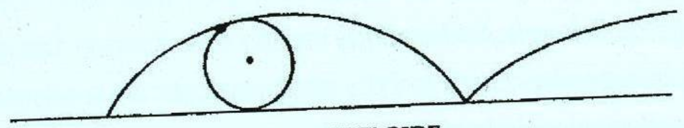
En 1654, tuvo un accidente en el que los caballos de su carro saltaron el parapeto del puente de Neuilly y Pascal lo consideró un *aviso divino* de que sus actividades no eran agradables a Dios.

En 1658 volvió brevemente a las matemáticas por 8 días. Desarrolló la geometría de la curva cicloide y resolvió problemas que al publicarse como conjeturas, causaron serias dificultades a los matemáticos.

Pascal ha sido considerado como uno de los más grandes que pudieron haber sido, pero sus serios problemas de salud, su corta vida y su neurosis mental religiosa se lo impidieron.



CICLOIDE

CICLOIDE. Curva generada en un plano por un punto de un círculo que se desplaza girando sobre una línea recta.

HIPO-CICLOIDE. Curva generada en un plano por un punto de un círculo que se desplaza girando por el interior de otro círculo mayor.

EPI-CICLOIDE. Curva generada en un plano por un punto de un círculo que se desplaza girando sobre el exterior de otro círculo fijo.

Estas curvas tienen importantes propiedades físicas y matemáticas y su estudio posterior a través del Cálculo tiene aplicaciones a las maquinarias industriales.

7.7 <u>RENÉ DESCARTES</u> (1596 - 1650)

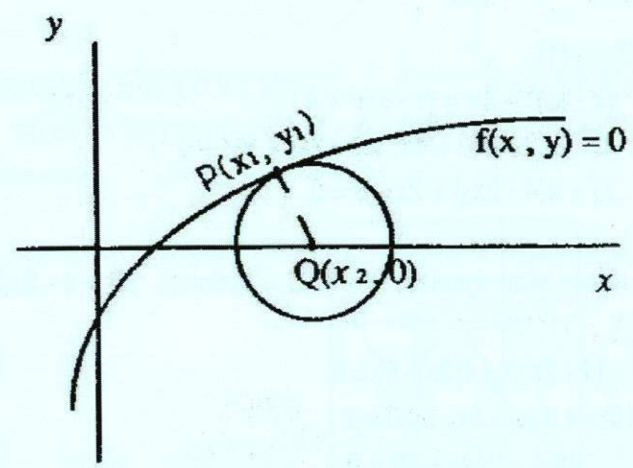
Nació en Tours, Francia. A los 8 años fue internado en la escuela jesuita de La Flèche donde inició su costumbre, al principio por enfermedad, de permanecer en cama casi toda la mañana, meditando sobre sus inquietudes científicas; a los 16 años dejó la escuela y se fue a París a estudiar matemáticas; a los 21 años ingresó al ejército. Posteriormente renunció a la vida militar y viajó 5 años por Alemania, Dinamarca, Holanda, Suiza e Italia. Regresó a París a continuar sus estudios de matemáticas y Filosofía, dedicándose por un tiempo a fabricar instrumentos ópticos. Volvió a Holanda por 20 años, dedicándose a la filosofía y las matemáticas. En 1649 fue a Suecia por invitación de la Reina Cristina, donde murió en 1650 de una pulmonía.

Durante sus primeros 4 años en Holanda escribió ***Le Monde***, un libro sobre el universo. Después escribió un tratado filosófico de Ciencia Universal titulado ***Discourse de la Methode pour bien Conduire la Raison et chercher la Verité dans les Sciences*** (Descripción del método para conducir bien la razón y buscar la verdad en las ciencias).

Esta obra contiene 3 apéndices: **La Dioptrique**, **Les Metéores** y **La Geometrie,** y fue publicada en 1637. El último de los apéndices está considerado como el primer tratado formal de geometría analítica. Contiene 100 páginas divididas en 3 partes:

1. Geometría Algebraica. Fundamentos de Geometría Analítica.

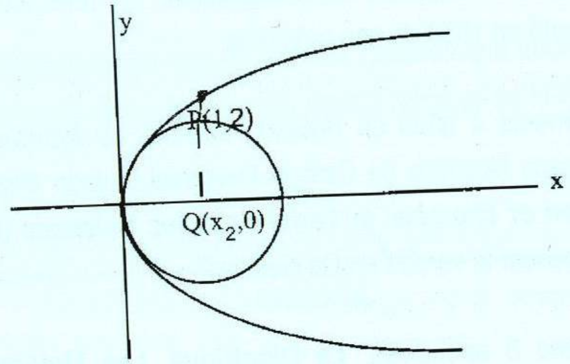
2. Clasificación de curvas y un método para trazar tangentes a curvas cuadráticas en un punto P(x1, y1)



Para encontrar la tangente a la curva de **f(x, y) = 0** en el punto **P(x_1, y_1),** Descartes considera la familia de círculos con centro en el eje x que pasan por P(x_1, y_1) y encuentra el círculo de esta familia que al intersectarse con la curva, tenga al punto P como único punto de contacto. Entonces

$\overline{QP}$ determina la normal a la curva, de manera que la tangente resulta determinada por su pendiente $m_T = -\dfrac{1}{m_N}$.

