**EJERCICIO 6.** **EL NÚMERO $\pi$. ELEMENTOS DE EUCLIDES.**

1. Verificar que la circunferencia de un círculo se obtiene aproximadamente como 3 veces el diámetro más 1/5 del lado del cuadrado inscrito. Establecer esta fórmula y encontrar el valor $\pi$ que proporciona, aproximado a 4 decimales.

2. Sea AOB un cuadrante de un círculo con centro en O. Sobre AB como diámetro, trazar un semicírculo hacia fuera del cuadrante.
Demostrar que la luna limitada por el cuadrante y el semicírculo tiene la misma área que el triángulo AOB.

3. Si $t_n$ denota el lado de un polígono regular de **n** lados inscrito en un círculo de radio **r**, demostrar que $t_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - t_n^2}}$.

4. Encontrar el máximo común divisor de 348 y 612 por el algoritmo euclidiano de divisiones sucesivas y expresarlo como una combinación lineal de los números.

5. Demostrar el teorema 2 del libro VI de los elementos de Euclides que establece: *Una recta paralela a uno de los lados de un triángulo divide a los otros dos en partes proporcionales*

6. Aplicando la ley de los cosenos demostrar el teorema de Pitágoras: *La suma de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa.*

7. Un cuadrilátero de Saccheri es aquel en el cual **AD** y **BC** son iguales y los ángulos **A** y **B** son rectos. **AB** es la base y **DC** la cima del cuadrilátero. Demostrar que los ángulos **D** y **C** son iguales.

8. Demostrar que la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre los catetos de un triángulo es igual al área del triángulo construido sobre la hipotenusa.

9. Demostrar que la suma de las áreas de los semicírculos construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo es igual al área del semicírculo construido sobre la hipotenusa.

10. Demostrar que el ángulo $A$, el lado adyacente $b$ y la altura $h_c$ sobre el lado $c$ constituyen un datum de un triángulo.



# CAPÍTULO 5

# MATEMÁTICOS GRIEGOS DESPUÉS DE EUCLIDES

## 5.1 LA ÉPOCA ALEJANDRINA.

Desde su fundación, Alejandría tuvo un período de casi 300 años de paz hasta el año 30 A. C., cuando Egipto pasó a formar parte del Imperio Romano. Grecia fue dominada por los romanos desde 146 A. C. Las condiciones ventajosas de Alejandría la convirtieron en un centro de desarrollo académico, a donde concurrieron los mejores matemáticos de la época.

## 5.2 ARQUÍMEDES.

Nació en Siracusa, en la isla de Sicilia, el año 287 A. C. y murió durante el saqueo romano de la isla en 212 A. C. Pasó parte de su vida en Egipto, estudiando en la Universidad de Alejandría. Los historiadores romanos relatan la habilidad de Arquímedes para construir armas en defensa de Siracusa. Catapultas para lanzar enormes piedras y proyectiles con fuego, contra los barcos romanos. Construyó un dispositivo a base de palancas y poleas para levantar y hundir los barcos que se acercaban a la costa de la ciudad. Se le atribuye la frase: Dadme una palanca y un punto de apoyo y moveré el mundo.

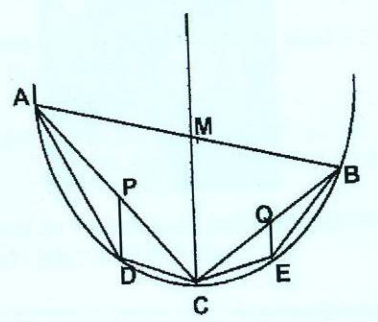
El rey Hierón preguntó a Arquímedes como podría saber si su corona de oro tenía plata en aleación con el oro. Este problema lo resolvió Arquímedes al descubrir la primera ley de la hidrostática cuando salía de su tina de baño: Todo cuerpo sumergido en un líquido, recibe un empuje vertical hacia arriba igual al peso del líquido que desaloja.

**Principales Escritos.** Los trabajos de Arquímedes están presentados en forma compacta, muestran habilidad de cálculo, claridad y rigor en las demostraciones. Realizó 3 en Geometría plana:

**1. Medida del Círculo.** Presenta el método clásico de perímetros de polígonos regulares inscritos y circunscritos en un círculo de diámetro unitario para calcular el número $\pi$.

