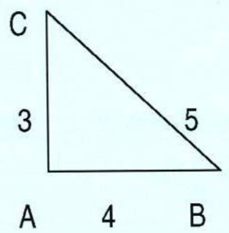
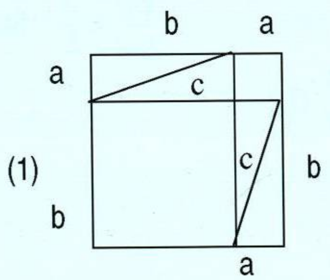
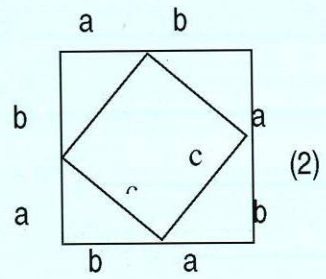
de radio 3 metros y otro arco con centro en B, de radio 5 metros, que se intersecta con el anterior en C. Entonces AC es perpendicular a AB por el teorema de Pitágoras.



$4^2 + 3^2 = 5^2$

La primera demostración formal del teorema fue dada por Pitágoras por el método de disección (partición), probablemente de la siguiente manera:





El cuadrado de lado (a + b) de la figura (1) se divide en 2 cuadrados de lados a y b y cuatro triángulos rectángulos de lados a y b como se indica. Su área $(a + b)^2 = A$ es

$$\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 4\,(1/2\ ab) = A \quad (1)}$$

El mismo cuadrado de lado (a + b) se divide como se indica en la figura 2 en un cuadrado de lado c y cuatro triángulos iguales de lados a y b de manera que su área será

$$\mathbf{A = c^2 + 4\ (\tfrac{1}{2}ab) \qquad (2)}$$

Igualando (1) y (2) y restando $\mathbf{4\,(\frac{1}{2}\,ab)}$ en ambos lados, se obtiene $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$

Desde la época de los pitagóricos se han dado una gran variedad de demostraciones de este teorema. E. S. Loomis en su libro ***El Teorema de Pitágoras*** presenta una colección clasificada de 370 demostraciones de este teorema tan importante en Matemáticas, Física, Ingeniería, Astronomía, etc.

TERNAS PITAGÓRICAS: $\quad \mathbf{T_p = \{(a, b, c) \in N^3 \mid a^2 + b^2 = c^2\}}$

El estudio de las ternas pitagóricas condujo a los pitagóricos a desarrollar la fórmula siguiente para encontrar ternas pitagóricas: $\left\{ \left[m, \ \frac{m^2-1}{2}, \ \frac{m^2+1}{2} \right] \quad \text{Para } m > 1 \in I = \{ \text{impares} \} \right\}$

Verificación: $\quad m^2 + \left[\frac{m^2-1}{2}\right] = \frac{1}{4}\,(4m^2 + m^4 - 2m^2 + 1)$

$$= \frac{1}{4}\,(m^4 + 2m^2 + 1)$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}(m^2 + 1)\right]^2 = \left[\ \frac{m^2+1}{2}\right]$$

El año 380 A. C., Platón multiplica por 2 los elementos de esta fórmula obteniendo:

$\{(2m,\ m^2 - 1,\ m^2 + 1);\ m > 1 \in N\}$ = Ternas de Platón, que proporciona ternas pitagóricas para cualquier $m > 1\ \varepsilon\ N$.

Verificación: $\quad \mathbf{(2m)^2 + (m^2-1)^2 = 4m^2 + m^4 - 2m^2 + 1 = m^4 + 2m^2 + 1 = (m^2 + 1)^2}$

Esta fórmulas no proporcionan todas las ternas pitagóricas. El problema de encontrar todas las ternas pitagóricas se resuelve en los ***Elementos*** de Euclides.

