EJERCICIO 3. **EGIPTO (3500-1000 A. C.)**

1. Multiplicar **137** por **48** aplicando el algoritmo de duplicación de los egipcios.

2. En un papiro de 800 A. C., se encuentran descomposiciones de fracciones en suma de fracciones unitarias de fórmula $\frac{z}{pq} = \frac{1}{pr} + \frac{1}{qr}$ donde $r = \frac{p+q}{z}$ Demostrar que esto es correcto.

3. Descomponer en suma de fracciones unitarias las fracciones $\frac{2}{7}$ y $\frac{3}{8}$ aplicando la fórmula del problema anterior.

4. Resolver la ecuación $3x - \frac{x}{5} = 42$ por el método de falsa posición de los egipcios.

5. En el papiro Rhind se calcula el área de un círculo con la fórmula $A = \left[\frac{8}{9}d\right]^2$. Encontrar el valor de π que resulta de esta fórmula.

6. Calcular el área de un círculo de radio r = 5 con la fórmula egipcia y encontrar el error que se comete, calculando el valor correcto con $A = \pi r^2$

CHINA (Cuadros Mágicos)

7. Demostrar que la constante de un cuadro mágico normal de orden **n** es $C = \frac{n(n^2+1)}{2}$. Encontrar **C** para los cuadros mágicos normales de orden **7, 9 y 16**.

8. Demostrar que el número en la celda central de un cuadro mágico normal de orden **3**, debe ser **5**.

9. Construir un cuadro mágico normal de orden **5**.

10. Construir un cuadro mágico normal de orden **12.**

11. Encontrar una fórmula para la constante mágica de los cuadros no-normales de orden impar mayor que **3**, descritos al final de este capítulo.

12. Construir un cuadro mágico no-normal de orden **7**, con la regla dada para **n** impar mayor que **3**, para **a = 1**.

13. Encontrar los **7** cuadros mágicos normales, a partir del cuadro mágico de Dürer, correspondientes a las simetrías del cuadrado.

14. Demostrar que se puede encontrar un conjunto infinito de cuadros mágicos no-normales, a partir de un cuadro mágico cualquiera.

CAPÍTULO 3

GRECIA. LOS PITAGÓRICOS

3.1 NUEVA CIVILIZACIÓN

Alrededor del año 800 A. C., surge una nueva civilización en la costa oeste de Asia Menor, Grecia e Italia, impulsada por los siguientes sucesos:

1. Egipto y Babilonia pierden su poderío y surgen como nuevas potencias los Griegos, Hebreos, Fenicios y Asirios.
2. Se inicia la Edad de Hierro, mejorando todo lo relacionado con herramientas.
***3.** Se inventa el alfabeto, permitiendo la formalización de la comunicación oral y escrita.
4. Se establecen sistemas de monedas, facilitando el comercio interno e internacional.
5. Se hacen descubrimientos geográficos, estimulando la navegación y el comercio.

3.2 TALES DE MILETO

Notable personaje, del Siglo VI A. C. considerado como el iniciador de la matemática demostrativa a través del método deductivo en la Geometría. También se le reconoce como el iniciador de la Física Formal.

En Geometría, cambia la intuición y las verificaciones empíricas por razonamientos lógicos, estableciendo los siguientes resultados:

1. Los círculos son bisectados por cualquiera de sus diámetros.

2. Los ángulos base de un triángulo isósceles son iguales.

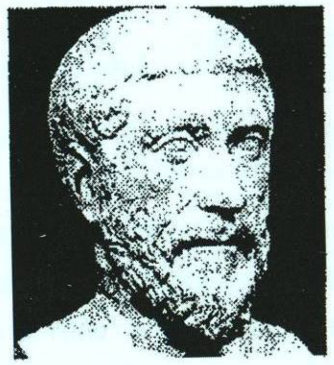
3. Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.

4. Dos triángulos son congruentes si tienen un lado y sus ángulos adyacentes respectivamente iguales.

5. Todo ángulo inscrito en un semi círculo es recto.

Tales fue respetado como ingeniero, comerciante, maestro, filósofo, astrónomo y matemático. Está considerado como uno de los 7 sabios de la antigüedad.