**2. Cuadratura de la Parábola.** Contiene 24 teoremas e incluye cálculos de áreas de segmentos parabólicos relacionándolas con series geométricas convergentes.

**ÁREA DE UN SEGMENTO PARABÓLICO.** Como un ejemplo de los trabajos de Arquímedes, consideremos el problema de calcular el área encerrada entre una parábola y una recta:




Sean: **M** el punto medio de **AB**.
Área del triángulo **ABC = k.**
**MC**||**eje** de la parábola
**P** = punto medio de **AC**.
**Q** = punto medio de **BC**.
**PD**||**MC**||**QE**

Arquímedes calculó las áreas de los triángulos **ADC** y **BEC** encontrando:

$$\underline{ADC} + \underline{BEC} = \frac{1}{4}\underline{ABC} = \frac{1}{4}k$$



Por los puntos medios de **AD**, **DC**, **CE** y **EB** trazó paralelas al eje y construyó los 4 triángulos correspondientes, calculó sus áreas y encontró que la suma de estas 4 áreas es 1/4 de la suma de las áreas de los 2 triángulos anteriores y por lo tanto es **1/16 k**.

Repitiendo el proceso, se tiene:

$$A = k + 1/4\,k + 1/16\,k + 1/64\,k + \ldots = k\,(1 + 1/4 + 1/16 + 1/64 + \ldots)$$

El factor entre paréntesis es una progresión geométrica con a = 1; r = 1/4 < 1. Entonces es convergente y su suma es:

$$S_\infty = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}}$$

$$\therefore\ A = \frac{4}{3}k$$

Aquí, Arquímedes aplica el método exhaustivo de Eudoxus y se aproxima notablemente el cálculo integral actual.

**3. Espirales.** Contiene 28 teoremas dedicados a las propiedades de la **Espiral** de Arquímedes: $r = k\theta$ en coordenadas polares.

Se atribuye a Arquímedes la fórmula para calcular el área de un triángulo de lados **a, b, c** y semiperímetro **s**:

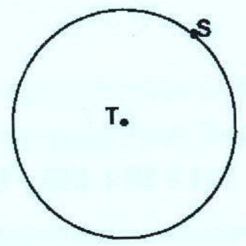
$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Arquímedes escribió también 2 trabajos en Geometría tridimensional:

**1. La Esfera y el cilindro.** 60 teoremas incluyendo áreas de esferas y división de una esfera en 2 partes cuyos volúmenes están en una razón dada.

**2. Conoides y Esferoides.** 40 teoremas relacionados con volúmenes de cuadráticas de revolución.

**El contador de Arena.** Gelón, hijo del rey Hierón dijo a Arquímedes: "Tú que todo lo mides y todo lo cuentas, dime cuántos granos de arena hay en las playas del Mediterráneo". Para contestar esto, Arquímedes estimó el número N de granos de arena que caben en una esfera con centro en la tierra y radio hasta el sol para lo cual utilizó un sistema de números de base 100 billones para expresar lo siguiente:




"Nadie puede decirte ahora, ni podrá decir en el futuro, cuántos granos de arena hay en las playas del mediterráneo, porque es una sucesión creciente en el tiempo, pero sí puedo asegurar que siempre será menor que este número N". Aquí, Arquímedes introduce el importante concepto de cota superior de una sucesión creciente.

**Equilibrio en un plano.** 25 proposiciones o teoremas sobre el cálculo y propiedades de centroides de áreas planas, incluyendo segmentos parabólicos.

**Cuerpos flotantes.** 19 teoremas de matemáticas aplicadas a la hidrostática. En base a este trabajo, se inició la Teoría de la Hidrostática en el siglo XVI.

Arquímedes realizó también trabajos sobre palancas y sobre propiedades de espejos.

En 1906, Heiber descubrió un libro de Arquímedes llamado ***Método*** dirigido a Eratóstenes, en el cual describe métodos para descubrir la mayoría de sus teoremas que después demostraba rigurosamente.

Los trabajos de Arquímedes muestran que estuvo cerca de formalizar el Cálculo Integral.

## 5.3 ERATÓSTENES.

Nació en Cyrene el año 270 A. C. Vivió en Atenas hasta los 40 años, cuando fue llevado a Alejandría como Director de la Biblioteca de la Universidad. El año 194 A. C. quedó ciego y se suicidó.



Se le reconocía como matemático, astrónomo, geógrafo, historiador, filósofo y poeta. Es autor de una solución mecánica para la duplicación del cubo y de un trabajo científico sobre la medida de la tierra.