Teorema: $\quad$ Si $(a, b, c) \in Tp$, entonces $(ha, hb, hc) \in Tp$

Demostración: $\quad (ha)^2 + (hb)^2 = h^2a^2 + h^2b^2 = h^2(a^2 + b^2) = h^2s^2 = (hc)^2$

$\therefore \quad (ha, hb, hc) \in Tp \qquad$ L. C. D. D.

Calculando las ternas de los pitagóricos y las ternas de platón, para $m > 2 \in N$, obtenemos las siguientes sucesiones:

M	T pitagóricas	T platónicas
2		(4, 3, 5)
3	(3, 4, 5)	(6, 8, 10)
4		(8, 15, 17)
5	(5, 12, 13)	(10, 24, 26)
6		(12, 35, 37)
7	(7, 24, 25)	(14, 48, 50)
8		(16, 63, 65)
9	(9, 40, 41)	(18, 80, 82)
10		(20, 99, 101)
11	(11, 60, 61)	(22, 120, 122)
12		(24, 143, 145)
13	(13, 84, 85)	(26, 168, 170)
14		(28, 195, 197)
15	(15, 112, 113)	(30, 224, 226)
16		(32, 255, 257)
17	(17, 144, 145)	(34, 288, 290)
18	≈	(36, 323, 325)
	≈	≈

De la tabla podemos conjeturar si todas las ternas de los pitagóricos son primitivas o si las ternas de Platón para **m** par son primitivas, etc.

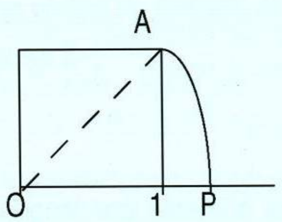
3.6 SEGMENTOS INCONMENSURABLES

La necesidad de contar colecciones finitas de objetos obligó al hombre a utilizar los números naturales en sus diferentes sistemas de números. Al asociar en suma y resta estos conjuntos, los naturales se extienden a los enteros. La necesidad de medir longitudes, tiempos, pesos, etc., requiere de fracciones de la unidad, $\frac{1}{n}$ con $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$, llamadas fracciones unitarias, dando lugar a los números racionales

$$\mathbf{R^+ = \left\{ \frac{a}{b} = a(\frac{1}{b}) \mid a, b \in N \right\}}$$

Los pitagóricos medían magnitudes racionales $\frac{a}{b}$ a partir de un punto sobre una recta, trasladando con el compás la unidad de medida $\frac{1}{b}$, **a** veces, y pensaron que todos los puntos de una recta determinaban magnitudes racionales a partir de un punto origen O.

Sin embargo, al trasladar con el compás la diagonal de un cuadrado, a la recta determinada por el lado base, encontraron una magnitud que no era racional, es decir, que no podía obtenerse a partir de una unidad de medida $\frac{1}{b}$ con $\mathbf{b} \in \mathbf{N}$.



Fracciones Unitarias $\left\{ \frac{1}{b} \mid \mathbf{b} \in \mathbf{N} \right\}$

Esto dio lugar a las siguientes definiciones de segmentos conmensurables, cuya longitud corresponde a nuestros números racionales y segmentos inconmensurables, cuya longitud corresponde a los números irracionales:

Definición 1. Un segmento de recta es conmensurable si tiene una unidad común de medida $\frac{1}{b}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{N}$, con el segmento unitario de longitud 1.

Definición 2. Un segmento de recta es inconmensurable si no tiene una unidad común de medida con el segmento unitario de longitud 1.

La demostración geométrica probable de que $\sqrt{2}$ es irracional fue publicada por Aristóteles (384-322 A. C.).

Se demuestra suponiendo que la diagonal de un cuadrado de lado 1 es conmensurable, es decir que tiene una unidad común de medida con el lado del cuadrado. A partir de esta hipótesis absurda, se deduce geométricamente que esta unidad común de medida, *mide* un cuadrado cuya diagonal es menor que ella, (absurdo)!, por lo que se concluye que $\sqrt{2}$ es inconmensurable, es decir, es irracional.