3.3 PITÁGORAS Y LOS PITAGÓRICOS.



La fuente principal de información sobre Tales y Pitágoras es el ***Compendio Eudemiano***, historia de la Geometría Griega hasta 335 A. C., escrito por Eudemus, ampliado y analizado por Proclus el año 500 D. C.

Pitágoras nació en la isla de Samos el año 572 A. C., estudió con Tales de Mileto. Emigró al puerto griego de Crotona, en el sureste de Italia, donde fundó la Escuela Pitagórica de estudios de Filosofía, Matemáticas y Ciencias Naturales que dio lugar a una fraternidad que practicaba ritos religiosos. La enseñanza era oral e incluía un cuadro básico de materias, llamado Cuadrivium compuesto por Aritmética, Geometría, Astronomía y Música. Otro grupo de materias llamando Trivium completaba la educación de sus miembros o alumnos. En este grupo se estudiaba Gramática, Lógica y Retórica.

Murió a los 80 años y se dice que la fraternidad de los pitagóricos se volvió tan elitista y aristocrática, que las fuerzas democráticas destruyeron el edificio de la escuela y dispersaron la sociedad que se había mantenido durante 2 siglos, después de la muerte de Pitágoras.

3.4 ARITMÉTICA PITAGÓRICA.

Los primeros matemáticos griegos consideraron las relaciones abstractas entre los números como Aritmética y llamaron Logística al arte de realizar cálculos numéricos.

Actualmente, las relaciones abstractas entre los números es la Teoría de Números y la logística griega es la Aritmética.

Los pitagóricos consideraron los divisores de los números naturales para clasificarlos y definir las parejas de números amigables.

Definición: Dos números son amigables si la suma de los divisores propios de uno de ellos es igual al otro y viceversa.

Ellos encontraron la pareja 220 y 284 con esta propiedad y pensaron que era la única, por lo que la grabaron en talismanes que representaban una amistad perfecta; 220 tiene como divisores propios 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 y 110 que suman 284; 284 tiene como divisores propios 1, 2, 4, 71 y 142 que suman 220.

Hasta el año 1636 se conoce un segundo par de números amigables encontrado por Pierre de Fermat:

17,296 y 18,416

	Primos	
17,296	2	
8,648	2	Divisores propios: 1, 2, 4, 8, 16, 23, 46, 47,
4,324	2	92; 94; 184; 188; 368; 376; 752; 1,081; 2,162;
2,162	2	4,324; 8,648
1,081	23	
47	47	
1		Suma = 18,416

	Primos	
18,416	2	Divisores propios: 1; 2; 4; 8; 16; 1,151;
9,208	2	2,302; 4,604; 9,208.
4,604	2	
2,302	2	
1,151	1,151	
1		Suma = 17,296

1638. René Descartes encuentra el tercer par.

1747. El matemático Suizo Leonhard Euler anuncia una lista de 30 pares que después extendió a 60.

1866. A los 16 años, el Italiano Nicolo Paganini encuentra el par relativamente pequeño: 1,184 y 1,210.

Actualmente hay más de 900 pares conocidos

CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS NATURALES.

Los pitagóricos clasificaron los números naturales de la siguiente manera:

a) **Perfectos:** $n \in$ **N** es perfecto si la suma de sus divisores propios es igual a n.

Ejemplos: $6 = 1 + 2 + 3$; $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$

b) **Deficientes:** $n \in$ **N** es deficiente si la suma de sus divisores propios es menor que **n**

Ejemplos: 8. Suma de sus divisores propios = $1 + 2 + 4 = 7 < 8$ Entonces 8 es deficiente.
Cualquier número primo **P** es deficiente porque su único divisor propio **es 1 < p**

c) **Abundantes:** $n \in$ **N** es abundante si la suma de sus divisores propios es mayor que **n**.

Ejemplos: 12. Suma de sus divisores propios = $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 > 12$

30 Suma de sus divisores propios = $1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 10 + 15 = 42 > 30$

Otros ejemplos:

100 Suma de sus divisores propios = $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 + 25 + 50 = 117 > 100$

$\therefore$ El 100 es abundante.

360 Suma de sus divisores propios = $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 8 + 6 + 9 + 10 + 12 + 15 +$

18 $+ 20 + 24 + 30 + 36 + 40 + 45 + 60 + 72 + 90 + 120 + 180 = 850 > 360$

$\therefore$ El 360 es abundante.

