CAPÍTULO 4

ÉPOCA GRIEGA (600 - 300 A. C.)

4.1. GRECIA, DEL 600 AL 300 A. C.

Este notable período de la matemática formal se inicia con la ***Geometría Demostrativa*** de Tales y culmina con los ***Elementos*** de Euclides. Durante este período, los sucesos más importantes que evolucionan a Grecia son los siguientes:

a) Persia se transforma en una potencia militar y domina las colonias griegas de Asia menor en 546 A. C., e intenta invadir la península Griega en varias ocasiones sin éxito.

b) Los persas basan su desarrollo en la esclavitud, provocando una emigración de los griegos hacia las colonias de la costa de Italia.

c) De 480 a 430 A. C., hay un período de paz. Los matemáticos griegos dispersos vuelven a Atenas y la convierten en un centro de desarrollo intelectual (Pericles, Sócrates, Zenón, etc.).

d) De 430 a 370 A. C., hay un nuevo período bélico y una epidemia mata ¼ de la población de Atenas.

Después del 370 A. C., los pitagóricos emigrados regresan a Grecia con el compromiso de no participar en cuestiones políticas.

4.2 PRINCIPALES ESCUELAS GRIEGAS DE FILOSOFÍA Y MATEMÁTICAS.

Durante este período se fundan escuelas en Atenas y las colonias griegas, de las cuales, las más importantes son las siguientes:

1. Mileto. En este colonia griega de Asia Menor, funda Tales la **Escuela** donde estudió Pitágoras.

2. Crotona. Colonia griega de la costa de Italia, donde inicia Pitágoras la escuela de los primeros pitagóricos.

3. Elea. Colonia griega en Italia, donde Zenón y Parménides fundan su escuela.

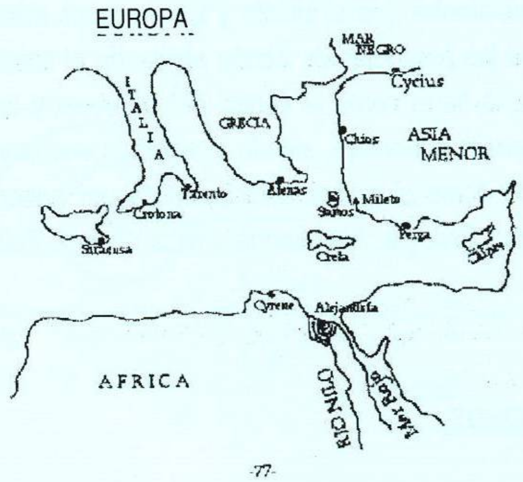
4. Atenas. En la capital de Grecia inician su escuela Pericles y Sócrates, seguidos por Platón y posteriormente por los pitagóricos Zenón y Parménides de Elea y por Hipócrates de Asia Menor.

5. Tarento. Colonia griega en Italia donde se funda la escuela iniciada por Archytas.

6. Cycius. Colonia griega del noroeste de Asia Menor donde se funda la escuela de Eudoxus, alumno de Archytas y Platón.

7. Cyrene. Fundada por Teodoro, en el norte de África.

En el año 300 A. C., Ptolomeo funda la primera Universidad en la Ciudad de Alejandría, en donde enseña Euclides y estudian importantes personajes como Arquímedes, que se establece en Siracusa en la Isla de Sicilia y Apolonio en Perga, al Suroeste de Asia Menor.



4.3 FILÓSOFOS NOTABLES.

PLATÓN (427-347 A. C.) RESUMEN BIOGRÁFICO.

Nació en Atenas, el año 427 A. C., estudió matemáticas en Cyrene, como discípulo de Teodoro y Archytas, y Filosofía en Atenas, como discípulo de Sócrates.

El año 387 A. C., fundó en Atenas su famosa **Academia** para estudios filosóficos y científicos, grabando en su entrada el lema *No permitan entrar aquí a quien no sea versado en Geometría.*

Los diálogos de Platón están considerados como el primer intento de una Filosofía de las Matemáticas.