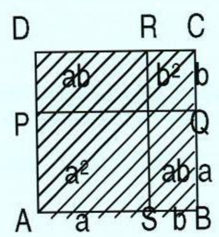
La generalización de este teorema a todos los cuadrados de lado $r \in \mathbf{R}$, nos proporciona un conjunto infinito de magnitudes inconmensurables en sus diagonales y por lo tanto una infinidad de irracionales.

Eudoxus resolvió el problema que se presentó a los pitagóricos con la inclusión de los irracionales, en su ***Teoría de las Proporciones*** del año 370 A. C., donde trata a los irracionales de manera esencialmente similar a la exposición de Richard Dedekind sobre este tema en 1872.

3.7 ÁLGEBRA GEOMÉTRICA.

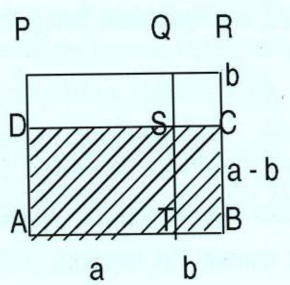
Habiendo representado los números por longitudes de segmentos de recta, los griegos, empezando con los pitagóricos, idearon un álgebra geométrica para resolver problemas algebraicos por procedimientos geométricos.

Por ejemplo, el libro II de los ***Elementos*** de Euclides, en su teorema 4, establece el cuadrado de un binomio geométricamente por el método de disección:



$$(a+b)^2 = ABCD \text{ (Área)}$$
$$= ASTP + SBQT + PTRD + TQCR$$
$$\therefore (a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

El teorema 5 del libro II establece que el producto de una suma por una diferencia de números es igual a la diferencia de sus cuadrados:

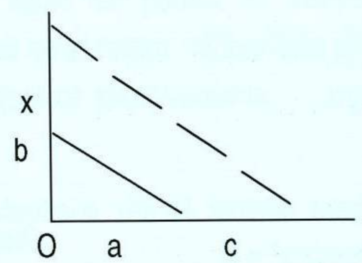


$$ABCD = ATQP - DSQP + TBRQ - SCRQ$$
$$\therefore \quad (a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2$$
$$= a^2 - b^2$$

ECUACIONES ALGEBRAICAS.

Los griegos aplicaron su álgebra geométrica para resolver ecuaciones simplificadas de primero y segundo grado. Así, para resolver la ecuación de primer grado en su forma simplificada $ax = k$; $a, k \in \mathbf{R}$, se expresa k como un producto bc para tener $a\,x = bc$ que equivale a la proporción $\mathbf{x : c = b : a}$ o $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$

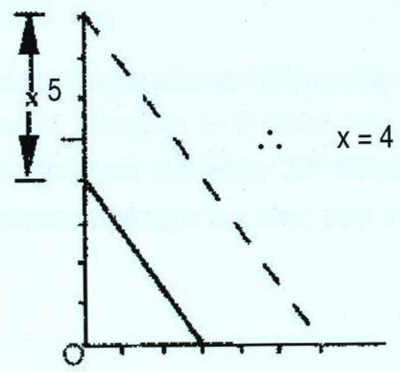
Sobre una recta y a partir de una unidad de medida, se construyen **a** y **c** en sucesión. Sobre otra recta, con el mismo origen, se construye **b**.



Trazando por el extremo de **c** una paralela a la recta que una los extremos de **a** y **b**, se obtiene **x** que satisface $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$, por un teorema de la geometría.

Ejemplo: Resolver la ecuación

$$3x = 12 = (4)(3)$$
$$\frac{x}{3} = \frac{4}{3}$$
$$x = 4$$

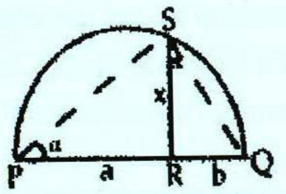


$\therefore \quad x = 4$

4

3 4

De manera similar, para resolver la ecuación cuadrática $x^2 = k$; $k \in R$, se expresa $k = ab$; $x^2 = ab$, de donde $\frac{x}{a}=\frac{b}{x}$. Sobre una recta, se construyen **a** y **b** en sucesión. Con el punto medio de **a + b** como centro, se traza un semicírculo con **(a + b)** como diámetro.