Para estimar el diámetro y la circunferencia de la tierra, Eratóstenes observó que a las 12:00 horas, el día del solsticio, una vara vertical (a plomo) en Siena, no proyecta sombra, mientras que en Alejandría proyecta una sombra que le permitió calcular que la distancia de Siena a Alejandría, sobre el meridiano 30° que pasa por Alejandría

**DCA** = 5000 Estadios
= 5000 (170 metros)
= 850,000 Metros
= 850 kilómetros

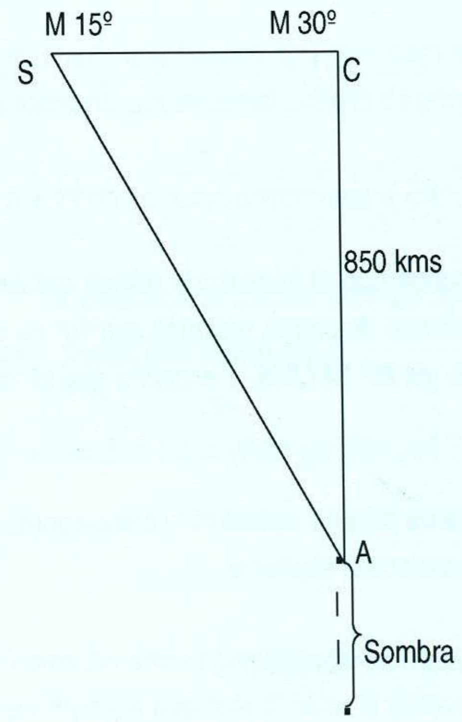
corresponde a un arco de $\frac{1}{50}$ de la circunferencia polar de la tierra;

$\therefore \quad \frac{1}{50} C = 850$ kms.

$\therefore \quad C = 42{,}500$ kms.

Con la circunferencia estimada se obtiene el diámetro **d = 42,500 / $\pi$ ≈ 13,217 kms.**

Estas medidas encontradas por Eratóstenes son bastante aproximadas a las reales



En Teoría de números, ideó un dispositivo llamado la criba de Eratóstenes, para encontrar los números primos menores que un número dado **n**. Escribir el 2 y los números impares en orden: 2, 3, 5, 7, 9, y así sucesivamente. Se eliminan después del 3, cada tercer número; después del 5, cada quinto número; después del 7 cada séptimo número y así sucesivamente hasta el número próximo menor a $\sqrt{n}$.

Por ejemplo, para **n = 150**

2, 3, 5, 7, $\cancel{9}$, 11, 13, $\cancel{15}$, 17, 19, $\cancel{21}$, 23, $\cancel{25}$, $\cancel{27}$, 29,
31, $\cancel{33}$, $\cancel{35}$, 37, $\cancel{39}$, 41, 43, $\cancel{45}$, 47, $\cancel{49}$, $\cancel{51}$, 53, $\cancel{55}$, $\cancel{57}$, 59,
61, $\cancel{63}$, $\cancel{65}$, 67, $\cancel{69}$, 71, 73, $\cancel{75}$, $\cancel{77}$, 79, $\cancel{81}$, 83, $\cancel{85}$, $\cancel{87}$, 89,
$\cancel{91}$, $\cancel{93}$, $\cancel{95}$, 97, $\cancel{99}$, 101, 103, $\cancel{105}$, 107, 109, $\cancel{111}$, 113, $\cancel{115}$, $\cancel{117}$, $\cancel{119}$,
$\cancel{121}$, $\cancel{123}$, $\cancel{125}$, 127, $\cancel{129}$, 131, $\cancel{133}$, $\cancel{135}$, 137, 139, $\cancel{141}$, $\cancel{143}$, $\cancel{145}$, $\cancel{147}$, 149

Puesto que $\sqrt{150}$ está entre 12 y 13 se realiza el proceso hasta eliminar, después del 11, cada onceavo número de la lista. Los números no eliminados son los primos menores que 150:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37,41, 43, 47, 53,59, 61, 67, 71
73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149.
35 en total.

## 5.4 LOS NÚMEROS PRIMOS.

En **1870**, E. Meissel encontró que el número de primos menores que $10^8$ es **5' 761,455**. En **1893**, Bertelsen anunció que el número de primos menores que $10^9$ es **50' 847,478**, corregido en **1959** por D. Lehmer al número correcto de **50' 847,534**, y encontró que el número de primos menores que $10^{10}$ era **455' 052, 511**.