Fue Director de la Academia de Atenas hasta su muerte en 347 A. C., a la edad de 80 años.

La mayor parte del avance matemático del siglo IV A. C., fue realizado por alumnos de Platón, como Eudoxus quien a su vez fue maestro de Menaechmus, primero en estudiar las secciones cónicas.

ARISTÓTELES. (384-322 A. C.)

Aunque no fue matemático propiamente, influyó en los matemáticos de su época. Escribió la primera lógica deductiva. Consideraba que el infinito y los procesos infinitos no eran indispensables para los matemáticos. *Resolvió* las paradojas de Zenón aplicando el sentido común. Apoyó la **Teoría Geocentrista** que establece a la tierra como el centro del Universo y los astros girando en órbitas circulares alrededor de ella, porque el hombre, siendo el ser más importante, debe estar en el centro del Universo. Está considerado como el primer enciclopedista por haber escrito de todo lo que se discutía en su época en Medicina, Biología, Astronomía, Física, Ciencia Política, Matemáticas, etc.

4.4. TRES PROBLEMAS FAMOSOS.

Con las herramientas de Euclides, regla y compás, se trata de resolver los siguientes problemas que impulsaron las matemáticas, especialmente la ***Geometría Superior*** de curvas y figuras diferentes a las formadas por rectas y círculos.

1. **Trisección de un ángulo.** Dividir un ángulo cualquiera en tres ángulos iguales.

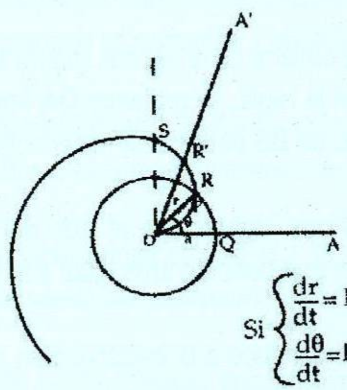
2. **Duplicación de un cubo.** Construir el lado de un cubo que tenga el doble de volumen de un cubo dado.

3. **Cuadratura del círculo.** Construir un cuadrado que tenga área igual a la de un círculo dado.

Los intentos para resolver estos problemas impulsaron a los matemáticos a estudiar las secciones cónicas, curvas polinómicas de segundo grado y otras curvas cúbicas y cuárticas y hasta algunas trascendentes. Por ejemplo el **Conchoide** de Nicomedes, la **Cuadratrix** de Hippias y las **espirales** de Arquímedes, estas últimas dos no-algebraicas o trascendentes. Esto condujo a soluciones aproximadas con la regla y el compás y medios mecánicos.

La imposibilidad de resolver estos problemas con regla y compás fue demostrada hasta fines del siglo XIX con los elementos de la **Teoría de Galois** aplicada a la teoría de ecuaciones, los números algebraicos y su relación con los números constructibles.

Como ejemplo para la cuadratura del círculo, Arquímedes define, en el año 225 A. C., su espiral en términos dinámicos, como el lugar geométrico de un punto **P** que se mueve con velocidad uniforme por un radio que a su vez está girando con velocidad angular constante con respecto a su origen. En coordenadas polares, con la posición inicial del radio **OA** horizontal y **P** coincidiendo con el origen **O**, tenemos que **OP = r** es proporcional al ángulo **AOP** igual al arco **QR**. Si **a** es el radio del círculo, se tiene:



$$\text{Si} \begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = k_1 \\ \dfrac{d\theta}{dt} = k_2 \end{cases} \; : \; \frac{dr}{d\theta} = \frac{k_1}{k_2} = a$$

$$\therefore \underline{r = a\theta}$$

Trazando **OS** perpendicular a **OA**, la longitud de **OS** será:

$$\overline{OS} = \frac{\pi}{2}a = \frac{1}{4}C \Rightarrow \quad C = \overline{4OS} = 2\pi a \Rightarrow \quad \overline{OS} = \frac{1}{2}a\pi$$