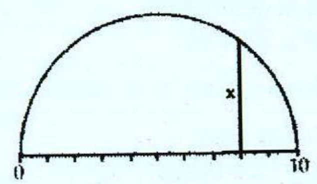


Levantando una perpendicular a PQ en R intersectará al semicírculo en S, resultando los triángulos semejantes PRS y RQS.

∴ **RS** es la **x** buscaba porque: $\frac{x}{a}=\frac{b}{x}=\text{tg}\,\alpha$

Esto proporciona un método geométrico para obtener la raíz cuadrada de un número **k**, equivalente a resolver la ecuación cuadrática simplificada $\mathbf{x^2 = k}$.

Ejemplo: $\mathbf{x^2 = 16 = (8)(2)}$

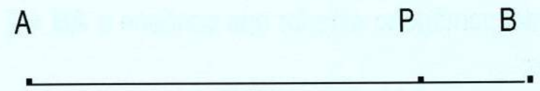


$x = 4$

3.8 RAZÓN DORADA

Los pitagóricos consideraron la ***razón dorada*** o ***proporción dorada*** de la siguiente manera:

Definición: Un punto **P** divide un segmento de recta en *proporción dorada* si el subsegmento más largo es la media proporcional entre el más corto y el segmento completo.



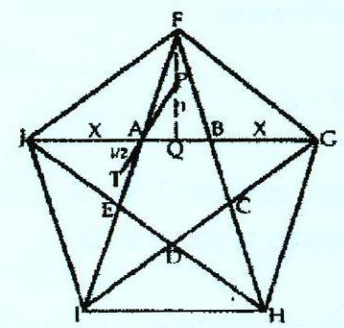
Si $\frac{\mathbf{PB}}{\mathbf{AP}} = \frac{\mathbf{AP}}{\mathbf{AB}}$, entonces **P** divide a **AB** en *proporción dorada.*

Al construir un pentagrama, estrella regular de 5 puntos, a partir de un pentágono regular, trazando sus diagonales, encontraron que éstas se intersectan en puntos que las subdividen en proporciones doradas.

En esta figura hay parejas de triángulos congruentes y semejantes y se forma un nuevo pentágono regular en el centro. Sobre este pentágono se puede construir un nuevo pentagrama y el proceso puede repetirse sucesivamente.

EL PENTAGRAMA.

Consideremos la construcción con regla y compás de un pentágono regular de lado AB = 1, el pentagrama que lo contiene y el pentágono que determinan las puntas del pentagrama.



El pentagrama es la estrella regular de 5 puntas triangulares iguales. Por proporcionalidad de los lados de los triángulos en la figura, los puntos de intersección de las 5 líneas rectas que forman el pentagrama, dividen a éstas en proporción dorada.

Sean **JG** la diagonal del pentágono exterior que contiene a **AB = 1**. Puesto que **B** divide a **JG** en proporción dorada, se tiene:

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x+1}{2x+1}$$
$$2x^2 + x = x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 - x = 1$$
$$(x - 1/2)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$
$$x - 1/2 = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$
$$\therefore \quad x = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$$

Para encontrar x con la regla y compás se construye el triángulo rectángulo **PQA**, donde **Q** es el punto medio de **AB** y **PQ = AB = 1**

$$\therefore \quad PA = \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \sqrt{5/4}$$
$$PA = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Trasladando **AQ =** $1/2$ con el compás hasta la prolongación de **PA** en **T**, se tiene:

$$PT = PA + AT = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$$

PT = x, el lado de la punta del pentagrama.