Por ejemplo: Encontrar la tangente a la parábola $y^2 = 4x$ en el punto **P(1, 2)**



Solución. Ecuación de la familia de círculos con centro en el eje *x*; **Q(x_2, 0)** que pasan por **P(1, 2)**

$$r = \sqrt{(1-x_2)^2+4} \quad ; \; c\,(x_2, 0)$$

$$\begin{cases} (x-x_2)^2 + y^2 = (1-x_2)^2 + 4 & (1) \\ y^2 = 4x & (2) \end{cases}$$

Sustituyendo (2) en (1):

$$(x - x_2)^2 + 4x = (1 - x_2)^2 + 4$$
$$x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + 4x = 1 - 2x_2 + x_2^2 + 4$$
$$x_2 + x(4 - 2x_2) + 2x_2 - 5 = 0$$

Para que las 2 raíces sean iguales, $B^2 - 4AC = 0$, donde $B = 4 - 2x_2$; $A = 1$; $C = 2x_2 - 5$

$$\therefore \quad (4 - 2x_2)^2 - 4(2x_2 - 5) = 0$$
$$16 - 16x_2 + 4x_2^2 - 8x_2 + 20 = 0$$
$$4x_2^2 - 24x_2 + 36 = 0$$
$$\div 4 \qquad x_2^2 - 6x_2 + 9 = 0$$
$$(x_2 - 3)^2 = 0$$
$$x_2 = 3$$

P(1, 2) ; Q(3, 0), determinan la normal **N** en **P**

$$m_N = \frac{2}{1-3} = \frac{2}{-2} = 1$$

$$\therefore \quad m_T = 1 \quad ; \quad P(1, 2)$$

$$y - 2 = 1(x - 1) = x - 1$$
$$\boxed{y - x - 1 = 0}$$

3. Trata con la solución de ecuaciones polinomiales de grado mayor que 2 aplicando que lo que ahora conocemos como Regla de Descartes de los signos para la naturaleza de las raíces de la ecuación.

Ejemplo: Determinar la naturaleza de las raíces del polinomio $P(x) = x^7 - 3x^5 - 2x^2 + x + 10 = 0$, aplicando la regla de Descartes de los signos.

Solución:

Número de cambios de signo en **P(x) = 2**

∴ Nº de raíces reales positivas = **2 ó 0** = (Nº de cambios de signo en **P(x)** **2h** ; **h = 0,1,2,3,...**)

$P(-x) = -x^7 + 3x^5 + 2x^2 - x + 10$

Nº de cambios de signo en **P(-x) = 3**

∴ Nº de raíces reales negativas = **3 ó 1** = (Nº de cambios de signo en **P(-x)** **- 2h**; **h = 0,1,2,3,...**)

Además: Nº de raíces complejas = **2, 4 ó 6 = 2h**; **h = 0,1,2,3,...**

Nº total de raíces en los complejos = **7 = n** (grado de la ecuación).

Entonces, las alternativas son:

a) 0(+); 1(-) y 6(c)

o

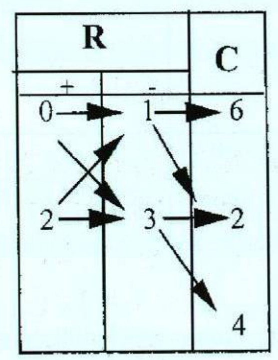
b) 0(+); 3(-) y 4(c)

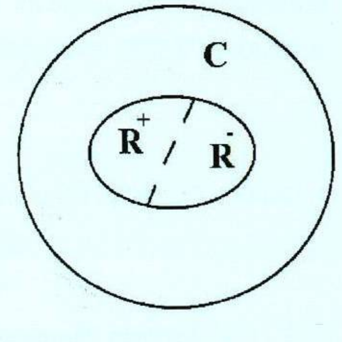
o

c) 2(+); 1(-) y 4(c)

o

d) 2(+); 3(-) y 2(c)





∴ Hay por lo menos 1 raíz real negativa y 2 complejas.

La **Geometrie** no es un desarrollo sistemático del método de la Geometría Analítica, sino que éste se deduce del contenido del texto. Hay 32 figuras sin establecerse explícitamente el sistema de los ejes coordenados. Una traducción al latín en 1649 con notas y comentarios de F. de Beaune y Franz Van Shoocten dieron al texto una amplia aceptación. Cien años después, la Geometría Analítica tomó la forma en que actualmente se encuentra, incluyendo las palabras: coordenadas, abscisa y ordenada, que fueron introducidas por Leibniz en 1692.