Si asignamos la letra **p** para los números perfectos, la letra **d** para los deficientes y la letra **a** para los abundantes, la sucesión de los primeros números naturales, quitando los primos que son todos deficientes, será como la que se muestra en la página siguiente:

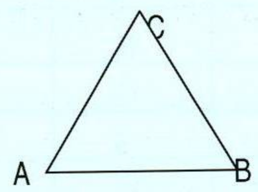
N - Π	Divisores propios	Σ	Clasificación
1	No tiene		
4	1, 2	3	d
6	1, 2, 3	6	p
8	1, 2, 4	7	d
9	1, 3	4	d
10	1, 2, 5	8	d
12	1, 2, 3, 4, 6	16	a
14	1, 2, 7	10	d
15	1, 3, 5	9	d
16	1, 2, 4, 8	15	d
18	1, 2, 3, 6, 9	21	a
20	1, 2, 4, 5, 10	22	a
21	1, 3, 7	11	d
22	1, 2, 11	14	d
24	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12	36	a
25	1, 5	6	d
26	1, 2, 13	16	d
27	1, 3, 9	13	d
28	1, 2, 4, 7, 14	28	p
30	1, 2, 3, 5,6, 10, 15	42	a
32	1, 2, 4, 8, 16	31	d
33	1, 3, 11	15	d
34	1, 2, 17	20	d
35	1, 5, 7	13	d
36	1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18	55	a
38	1, 2, 19	22	d
39	1, 3, 13	17	d
40	1, 2, 4, 5, 8, 10, 20	50	a
≈	≈	≈	≈
496	1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124	496	p

De esta sucesión podemos conjeturar que los números perfectos son pares o que los números impares son deficientes, etc.

CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS. NÚMEROS FIGURALES

Antes de definir los números figurales que determinan sucesiones interesantes, veamos como construían los griegos los primeros polígonos regulares con regla y compás:

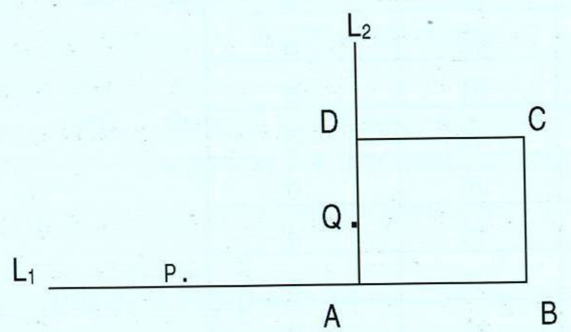
1. Construcción de un triángulo equilátero, a partir de un lado AB:



1. Se trazan arcos con el compás:
   a) Centro en A y radio AB
   b) Centro en B y radio BA = AB

2. El punto de intersección C es el tercer vértice del triángulo equilátero.

2. Construcción de un cuadrado a partir de un lado AB:



1. Con centro en A y radio AB, se encuentra P en L_1.

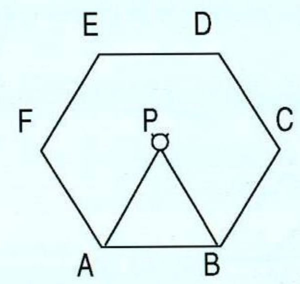
2. Con centro en P y B y radio r > PA = BA se trazan arcos que se interceptan en Q, equidistante de P y B.

3. La recta L_2 que pasa por A y Q es perpendicular a AB, por un teorema de la geometría. D es un punto de L_2 tal que AB = AD.

4. Se trazan arcos con centro en B y D y radio BA = DA. Su intersección determina C, el cuarto vértice del cuadrado.

La construcción de un pentágono regular, a partir de un lado AB requiere de la *Razón Dorada* y el *Pentagrama*, por lo que se verá más adelante.

3.- Construcción del hexágono regular a partir de un lado AB



1. Centro en A y B y radio AB = BA, se encuentra p que hace equilátero al triángulo ABP

2. Con centro en P y radio PB = PA se traza el círculo correspondiente.

3. Con centro en B y radio BP = BA, se encuentra C. Similarmente, con centro en C y radio CP = CB = BA, se encuentra D y así se encuentra E y F para completar los vértices del hexágono regular. A partir del triángulo equilátero se pueden construir polígonos regulares de $3*2^n$ y a partir del cuadrado, podemos construir polígonos regulares de $4*2^n$, con n en los naturales.