El **Teorema de los números primos** establecido como conjetura por Gauss y demostrado en **1896** por el Belga J. Hadamard establece lo siguiente:

Sea **An** = Número de primos menores que **n**.



$$Dn = \frac{An}{n} = \text{Densidad de los primos en los primeros } n \text{ enteros}$$

**Teorema** $$\lim_{n \to \infty} = \frac{A_n}{n} \, ln\, n = 1$$

Es decir **$A_n$ / n** se aproxima a **1/ *ln*n** cuando **n** se hace cada vez mas grande.

L. Dirichlet demostró el siglo pasado que la secuencia aritmética **{a + (n - 1) d}** en la cual **a** y **d** son primos entre sí, contiene un conjunto infinito de primos. No existe un procedimiento práctico para determinar si un número grande es primo.

En 1876, A. Lucas verificó que el siguiente número de 39 dígitos es primo:

$2^{127} - 1 = 170^6, 141, 183^5, 460, 469^4, 231, 731^3, 687, 303^2, 715, 884^1, 105, 727.$

En 1952, la computadora inglesa EDSAC estableció la primalidad del número de 79 dígitos: $180\,(2^{127} - 1)^2 + 1$.

Posteriormente con otras computadoras se han encontrado números primos enormes de la forma $2^n - 1$ para n = 521; 607; 1 279; 2, 203; 2, 281; 3, 217; 4, 253; 4, 423; 9, 689; 9, 941 y 11, 213.

No ha sido posible encontrar una función **f(n)** que para enteros positivos **n**, dé solamente números primos, lo cual proporcionaría una secuencia infinita de primos.

La función **$f(n) = n^2 - n + 41$** da números primos para **n < 41**; **$f(n) = n^2 - 79n + 1, 601$** da primos para **n < 80**.

En 1640, Pierre de Fermat estableció la conjetura de que **f(n)** = $2^{2^n}$ **+ 1** sea primo para todo **n** entero no-negativo. Esto es falso, puesto que para **n = 5**

$$f(5) = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = (641)(6'700,417)$$

Conjeturas que permanecen:

1. Hay un número finito de pares de primos gemelos de la forma **p y p + 2**?
2. Todo entero par mayor que 2 puede expresarse como la suma de dos primos ?

Ejemplos: $4 = 2 + 2$ ; $6 = 3 + 3$; $8 = 3 + 5$ ; ...$16 = 13 + 3$; ... $48 = 29 + 19$; ...$100 = 97 + 3$; ...

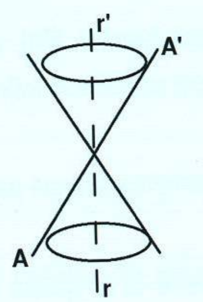
3. Hay un número infinito de primos de la forma $n^2 + 1$?
4. Hay un número primo entre $n^2$ y $(n + 1)^2$ para todo $n \in \mathbf{N}$ ?
5. Hay un número infinito de primos de Fermat de la forma $2^{2^n} + 1$?

**5.5 APOLONIO.**

Nació en Perga, en el sureste de Asia Menor, el año 262 A. C. Estudió en Alejandría y posteriormente fundó una Universidad y Biblioteca en Pergamum, tomando como modelo la de Alejandría. Murió el año 200 A. C. en Alejandría.

Su principal obra en matemáticas es su colección de 8 libros sobre Secciones Cónicas con 400 teoremas.

Los trabajos previos sobre las cónicas obtienen éstas mediante tres tipos de conos de revolución, en concordancia a que el ángulo del vértice sea igual, mayor o menor que un ángulo recto. Apolonio obtiene todas las cónicas como secciones de un cono circular doble y girando una recta sobre un punto fijo o, de manera que todos los demás puntos de la recta describan trayectorias circulares.




1. **Círculo.** Sección perpendicular a r r'.
2. **Parábola.** Sección paralela a A A'.
3. **Elipse.** Sección haciendo ángulo agudo con r r'.
4. **Hipérbola.** Sección paralela a r r'.

Estos nombres fueron utilizados por los pitagóricos y adoptados por Apolonio. Los primeros tres libros se basan en el trabajo previo de Euclides y los últimos 5 son especializaciones del tema.