Ahora, el área del círculo es:

$$A = \pi a^2 = \frac{1}{2}aC$$

$$A = \frac{1}{2}a(\overline{4OS}) = 2a \cdot \overline{OS}$$

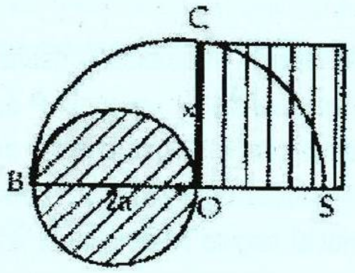
Ahora, sea **x** el lado del cuadrado de área igual a la del círculo. Entonces:

$x^2 = 2a \cdot \overline{OS}$

$\therefore \quad \frac{2a}{x} = \frac{x}{\overline{OS}}$

Resolviendo por el método pitagórico con $\overline{OS} = \frac{1}{2}a\pi$

Para **a = 2cms.;** $\overline{OS} = \pi$ *cms* Si **a = 1**, entonces $\overline{OS} = \frac{1}{2}\pi \approx$ **1.57 cm.**



x $\approx$ **1.7725** cms.

3.1416 $\approx$ **A** $= \pi =$ **A** $\approx$ **3.1416**

Esta última construcción geométrica se obtiene de la espiral, (figura anterior) trasladando con el compás **OS** al eje horizontal **OA**. Después, con la regla, se prolonga **OA** hacia la izquierda y se marca **2a** con el compás. Se determina el punto medio de **BS** para trazar el semicírculo de diámetro **BS**.

Entonces, la perpendicular a **BS** en **O** nos proporciona el lado del cuadrado **x = OC**, con la regla y el compás se traza el cuadrado de lado **x** que tiene un área igual a la del círculo de radio **a.**

El problema de la cuadratura del círculo conduce a la investigación sobre la posibilidad de que el número π sea racional.

4.5 HISTORIA CRONOLÓGICA DEL NÚMERO π.

En 1882 se demostró que el número π es trascendente y por lo tanto no es constructible con regla y compás, ya que todos los números constructibles son algebraicos. Esto resolvió el problema de la cuadratura del círculo en sentido negativo, es decir, no es posible construir con regla y compás un cuadrado de área igual al área de un círculo dado. Durante más de 2000 años se calculó

aproximadamente el número π, para resolver problemas relacionados con él y determinar si era constructible.

La estimación de π tiene la siguiente cronología sintetizada:

1650 A. C. En el papiro Rhind aparece $\pi = \left(\frac{4}{3}\right)^4 = 3.1604$.

240 A. C. Arquímedes encuentra que el número π está entre $\frac{223}{71}$ y $\frac{22}{7}$, calculando perímetros de polígonos inscritos y circunscritos en un círculo de diámetro **1**. Promediando, obtiene $\pi = 3.1418$ en su trabajo **La Medida del Círculo**.

150 D. C. Claudio Ptolomeo en su ***Sintaxis Matemática*** tabula las cuerdas subtendidas cada ½ grado en un círculo de diámetro **1** y estima π como **360** veces la cuerda correspondiente a 1º grado como aproximación de la circunferencia **C =** π**d =** π, obteniendo π **= 3.1416**. Esto corresponde al perímetro del polígono de **360** lados inscrito en un círculo de diámetro **1**.

1579 Francois Viète encuentra π correcto a **9** decimales por el método clásico usando polígonos de **6(2^{16}) = 393, 216** lados.

1610 El alemán Ludolph Van Ceulen calcula π a **35** decimales promediando polígonos de **2^{62}** lados. Este número fue grabado en su tumba y se le llamó el número Ludolfino.