El hecho de que los primeros números perfectos sean el 6, número de días empleados para la creación, y el 28 que es el número de días de una lunación completa, además de sus números amigables, explican la tendencia mística de los pitagóricos a utilizar los números en la magia, la astrología, la religión y los horóscopos.

Hasta 1952 había 12 números perfectos conocidos, el tercero es el 496, todos ellos pares.

El último teorema del noveno libro de los ***Elementos*** de Euclides (300 A. C.), establece que si $2^n - 1$ es primo, entonces $2^{n-1}(2^n - 1)$ es perfecto.

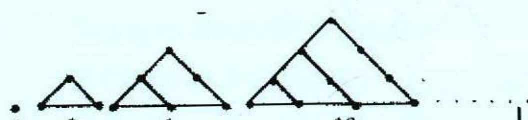
Euler demostró que todo número perfecto par es de esta forma. Hasta la fecha permanece como conjetura la posibilidad de números perfectos impares.

De 1952 a 1961, las computadoras encontraron 12 números perfectos más con la fórmula de Euclides, para **n = 521; 607; 1,279; 2,203; 2,281; 3,217; 4,253; 4,423; 9,689; 9,941; 11,213 y 19,937**.

NÚMEROS FIGURALES O POLIGONALES.

Los matemáticos del período griego, posiblemente los pitagóricos, establecieron una relación entre la aritmética y la geometría a través de lo que llamaran números figurales asociados al número de puntos en sucesiones de polígonos regulares de la siguiente manera:

1. Números Triangulares



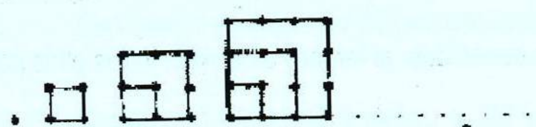
$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ \ldots,\ \frac{1}{2}n(n+1),\ \ldots$

A partir n = 1 que corresponde al 1, seguían con el triángulo equilátero de lado 1, al que asociaban el 3 y así sucesivamente iban agregando una unidad, punteando los extremos de cada unidad, para obtener la sucesión infinita $\{\Sigma i\} = \{\frac{1}{2}n(n+1)\}$ de n = 1 hasta el infinito. De esta manera se obtiene para el enésimo número triangular:

$$T_n = \Sigma i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n}{2}(n+1)$$

$$\boxed{T_n = \frac{1}{2}n(n+1)}$$

2. Números cuadrados



$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots,\ n^2,\ \ldots$

De manera similar a los triángulos, ahora con cuadrados, obtienen la sucesión $\{\Sigma(2i-1)\} = 1 + 3 + \ldots + (2n-1)$; **n = 1, 2, 3, ...,** donde el enésimo número cuadrado es

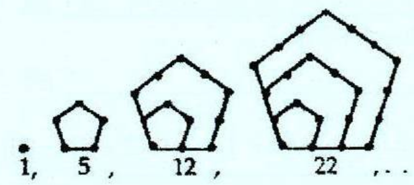
$C_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)$, la suma de los primeros n números impares.

$$C_n = \frac{1}{2}n(\cancel{1} + 2n - \cancel{1})$$

$$\boxed{C_n = n^2}$$

Sucesión de las sumas parciales de la serie de los impares positivos.

3. Números pentagonales



$1,\ 5,\ 12,\ 22,\ \ldots,\ \underbrace{1 + 4 + 7 + \ldots + (3n-2), \ldots}_{\text{Serie aritmética } \{a=1,\ d=3\}}$

Entonces, el enésimo número pentagonal resulta:

$P_n = 1 + 4 + 7 + \ldots + (3n-2)$. Progresión aritmética con a = 1; d = 3 cuya suma es:

$$P_n = \frac{1}{2}n(1 + 3n - 2) = \frac{n}{2}(3n-1)$$

$$\therefore \quad \boxed{P_n = \frac{1}{2}n(3n-1)}$$

De manera similar, siguen con los números hexagonales, heptagonales, octagonales, etc., formando así una sucesión infinita de sucesiones infinitas de números figurales.