$$\therefore \quad PT = AJ = BG = AF = BF = \text{etc.}$$

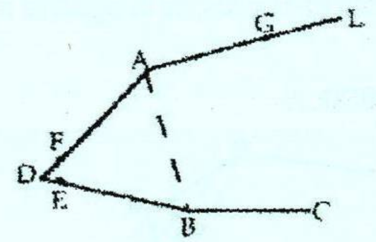
Con el compás se traslada **PT** para encontrar **J**, **G**, y **F**. Sobre las prolongaciones de **FA** y **FB**, se traslada **AB** para encontrar **E** y **C**. Después se encuentra **D**.

Se prolongan los lados del pentágono **ABCD** para tener el pentagrama que lo contiene y con las puntas del pentagrama se tiene el pentágono regular exterior.

El pentagrama fue el emblema de los pitagóricos y, actualmente, de los Rosacruces.

3.9 LA REGLA Y EL COMPÁS.

Las herramientas originales de Euclides, que fueron previamente utilizadas por los pitagóricos, consisten en una regla, sin graduación ó escala, con la cual se puede trazar una recta a través de 2 puntos cualquiera y un compás con el cual se puede trazar un círculo con cualquier punto como centro y pasando por cualquier otro punto. Este compás "original" no puede trasladar la longitud de un segmento BC a otra recta L directamente, lo cual es permitido por el compás "moderno" . Sin embargo, podemos demostrar que resuelve este problema indirectamente, por lo que el compás original y el moderno son equivalentes:



Para trasladar la longitud de **BC** a la recta **L**, a partir del punto **A**

1) Se traza **AB** y se construye el triángulo equilátero **ABD**.
2) Se traza el círculo con centro en **B** y radio **BC**, que intersecta a **BD** en **E**.
3) Se traza el círculo con centro en **D** y radio **DE** que intersecta **AD** en **F**.

$\therefore$ Por construcción:

BD = AD
ED = FD

BD – ED = AD – FD
$\therefore$ BE = AF

Pero BE = BC por construcción
$\therefore$ AF = BC

Se traza un círculo con centro **A** y radio **AF** que intersecta la recta **L** en **G**, resultando **AG = AF = BC**

AG = BC L. C. D. C.

Si **BC > BD**, se marca **E** en la prolongación de **BD**, se procede de manera similar, prolongando **AD** para encontrar **F** y sumando segmentos se obtiene **AF = BC**.

ÁREA DE UN POLÍGONO POR REDUCCIÓN.

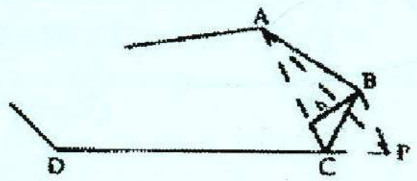
Con regla y compás se puede:

1) Trazar una $\perp$ a una recta dada **AC**, por un punto cualquiera **B**.

2) Trazar $\|$ a una recta dada **AC**, por un punto cualquiera **B**.

Un polígono de **n** lados de área **A** puede transformarse en otro polígono equivalente en área, con un vértice menos y por lo tanto, con **(n-1)** lados, de la siguiente manera:

Consideremos el polígono **ABCD...**



Para eliminar el vértice **C**, se trazan **AC** y **BP** paralela a **AC**.

Entonces los triángulos **ABC** y **APC** tienen la misma área por tener la misma base **AC** y la misma altura **h** Por lo tanto el área del polígono **ABCD...** es igual al área del polígono **APD...**, con un lado menos. Repitiendo el proceso, se puede obtener un triángulo de área equivalente al polígono original. <u>**ABC**</u> = <u>**APC**</u>

Entonces ACD... + ABC = ACD... + APC

$\therefore$ <u>ABCD...</u> = <u>APD...</u>

Área (polígono de **n** lados) = Área (Polígono de **(n-1)** lados)

Euclides resuelve el problema transformando el polígono de **n** lados en un cuadrado de área igual, aplicando los teoremas 42, 44 y 45 de su libro I y el 14 de su libro II, resultando un proceso más complicado.