1621 El holandés Willebrand Snell ideó un método trigonométrico para mejorar el método clásico de polígonos y obtuvo el número ludolfino con polígono de **2^{30}** lados.

1630 El alemán Grienberger calculó π a **39** decimales con el método de Snell, para obtener la máxima aproximación calculada por perímetros

1671 El escocés James Gregory encontró la serie:

$Tg^{-1}x = x - 1/3\, x^3 + 1/5\, x^5 - 1/7\, x^7 + \ldots (-1 \leq x \leq 1)$

para x = 1 resulta:

$\pi / 4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots$

Aunque esta serie armónica alternante converge lentamente, fue usada para estimar π

1699 Abraham Sharp encontró π aproximado a **71** decimales de la serie de Gregory con

$$x = \sqrt{1/3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Por este método el francés De Lagny obtuvo π con **112** decimales

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3(3)}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{5(9)}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{7(27)}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \ldots$$

$$\pi = \frac{6}{\sqrt{3}}\left(1 + \frac{1}{3(3)} + \frac{1}{5(9)} + \frac{1}{7(27)} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)3^{n-1}}\right)$$

Para n = **10**

= 3.4641(1 - .111111 + 0.0222 – 0.37037 + ... - 0.000002674) = 3.14159

1737 Leonhard Euler adopta y generaliza el uso del símbolo π para la relación de la circunferencia al diámetro

1767 Johann Lambert demostró que π es irracional

1844 El alemán Zacharías Dase (1824-1861) encontró π a **200** decimales correctos con la serie de Gregory y la relación:

$$\frac{\pi}{4} = tg^{-1}(1/2) + tg^{-1}(1/5) + tg^{-1}(1/8)$$

$$= 26.56 + 11.31 + 7.13 = 45^{\circ}$$

Dase vivió 37 años; se le conoce como el más notable calculista mental de todos los tiempos. Calculaba mentalmente:

a) El producto de 2 números de 8 dígitos en 54 segundos
b) El producto de 2 números de 20 dígitos en 6 minutos
c) El producto de 2 números de 100 dígitos en 8 horas 45 minutos
d) La raíz cuadrada de un número de 100 dígitos en 52 minutos

1853 El inglés William Rutherford calcula π a 400 decimales correctas

1882 F. Lindemann demostró que π es trascendente

1906 Empiezan a aparecer frases como reglas nemotécnicas para el número π. Ejemplo:

" May I have a large container of Coffee"? = 3.1415926.

Una frase en español que proporciona π a 11 decimales es:

"Voy a casa a comer camarones en cóctel picoso con salsa mexicana" = 3.14159266358

1948 D. F. Ferguson y J. W. Wrench calculan π a 808 decimales correctas
1949 Con la computadora ENIAC de Maryland se calcula π a 2037 decimales

1959 En París, Francois Genuis, calcula π con 100, 167 decimales en una IBM 704

1966 Jean Guilloud obtiene π con 250,000 decimales en una STRETCH

1967 Guilloud obtiene π con 500,000 decimales en una CDC6600

La expansión de π con un número grande de decimales parece indicar que es un número "normal".

Definición: Un número es normal si en su expansión decimal, en todos lo bloques de cierta longitud, los dígitos ocurren con igual frecuencia. No se ha determinado si π es normal, ni siquiera si $\sqrt{2}$ es normal.

π y sus decimales se utilizan para muestras aleatorias.

4.6 PARADOJAS DE ZENÓN

Otro suceso importante de este periodo es la consideración de procesos infinitos que aparecen en el principio de la subdivisión infinita y el método exhaustivo de Eudoxus, en las sumas infinitas de las paradojas de Zenón y en la **Teoría Atomística** de Demócrito. Esto conduce a los infinitesimales y las series o sumas infinitas, que son antecedentes del cálculo y que culminan con las áreas y volúmenes calculados posteriormente por Arquímedes.