A partir de estas asociaciones de números naturales, pueden demostrarse teoremas que relacionan a los números figurales. Por ejemplo:

<u>Teorema 1</u> Todo número cuadrado es la suma del triangular correspondiente más el triangular anterior.

$$C_n = T_n + T_{n-1}$$

Demostración: $T_n = \frac{1}{2}n(n+1)$

$$T_{n-1} = \frac{1}{2}(n-1)(n-1+1) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

$$T_n + T_{n-1} = \frac{1}{2}n(n+1+n-1) = \frac{1}{2}n(2n)$$

$$= n^2 = Cn \qquad \text{L.C.D.D.}$$

Teorema 2 El enésimo número pentagonal es igual a **n** más 3 veces el triangular anterior.

$$Pn = n + 3\,Tn - 1$$

Demostración: $n + 3T_{n-1} = n + 3\left[\frac{1}{2}(n-1)(n-1+1)\right]$

$$= n + 3\left[\frac{1}{2}n(n-1)\right] = n + \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n(2 + 3(n-1))$$

$$\therefore \quad n + 3T_{n-1} = \frac{1}{2}n(2 + 3n - 3)$$

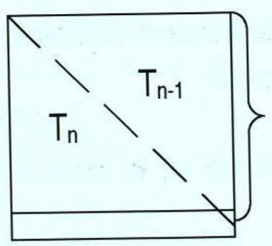
$$= \frac{1}{2}n(3n-1)$$

$$= P_n \qquad \text{L.C.D.D.}$$

Estos teoremas pueden demostrarse geométricamente.

Por ejemplo el 1: **Cn** es una matriz **n x n** de puntos tales que de la diagonal principal hacia abajo, forman el enésimo triangular **Tn** y los restantes forman el **Tn-1**. Entonces

$$\mathbf{C_n = T_n + T_{n-1}}$$



Escalas Musicales. Los pitagóricos descubrieron que los intervalos musicales dependen de proporciones numéricas. Encontraron que para cuerdas de material homogéneo sujetas a igual tensión, las longitudes de las cuerdas deben estar en proporción de 2 a 1 para la octava, de 3 a 2 para la quinta

y de 4 a 3 para la cuarta. Entonces, adoptado una unidad de medida para la nota Do, el siguiente Do hacia abajo debe tener longitud ½ y el Do hacia arriba tendrá longitud 2.

Las longitudes de las cuerdas para completar las escalas pueden obtenerse de las proporciones para la cuarta y la quinta

Do ________________________ $1 = Do$

Re ______________________ $\frac{4}{3}\,Sol = \frac{8}{9}Do$

Mi _____________________ $\frac{3}{4}\,La = \frac{64}{81}\,Do.$

Fa ____________________ $\frac{3}{4}\,Do.$ $\qquad \frac{Do}{Fa} = \frac{4}{3}\;;\; Fa = \frac{3}{4}Do.$

Sol __________________ $\frac{2}{3}\,Do.$ $\qquad \frac{Do}{Sol} = \frac{3}{2}\;;\; Sol = \frac{2}{3}Do.$

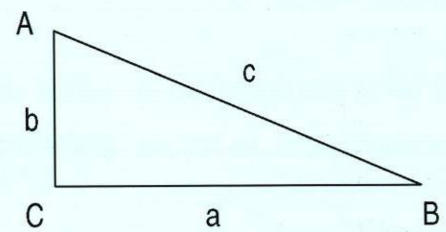
La _________________ $\frac{2}{3}\,Re = \frac{16}{27}\,Do.$

Si ________________ $\frac{3}{4}\,Fa = \frac{9}{16}\,Do.$

Do ______________ $\frac{1}{2}\,Do.$

3.5 TEOREMA DE PITÁGORAS.

Este teorema que relaciona los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo fue descubierto y usado por los babilonios y los egipcios.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Esta relación es indispensable en construcción, hasta la fecha, para el trazo de espacios rectangulares, comunes en edificios, casas, bodegas, pirámides, tumbas, etc. Actualmente, para obtener una recta perpendicular a una línea recta dada en un punto A, se marca una longitud de 4 metros sobre la recta a partir de A hasta B. Después, se marca en el terreno un arco con centro en A,