Actualmente, se resuelve obteniendo las coordenadas de los vértices, referidas a un sistema de ejes rectangulares y mediante áreas de trapecios resulta la fórmula de Simpson:

$$A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i + y_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$$

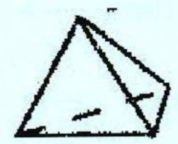
Donde para **i = n, i + 1 = n + 1= 1** (Orden Cíclico)

3.10 <u>SÓLIDOS REGULARES.</u>

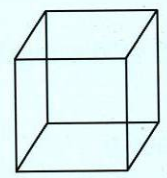
Definición: Un poliedro es regular si sus caras son polígonos regulares iguales y sus ángulos poliedrales son todos iguales.

El pitagórico Timaeus de Locri, describió los únicos 5 poliedros regulares que hay en el espacio tridimensional:

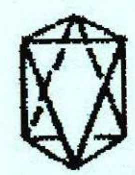
1. Tetraedro: 4 caras, triángulos equiláteros iguales.



2. Exaedro: Cubo 6 caras cuadradas.

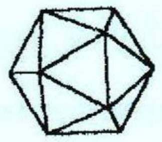


3. Octaedro: 8 caras triangulares.



4. Dodecaedro: 12 caras pentagonales.

5. Icosaedro: 20 caras triangulares.



Los pitagóricos asociaron estos únicos 5 sólidos regulares a los 4 elementos fundamentales de la **Teoría de Empédocles** sobre la naturaleza de los cuerpos materiales, y el universo de la siguiente manera:

1. **Fuego** ⟶ Tetraedro (menor volumen)
2. **Agua** ⟶ Icosaedro (mayor volumen)
3. **Tierra** ⟶ Cubo (mayor estabilidad)
4. **Aire** ⟶ Octaedro (mayor movilidad sostenido por vértices opuestos).
5. ⟶ **Universo** Dodecaedro (12 signos del zodiaco).

Los 5 sólidos regulares se encuentran en la naturaleza en las siguientes formas:

Tetraedro: Cristales de Sulfantimoniato de sodio.

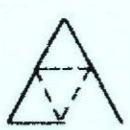
Exaedro: Cristales de cloruro de sodio.

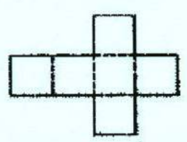
Octaedro: Cristales de Cromo Alumbre.

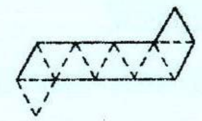
Dodecaedro } Icosaedro } ⟶ Esqueletos de Radiolarias (animales marinos microscópicos).

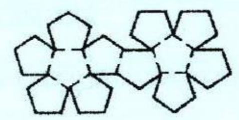
CONSTRUCCIÓN DE LOS POLIEDROS REGULARES:

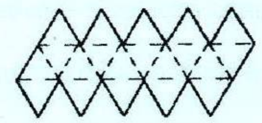
Recortando sobre un cartón las siguientes figuras, se obtienen los 5 sólidos regulares











Estos dibujos se hacen con las herramientas de Euclides y aparecen en las páginas 86 - 89 del libro ***CONCEPTOS MATEMÁTICOS un enfoque Histórico*** de Margaret F. Willerding Edit. C. E. C. S. A.

EJERCICIO 4. **ARITMÉTICA PITAGÓRICA.**

1. Verificar que la pareja de números **1184** y **1210**, encontrada por Nicolo Paganini en 1866, es amigable.

2. La fórmula de Euclides para encontrar números perfectos establece que si $2^n - 1$ es primo, entonces $2^{n-1}(2^n - 1)$ es perfecto. Demostrar que si **n** no es primo, entonces $2^n - 1$ no es primo.