Demócrito fue un filósofo griego del siglo IV A. C., autor de la **Teoría Atomística** que señala lo siguiente:

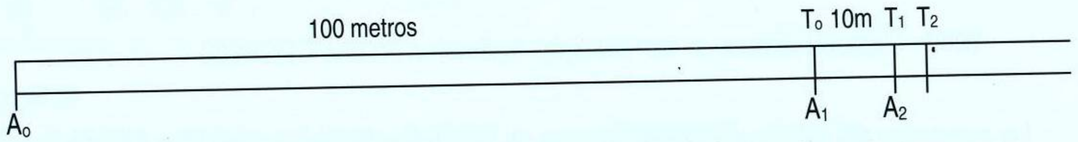
"Todo está constituido por **átomos** materiales **indivisibles** que tienen entre sí solo diferencias cuantitativas. Se mueven en torbellinos en el espacio infinito siguiendo leyes mecánicas. El alma es también material, pero está constituida por átomos más ligeros. El conocimiento se obtiene por recepciones de imágenes sutiles que se desprenden de las cosas y son réplicas de ellas".

Las paradojas de Zenón, basadas en el principio de la subdivisión infinita y en la consideración de que la suma infinita de cantidades positivas es infinita, produjeron el efecto negativo de una tendencia entre algunos matemáticos a eliminar los infinitesimales.

Consideremos los siguientes ejemplos:

1. La paradoja de Aquiles y la Tortuga:

Aquiles, campeón olímpico, trata de alcanzar a una tortuga en una pista recta, dándole una ventaja inicial de 100 metros.



Sean A_0 y T_0 las posiciones iniciales de Aquiles y la tortuga en la pista recta.

Consideremos que Aquiles corre 10 metros por segundo mientras que la tortuga corre 1 metro por segundo, entonces

$\mathbf{V_A = 10}$ **mts. / seg.** ; $\mathbf{V_T = 1}$ **mt. / seg.**

Entonces Aquiles tarda $\mathbf{t_1 = 10}$ segundos en alcanzar la posición inicial de la tortuga. Pero la tortuga ya no está ahí, porque ha avanzado 10 metros en los 10 segundos. Ahora Aquiles tarda $\mathbf{t_2 = 1}$ segundo en alcanzar la nueva posición T_1 de la tortuga. Pero la tortuga ya no está ahí, porque ha avanzado un metro a la posición T_2. De nuevo Aquiles tarda **1/10** de segundo en alcanzar la nueva posición T_2 de la tortuga. Pero la tortuga ya no está ahí y este proceso puede repetirse indefinidamente.

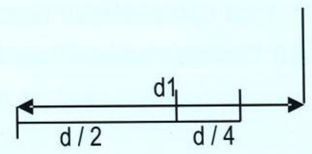
Sumando los tiempos que acumula Aquiles tratando de alcanzar a la tortuga, se tiene lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^{\infty} t_i = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots$$

Puesto que esto es una suma infinita de cantidades positivas, es igual a ∞ y Aquiles nunca alcanzará a la tortuga, produciéndose la paradoja.

Desde luego, ahora sabemos que $\sum_{i=1}^{\infty} t_i = \sum_{i=1}^{\infty} 10\left(\frac{1}{10}\right)^{i-1}$ es una serie Geométrica donde la razón $r = \frac{1}{10} < 1$, y por lo tanto es convergente y su valor es $s = \frac{a}{1-r} = \frac{10}{1-1/10} = \frac{10}{9/10} = \frac{100}{9} = 11\,{}^{1}\!/_{9}$., tiempo que tarda Aquiles en alcanzar a la tortuga.