Estos trabajos sobre las cónicas parecen indicar que el origen de la Geometría Analítica se remonta a los griegos.

Otros trabajos de Apolonio son:

| | |
|---|---|
| **1. Tangencias.** | 124 teoremas. |
| **2. Congruencias.** | 125 teoremas. |
| **3. Lugares geométricos en el plano.** | 147 teoremas. |
| **4. Secciones determinadas.** | 83 teoremas. |
| **5. Secciones proporcionales.** | 181 teoremas. |
| **6. Secciones Espaciales.** | 124 teoremas. |

**5.6 TRIGONOMETRÍA.**

Puede decirse que el origen de la trigonometría lo muestra el papiro Rhind en Egipto y la tableta babilónica Plimpton 322 que contiene tabletas de cotangentes y secantes. Parece ser que las observaciones astronómicas dieron lugar a la trigonometría. Los astrónomos babilonios de los siglos IV y V A. C. acumularon gran cantidad de datos que pasaron a los griegos.

**5.7 HIPPARCHUS Y PTOLOMEO.**

Fueron los más notables astrónomos griegos. **Hipparchus** trabajó en Alejandría y en Rodas, isla del sureste de Asia Menor. Contribuyó al desarrollo de la trigonometría en su obra de 12 libros incluyendo una tabla de cuerdas.

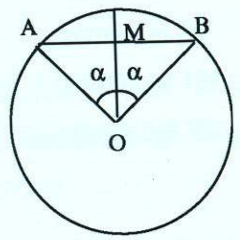
Posteriormente **Claudio Ptolomeo** presenta su tabla de cuerdas que parece haber sido adoptada de la obra de Hipparchus. Aparecen las cuerdas de los ángulos centrales de un círculo dado, cada 1 / 2 grado hasta 180º. El radio del círculo se divide en 60 partes y las longitudes de las cuerdas se expresan sexagesimalmente en términos de una de esas partes como unidad.

Por ejemplo:

$$\text{Cda.}\ (36^\circ) = 37_{p}4_{p'}55_{p''} = (0\overset{\frown}{37}\overset{\frown}{4}\overset{\frown}{55})_{60}$$

Esto significa que la cuerda de un ángulo central de $36^o$ es igual a $\frac{37}{60}$ del radio, más $\frac{4}{60}(\frac{1}{60})$ igual a $\frac{4}{3600}$, más $\frac{55}{3600}(\frac{1}{60}) = \frac{55}{21600}$ del radio.

La tabla de cuerdas equivale a una tabla de senos;




$$\text{Sen}\alpha = \frac{AM}{OA} = \frac{AB}{\text{Diam.}} = \frac{\text{Cda.}\ (2\alpha)}{120} = \frac{1/\ 2\,\text{Cda.}2\alpha}{60}$$

La tabla de cuerdas proporciona esencialmente, los senos de los ángulos cada 15' de 0o a 90o.

En el año 150 A. C., Ptolomeo escribió un tratado de Astronomía en 13 libros llamado ***Sintaxis Matemática***, y después llamado por los árabes ***El Almagesto***. Esta obra se mantiene como válida para la Astronomía hasta el renacimiento, cuando Copérnico y Kepler la corrigen.

El **libro I** contiene conceptos preliminares de astronomía y la tabla de cuerdas.

El **libro II** considera fenómenos naturales que dependen de la esfericidad de la tierra.

Los **libros III, IV y V** desarrollan el sistema geocéntrico de órbitas circulares.

El **libro VI** presenta una teoría de los eclipses.

Los **libros VII y VIII** se dedican a un catálogo de 1028 estrellas fijas, y los restantes libros se dedican a los planetas.



**5.8 <u>HERÓN.</u>**

Nació en Egipto, estudió y trabajó en Alejandría entre 100 A. C. y 100 D. C. Aplicó las matemáticas a la medida y a los dispositivos mecánicos. Su principal obra es Métrica en 3 volúmenes:

**Vol. I** Áreas de cuadrados, triángulos, rectángulos, trapezoides, polígonos regulares desde 3 hasta 12 lados; áreas y secciones de círculos, elipses, parábolas, esferas, cilindros y conos: Método aproximado para la raíz cuadrada de un entero positivo.

