$. Encontrar **C** para los cuadros mágicos normales de orden **7, 9 y 16**.

8. Demostrar que el número en la celda central de un cuadro mágico normal de orden **3**, debe ser **5**.

9. Construir un cuadro mágico normal de orden **5**.

10. Construir un cuadro mágico normal de orden **12.**

11. Encontrar una fórmula para la constante mágica de los cuadros no-normales de orden impar mayor que **3**, descritos al final de este capítulo.

12. Construir un cuadro mágico no-normal de orden **7**, con la regla dada para **n** impar mayor que **3**, para **a = 1**.

13. Encontrar los **7** cuadros mágicos normales, a partir del cuadro mágico de Dürer, correspondientes a las simetrías del cuadrado.

14. Demostrar que se puede encontrar un conjunto infinito de cuadros mágicos no-normales, a partir de un cuadro mágico cualquiera.

CAPÍTULO 3

GRECIA. LOS PITAGÓRICOS

3.1 NUEVA CIVILIZACIÓN

Alrededor del año 800 A. C., surge una nueva civilización en la costa oeste de Asia Menor, Grecia e Italia, impulsada por los siguientes sucesos:

1. Egipto y Babilonia pierden su poderío y surgen como nuevas potencias los Griegos, Hebreos, Fenicios y Asirios.
2. Se inicia la Edad de Hierro, mejorando todo lo relacionado con herramientas.
***3.** Se inventa el alfabeto, permitiendo la formalización de la comunicación oral y escrita.
4. Se establecen sistemas de monedas, facilitando el comercio interno e internacional.
5. Se hacen descubrimientos geográficos, estimulando la navegación y el comercio.

3.2 TALES DE MILETO

Notable personaje, del Siglo VI A. C. considerado como el iniciador de la matemática demostrativa a través del método deductivo en la Geometría. También se le reconoce como el iniciador de la Física Formal.

En Geometría, cambia la intuición y las verificaciones empíricas por razonamientos lógicos, estableciendo los siguientes resultados:

1. Los círculos son bisectados por cualquiera de sus diámetros.

2. Los ángulos base de un triángulo isósceles son iguales.

3. Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.

4. Dos triángulos son congruentes si tienen un lado y sus ángulos adyacentes respectivamente iguales.

5. Todo ángulo inscrito en un semi círculo es recto.