2. Paradoja del movimiento imposible



Para llegar al *Blanco* la flecha tiene que recorrer una distancia **S = d/2**. Supongamos que tarda un tiempo **t = 1** seg. Para llegar al punto medio de la distancia **d** hasta el *Blanco*. Entonces:

Si $t_o = 1$ seg., para S = d/2
$t_1 = ½$ seg., para S = d/4
$t_2 = ¼$ seg., .
$t_3 = 1/8$ seg., .
. . .
. . .
. . .

$$\ddagger\, t_i = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\ddagger}} \left(\frac{1}{2}\right)^{i} = \square\ddagger$$

Esto produce la paradoja de que el movimiento de la flecha nunca se inicia o que si la flecha sale del arco, nunca llegaría al blanco. La solución de esta paradoja es similar a la anterior.

4.7 <u>EUCLIDES</u>

Antecedentes: Alejandría.

En el año 338 A. C., Grecia pasó a formar parte del Imperio Macedonio. Dos años después, Alejandro Magno sustituye en el poder a su padre Filipo, extendiendo sus dominios hasta Egipto, donde fundó la ciudad de Alejandría en la costa egipcia del Mediterráneo, hacia el año 332 A. C.

Con su muerte, acaecida en el año 323 A. C., el imperio se divide en 3 partes de las cuales la que incluye a Egipto pasó a poder de Ptolomeo, quien en el año 300 A. C. construye en Alejandría la primera Universidad con salas de clase, laboratorios, museos y una biblioteca que a los 40 años de fundada tiene 600,000 rollos de papiro.

No se conocen el lugar y fecha de nacimiento de Euclides, pero se sabe que fue llevado de Atenas a la Universidad de Alejandría, donde fundó la Escuela Alejandrina de Matemáticas; es autor de más de 10 obras de matemáticas, pero lo más sobresaliente fueron sus ***Elementos*** que contienen las matemáticas hasta esa época. La primera traducción al latín se realizó desde el idioma árabe, en el siglo VIII.

La primera edición en inglés fue en 1570. Las 465 proposiciones o teoremas aparecen en 13 libros, de los cuales I, III, IV, XI y XII contienen material que actualmente se enseña en el nivel medio.

4.8 <u>CONTENIDO DE LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES</u>

Libro I. Contiene 48 teoremas divididos en 3 grupos. Los primeros 26 tratan con propiedades y congruencias de triángulos. Del 27 al 32 tratan la teoría de las paralelas y el teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo igual a dos ángulos rectos. Los restantes tratan con paralelogramos, triángulos y cuadrados, incluyendo relaciones de áreas y el Teorema de Pitágoras.

Libro II. Contiene 14 teoremas sobre áreas de polígonos por el método de reducción y álgebra geométrica de la escuela pitagórica. Los últimos 2 teoremas se refieren a la ley de los cosenos.

Libro III. Contiene 39 teoremas sobre círculos, cuerdas, tangentes y medida de ángulos.

Libro IV. Contiene 16 teoremas sobre construcciones con regla y compás de polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 y 15 lados, su inscripción y circunscripción en un círculo dado. Desde luego esto resuelve la construcción de polígonos de $\mathbf{2^n}$ por cada uno de los casos: **3, 4, 5 y 15** $\mathbf{n \in N}$.

Observación: Hasta el siglo XVIII no hubo otros polígonos regulares construidos con las herramientas de Euclides. En 1796, el matemático alemán Kart F. Gauss desarrolló una teoría para demostrar que un polígono regular de un número primo de lados puede construirse con regla y compás si y sólo si ese número es de la forma $f(n)=2^{2^{n-1}}+1$

Para n = 1, 2, 3, 4, 5, se obtiene f (n) = 3, 5, 17, 257, 65 537, todos números primos. En 1832, Richelot publicó una investigación sobre el polígono regular de 257 lados y H. Lingen trabajó 10 años en la construcción del polígono de 65 537 lados.

Libro V. Contiene la teoría de las proporciones de Eudoxus, que posteriormente proporcionó la base para la construcción de los números reales de Dedekind y Weierstrass en el siglo XIX.

Libro VI. Se aplica la teoría de proporciones a la Geometría Plana en los teoremas fundamentales de triángulos semejantes y en la solución de ecuaciones cuadráticas geométricamente.