Si $\mathbf{n = ab}$, donde ***a*** esta cerca de ***b***, entonces

$$\sqrt{n} \approx \frac{1}{2}(a+b)$$

$$\left[\ \frac{1}{2}(a+b)\ \right]^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2$$

Si $a \approx b$ , entonces

$$\left[\ \frac{1}{2}(a+b)\ \right]^2 \approx \frac{1}{4}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}ab = ab = n$$

Si $a_1 = \frac{1}{2}(a+b)$ se puede mejorar la aproximación con

$a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + \frac{n}{a_1})$ y el proceso se puede continuar hasta la aproximación que se desee.

Ejemplo : $\sqrt{6}$ , $6 = 3 \cdot 2$; $a = 3$; $b = 2$

$$\therefore \sqrt{6} \approx \frac{1}{2}(3+2) = 2.5 = a_1$$

$a_2 = \frac{1}{2}\ 2.5 + \frac{6}{2.5} = \frac{1}{2}(4.9) = 2.45$ correcto a 2 decimales.

**Volumen II.** Volúmenes de cilindros, conos, paralepípedos, prismas, pirámides completas y truncadas, esferas, toros, prismatoides y los 5 sólidos regulares.

**Volumen III.** División de áreas y volúmenes en partes proporcionales.

Otros trabajos de Herón son:

**Pneumática.** Descripciones de juguetes y máquinas, como sifones, órganos de viento y abre-puertas.

**Dioptra.** Descripción y uso de instrumentos de medición de terrenos.

**Catoptrica.** Propiedades elementales de espejos.

## 5.9 DIOFANTO.

Nació en el siglo III de nuestra era. Estudió en Alejandría. Sus trabajos contribuyeron al desarrollo del álgebra e influyeron en los investigadores de la **Teoría de Números** a partir del siglo XVIII (Fermat, Euler y Lagrange).

Su obra principal es Aritmética; consta de 13 libros, de los cuales existen actualmente 6 que contienen 130 problemas que conducen a ecuaciones de 1º y 2º grado y un tipo de ecuaciones cúbicas. Incluye ecuaciones consistentes e indeterminadas, en las cuales solo permite soluciones racionales positivas. A estos problemas se les llama Diofantinos.

Por ejemplo:

**1.** El problema 7 del libro III dice: Encontrar 3 números en progresión aritmética tal que la suma de cada pareja de ellos, sea un número cuadrado.

La solución que da Diofanto es: $\frac{241}{2}, \frac{1681}{2}, \frac{3121}{2}$

**2.** El problema 10 del libro IV dice: Encontrar dos números tales que su suma sea igual a la suma de sus cubos.

La solución de Diofanto es: $\frac{5}{7}; \frac{8}{7}$



**3.** El problema 1 del libro VI dice: Encontrar una terna pitagórica tal que la hipotenusa menos cada uno de los catetos, sea un cubo.

La solución de Diofanto es: **(40, 96, 104)**.

Otros trabajos de Diofanto son Números Poligonales, y Porismas.

En 1842, G. Nesselman clasificó en 3 etapas el desarrollo histórico del álgebra:

**1. Álgebra Retórica.** Aparecida antes de Diofanto, en la cual los problemas algebraicos se plantean y se resuelven en prosa.

**2. Álgebra Sintetizada.** Empieza con Diofanto, en la cual se utilizan abreviaciones para las incógnitas y las operaciones.

**3. Álgebra Simbólica.** A partir del siglo XVI, en la cual se utilizan símbolos simples para representar incógnitas y operaciones.

## 5.10 PAPPUS.

Nació en Alejandría en el año 300 D. C.; 500 años después de Apolonio y en plena decadencia del período oscuro, Pappus rinde un homenaje póstumo a los geómetras griegos en su obra de 8 libros ***Mathematical Collection***, donde se refiere a los trabajos de más de 30 personajes del período griego. Principalmente, critica y amplía las obras de Euclides, Arquímedes y Apolonio.

Después de Pappus, hubo algunos comentaristas hasta el siglo V, entre los cuales se menciona a Theon de Alejandría, Hypatia (hija de Theon), Proclus, Simplicius y Futocius.

## 5.11 HYPATIA.

Hypatia es la primera mujer matemática que se menciona en la historia de las matemáticas; vivió en Alejandría del año 360 al 415 de nuestra era, en los últimos años del Imperio Romano. Representa el fin de la ciencia antigua porque la decadencia científica durante el Imperio Romano se agudizó durante el Imperio Árabe no habiendo avances importantes durante los siguientes mil años.