3. Verificar que para **n = 2, 3, 5 y 7**, 2^n**-1** es primo y así encontrar los primeros 4 números prefectos de la fórmula de Euclides.

4. Demostrar que la suma de los recíprocos o inversos multiplicativos de todos los divisores de un número prefecto es igual a **2**.

5. Un número oblongo es el número de puntos en un arreglo rectangular con una columna más que hileras. Si **n** es el número de hileras, establecer la sucesión de los números oblongos para **n = 0, 1, 2, 3, ...**

6. Demostrar que el enésimo número oblongo es igual a la suma de los primeros **n** números pares positivos.

7. Demostrar que 8 veces el enésimo número triangular más uno es igual al número cuadrado $2^n + 1$ en la sucesión de los números cuadrados.

8. Demostrar que el enésimo número oblongo es igual al doble del enésimo número triangular.

9. Los pitagóricos definieron las medias: aritmética, geométrica y armónica como $A = \frac{a+b}{2}$, $G = \sqrt{ab}$ y $H = \frac{2ab}{a+b}$. Demostrar que $A > G > H$ donde la igualdad se satisface si y solo si $a = b$

10. Demostrar la proporción musical $a : A = H : b$

11. Verificar que **8** es la medida armónica entre **12** y **6**. Explicar por qué los pitagóricos llamaron al cubo la armonía geométrica.

12. Demostrar que después del **6**, que es perfecto, todos los múltiplos de **6** son abundantes. Es decir, que **6k** es abundante para todo $k > 1 \in \mathbf{N}$.

EJERCICIO 5. **ÁLGEBRA GEOMÉTRICA DE LOS PITAGÓRICOS.**

1. Encontrar las ternas de la fórmula pitagórica para las cuales la hipotenusa no exceda a **100**.

2. Probar que la línea recta que pasa por los puntos **P(0, 0)** y **Q (l,** $\sqrt{2}$ **)**, pasa únicamente por el punto **(0,0)** de la celosía racional rectangular.

3. Demostrar por reducción a lo absurdo que $\sqrt{2}$ es irracional. Por el mismo método demostrar que **log 2** es irracional.

4. Establecer geométricamente las siguientes identidades algebraicas:
   a) $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
   b) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b2$

5. Dados **3** segmentos de recta desiguales, **a** el mayor, **b** el mediano y el pequeño de una unidad de longitud, construir con regla y compás segmentos de recta de longitud (a + b) y (a – b).
   Sumar y restar **6** y **3** con regla y compás, a partir de una unidad de medida **1**.

6. Dados los segmentos del problema anterior, construir con regla y compás segmentos de longitudes **ab** y $\frac{a}{b}$
   Multiplicar y dividir 6 y 3 con regla y compás.

7. Resolver geométricamente, con regla y compás, las siguientes ecuaciones:
   a) $3x = 21$
   b) $x^2 = 12$

8. Resolver la ecuación cuadrática $x^2 - 6x + 8 = 0$, transformándola en $(x - a)^2 = b$ aplicando el método geométrico de regla y compás.

9. Sobre un segmento **AB** de recta, construir con regla y compás un triángulo equilátero, el círculo que lo circunscribe y el hexágono inscrito en este círculo.

10. En un círculo cualquiera, construir con regla y compás un cuadrado y un octágono regular inscritos en el círculo.

11. Muestre que la proporción dorada $\frac{x}{y} = \frac{y}{x+y}$ es $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. **Sugerencia**: Dar **a** y el valor **1** y resolver para **x** la ecuación resultante para obtener el valor de la proporción dorada $\frac{x}{y}$.

12. Si las diagonales de un pentágono se cortan en proporción dorada, construir con regla y compás un pentágono a partir de un lado del mismo.

13. Construir con regla y compás, un hexágono regular inscrito en un círculo, el hexagrama (estrella regular de puntas) que determinan sus diagonales y el hexágono regular interior del hexagrama.