También se dan las generalizaciones del teorema de Pitágoras donde en lugar de cuadrados, figuras similares se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.

Libro VII. Contiene la teoría elemental de números, empezando con el algoritmo euclidiano para el máximo común divisor entre 2 números y su aplicación para determinar si 2 números son primos entre sí.

Libro VIII. Trata ampliamente con proporciones continuas y las progresiones geométricas correspondientes.

Dada la proporción continua $b_o : b_1 = b_1 : b_2 = b_2 : b_3 = \ldots$, $b_o, b_1, b_2, b_3, \ldots$ están en progresión geométrica.

Libro IX. Contiene el ***Teorema Fundamental de la Aritmética:*** *Todo entero mayor que 1 puede expresarse esencialmente en forma única como un producto de números primos.* También establece la notable fórmula para números perfectos: Si $\mathbf{2^n - 1}$ es primo, entonces $\mathbf{2^{n-1}(2^n - 1)}$ es perfecto.

Además contiene la demostración de que el conjunto de números primos es infinito.

Libro X. Trata fundamentalmente con la aplicación de la teoría de proporciones y el método exhaustivo de Eudoxus para la teoría de los irracionales o inconmensurables. Los libros **VIII, IX** y **X** contienen 102 teoremas.

Libros XI, XII y XIII. Trata acerca de la geometría del espacio. Contiene teoremas sobre planos en el espacio, paralelepípedos y construcciones para inscribir los 5 sólidos regulares en una esfera.

4.9 <u>ASPECTOS FORMALES DE LOS ELEMENTOS</u>

Los 465 teoremas de los Elementos de Euclides se deducen de los siguientes 10 axiomas y postulados:

A.1. Dos iguales a un tercero son iguales entre sí.
A.2. Si iguales se agregan a iguales, los totales son iguales.
A.3. Si iguales se restan a iguales, los restos son iguales.
A.4. Dos coincidentes uno al otro son iguales entre sí.
A.5. El todo es mayor que la parte.
P.1. Es posible trazar una recta de un punto a cualquier otro.
P.2. Es posible construir indefinidamente segmentos finitos en una recta dada.
P.3. Es posible construir un círculo con cualquier punto como centro y cualquier recta finita trazada del centro, como radio.
P.4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí
P.5. Si una recta intersecta otras 2 rectas de tal manera que los ángulos interiores de un lado suman menos de 2 rectos, entonces estas rectas se intersectan al prolongarse sobre ese lado.

Axiomática. Es una rama de las matemáticas motivada por los Elementos de Euclides; está ligada a la Filosofía Matemática y a la lógica simbólica. Trata con el estudio de postulados y axiomas, sus propiedades y su clasificación.

En geometría, generalmente los axiomas se refieren a relaciones evidentes por sí mismas entre los elementos primitivos que no se definen, mientras que los postulados se refieren a construcciones geométricas que se aceptan sin demostración.

Las propiedades fundamentales que deben tener son las siguientes:

1. Consistencia. Un conjunto de postulados y axiomas es consistente si no pueden deducirse contradicciones de ellos.

2. Independencia. Un conjunto de axiomas y postulados es independiente si ninguno de ellos puede ser deducido de los demás.

3. Equivalencia. Dos conjuntos de axiomas y postulados son equivalentes si cada uno de ellos puede ser deducido del otro.

Los principales matemáticos que han contribuido a esta rama de las matemáticas son Hilbert, Peano y Bertrand Russell.

La principal crítica a los **Elementos** de Euclides se refiere a la **Teoría de las Paralelas** que dió lugar a las *Geometrías no-Euclidianas* como la **Geometría Hiperbólica** de Lobachevsky, Gauss y Bolyai y la **Geometría Elíptica** de Riemann.