Theon educó a Hypatia enseñándole el arte de la oratoria y la enseñanza, compartiendo con ella sus conocimientos y trabajos de matemáticas. La casa de Hypatia en Alejandría se convirtió en un centro intelectual donde enseñaba filosofía, matemáticas, astronomía y mecánica. La mayoría de sus trabajos fueron libros de texto para sus alumnos; sin embargo, como comentarista de la época de oro de los griegos, realizó un magnífico trabajo sobre la ***Aritmética*** de Diofanto.

También escribió acerca de las secciones cónicas de la obra de Apolonio de Perga, y fue hasta el siglo XVII cuando los matemáticos del Renacimiento, especialmente Fermat y Descartes, así como el astrónomo Johann Kepler, se dieron cuenta de la importancia de estas curvas planas. Además trabajó con su padre Theon en los ***Elementos*** de Euclides, mejorando notablemente esta obra, para la enseñanza.

Se interesó en la mecánica, fabricando aparatos para medir niveles y para la destilación del agua, así como un hidrómetro para medir la densidad de ésta. En marzo del año 415 de nuestra era, Hypatia fue asesinada por monjes fanáticos de la Iglesia de San Cyrilo de Jerusalem, terminando así la enseñanza platónica en Alejandría y en el Imperio Romano.

La Escuela de Atenas luchó contra la creciente oposición de los cristianos hasta el año 529 cuando cerró sus puertas por decreto del emperador Justiniano. La escuela de Alejandría continuó parcialmente hasta el año 641, cuando los árabes ocupan la ciudad y terminan con la Escuela.



## EJERCICIO 7. MATEMÁTICOS GRIEGOS DESPUÉS DE EUCLIDES.

**1.** Verificar el siguiente resultado establecido por Arquímedes : El volumen de una esfera es **2/3** del volumen del cilindro circunscrito.

**2.** Demostrar que el área de una esfera es igual a **2/3** del área total del cilindro circunscrito.

**3.** Los arbelos son figuras geométricas construidas de la siguiente manera: Sean **A**, **C** y **B** tres puntos sobre una recta, con **C** entre **A** y **B**. Se trazan semicírculos del mismo lado de la recta con **AC**, **BC** y **AB** como diámetros. El arbelo es la figura limitada por los tres semicírculos. Demostrar que el área del arbelo es igual al área del círculo con **CG** como diámetro, donde **G** es el punto de intersección de la perpendicular de **AB** que pasa por **C** y el semicírculo de diámetro **AB**.

**4.** Aplicar el método de la Criba de Eratóstenes para encontrar los números primos menores que **300**.

**5.** Encontrar la densidad de los primos $\frac{A_n}{n}$, para $n = 300$ ', $10^8$ y $10^9$, donde $A_n$ es el número de primos menores que **n**. Comparar las densidades encontradas con la inversa del logaritmo natural de **n** para verificar el teorema de Hadamard.

**6.** Demostrar que siempre es posible encontrar **n** enteros consecutivos que no sean primos para todo entero positivo **n** mayor que **1**. Sugerencia: Probar **(n + 1)! + I, para i = 2, 3, 4, ... , n, n + 1**

**7.** Determinar en que año nació una persona del siglo XIX (entre 1800 y 1900), si cumplió **x** años el año $x^2$, único año que es número cuadrado de ese siglo.

**8.** Encontrar la raíz cuadrada de **15** por el método de aproximación de Herón :

$$\sqrt{n} = \sqrt{ab} \approx \frac{1}{2}(a+b) = a_1; \quad \sqrt{n} \approx \frac{1}{2}\left( a_1 + \frac{n}{a_1}\right)$$

**9.** Verificar la respuesta diofantina: $\frac{241}{2}, \frac{1681}{2}, \frac{3121}{2}$ al problema 7 de su libro III: "Encontrar tres números en progresión aritmética tales que la suma de cualquier pareja de ellos sea un número cuadrado".

**10.** ¿Cuántas manzanas se reparten entre 6 personas si las primeras 4 reciben $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ y $\frac{1}{8}$ del total, la quinta recibe 10 y queda **1** para la sexta persona?

**11.** Si **m** y **n** son dos números racionales positivos cuya diferencia es **1** y si **x**, **y** y **a** son racionales positivos tales que $x + a = m^2$ ; $y + a = n^2$ , demostrar que $xy + a$ es el cuadrado de un número racional.