4.10 OTROS LIBROS DE EUCLIDES

Data. Trata con la determinación de los datos mínimos necesarios para definir una figura. Un ***Datum*** es un conjunto de partes y/o relaciones de una figura que permite, dadas todas menos una, encontrar la que falta. Por ejemplo las partes A, a y R de un triángulo (donde *A* es un ángulo, *a* el lado opuesto y *R* es el circunradio) constituyen un datum porque dadas dos de ellas se puede encontrar la tercera.

Divisiones. Trata con la división de figuras planas cerradas en áreas que estén en cierta relación; por ejemplo, dividir un triángulo en dos partes de igual área.
Cónicas. Tratado en 4 libros sobre las secciones cónicas.

Phaenomena. Geometría esférica aplicada a la Astronomía.

Óptica. Tratado elemental de perspectiva, técnica de dibujo en un plano de figuras en el espacio.

EJERCICIO 6. **EL NÚMERO π. ELEMENTOS DE EUCLIDES.**

1. Verificar que la circunferencia de un círculo se obtiene aproximadamente como 3 veces el diámetro más 1/5 del lado del cuadrado inscrito. Establecer esta fórmula y encontrar el valor π que proporciona, aproximado a 4 decimales.

2. Sea AOB un cuadrante de un círculo con centro en O. Sobre AB como diámetro, trazar un semicírculo hacia fuera del cuadrante.
Demostrar que la luna limitada por el cuadrante y el semicírculo tiene la misma área que el triángulo AOB.

3. Si t_n denota el lado de un polígono regular de **n** lados inscrito en un círculo de radio **r**, demostrar que $t_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - t_n^2}}$.

4. Encontrar el máximo común divisor de 348 y 612 por el algoritmo euclidiano de divisiones sucesivas y expresarlo como una combinación lineal de los números.

5. Demostrar el teorema 2 del libro VI de los elementos de Euclides que establece: *Una recta paralela a uno de los lados de un triángulo divide a los otros dos en partes proporcionales*

6. Aplicando la ley de los cosenos demostrar el teorema de Pitágoras: *La suma de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa.*

7. Un cuadrilátero de Saccheri es aquel en el cual **AD** y **BC** son iguales y los ángulos **A** y **B** son rectos. **AB** es la base y **DC** la cima del cuadrilátero. Demostrar que los ángulos **D** y **C** son iguales.

8. Demostrar que la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre los catetos de un triángulo es igual al área del triángulo construido sobre la hipotenusa.

9. Demostrar que la suma de las áreas de los semicírculos construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo es igual al área del semicírculo construido sobre la hipotenusa.

10. Demostrar que el ángulo A, el lado adyacente b y la altura h_c sobre el lado c constituyen un datum de un triángulo.

CAPÍTULO 5

MATEMÁTICOS GRIEGOS DESPUÉS DE EUCLIDES

5.1 LA ÉPOCA ALEJANDRINA.

Desde su fundación, Alejandría tuvo un período de casi 300 años de paz hasta el año 30 A. C., cuando Egipto pasó a formar parte del Imperio Romano. Grecia fue dominada por los romanos desde 146 A. C. Las condiciones ventajosas de Alejandría la convirtieron en un centro de desarrollo académico, a donde concurrieron los mejores matemáticos de la época.

5.2 ARQUÍMEDES.

Nació en Siracusa, en la isla de Sicilia, el año 287 A. C. y murió durante el saqueo romano de la isla en 212 A. C. Pasó parte de su vida en Egipto, estudiando en la Universidad de Alejandría. Los historiadores romanos relatan la habilidad de Arquímedes para construir armas en defensa de Siracusa. Catapultas para lanzar enormes piedras y proyectiles con fuego, contra los barcos romanos. Construyó un dispositivo a base de palancas y poleas para levantar y hundir los barcos que se acercaban a la costa de la ciudad. Se le atribuye la frase: Dadme una palanca y un punto de apoyo y moveré el mundo.