7.8 DESARROLLO DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA.

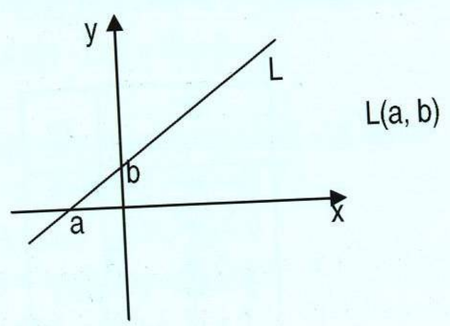
1691 Jakob Bernoulli Introduce las coordenadas polares.

1700 Antoine Parent Desarrolla la Geometría Analítica Sólida.

1731 Alexis Clairaut Describe analíticamente curvas no-coplanares en el espacio.

1790 Se proponen cambios de coordenadas para adecuarlas al tratamiento algebraico de los problemas geométricos.

1829 Julius Plücher Propone la línea recta como elemento fundamental, identificando una recta por sus intersecciones con los ejes, como coordenadas.



En esta geometría, un punto se identifica con la ecuación de la familia de rectas que pasan por él. Plücker demostró el Principio de Dualidad de la Geometría Proyectiva en el que una curva puede considerarse como el lugar geométrico de sus puntos o como la cubierta de sus tangentes.

1843 Arthur Cayley Considera hiperespacios con geometrías ene-dimensionales, **n > 3** puntos

$$d_{\overline{P_1P_2}} = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\ldots+(y_n-x_n)^2}$$

7.9 PIERRE DE FERMAT.

Nació en Toulouse, Francia, en 1601 y murió en Castres en 1665. Abogado, consejero del Parlamento de Toulouse, dedicó su tiempo libre a las matemáticas. Aún cuando publicó muy poco durante su vida, sostuvo correspondencia con los mejores matemáticos de su época, influyendo en sus investigaciones y contribuyendo a diversas ramas de las matemáticas, por lo que se le considera el mejor matemático francés del siglo XVII.

Desarrolló la Geometría Analítica simultáneamente que Descartes en un libro que fue publicado después de su muerte con el título: ***Isogoge ad Locus Planos et Solidos*** que contiene las ecuaciones generales de rectas y círculos y una discusión de parábolas, elipses e hipérbolas. Considera las ecuaciones y estudia el lugar geométrico correspondiente, mientras que Descartes empieza con un lugar geométrico para encontrar su ecuación. Estos son los 2 aspectos inversos de la **Geometría Analítica**. Fermat escribió con una notación anticuada, mientras que Descartes utilizó simbolismo moderno.

Las contribuciones de Fermat a la Teoría de Números muestran una gran habilidad e intuición inspirado en la ***Arithmetica*** de Diofanto. Algunas de éstas son las siguientes:

1. Pequeño Teorema de Fermat. Si **P** es primo y **a** es relativamente primo con **P**, entonces $\mathbf{a^{P-1} - 1}$ es divisible por **P**.

2. Todo número primo mayor que 2 puede expresarse en forma única como una diferencia de cuadrados.

3. Todo número primo de la forma **4n +1** puede expresarse como la suma de dos cuadrados. Este teorema fue demostrado por Euler en 1754, quien además demostró que la representación es única.

4. Todo entero no-negativo puede representarse como la suma de 4 ó menos cuadrados (Demostrado por Lagrange en 1770).

5. El área de un triángulo rectángulo de lados enteros no puede ser un cuadrado.

6. No hay enteros positivos **x, y, z,** tales que $x^4 + y^4 = z^2$.

7. Último Teorema de Fermat. *No hay enteros positivos* ***x, y, z,*** *tales que* $x^n + y^n = z^n$, *para* $n > 2$. Este teorema permanecía como conjetura hasta la actualidad, pero acaba de ser demostrado por Willis.

Fermat lo demostró para **n = 4**.

Euler lo demostró para **n = 3**.

1816-18 **La Academia de París** ofrece premiar la primera demostración completa del teorema.

1825 **Legendre y Dirichlet** lo demostraron para **n = 5**.

1839 **Lamé** lo demostró para **n = 7**.

1843 **E. Kummer**, desarrolla la Teoría de Ideales y lo demuestra para todo **n** primo regular. (Números de Jakob Bernoulli).

1908 **Paul Wolfskehl** ofrece 100,000 marcos de premio a la primera prueba completa del teorema. Este teorema es el que tiene el mayor número de demostraciones incorrectas publicadas.

8. $f(n) = 2^{2^n} + 1$ es primo para todo entero no-negativo **n**. Fermat estableció esto como conjetura y Euler mostró que para **n = 5, f(5)** no es primo, **f(5) = 4,294'967,297 = (641) (6'700,417).**

7.10 ACADEMIAS, SOCIEDADES Y REVISTAS.

Las academias de matemáticas surgieron de grupos que se reunían periódicamente para discutir trabajos escolares.

1560 NÁPOLES. Primera academia de matemáticas.

1603 ROMA. Academia *Dei Lincei.*

1662 LONDRES. Royal Society.

1666 PARÍS. French Academy.

REVISTAS. Hasta 1700 hubo 17 revistas con artículos de matemáticas, la primera de las cuales es de 1665.

1700-1800. 210 nuevas revistas de matemáticas.

1800-1900. 950 nuevas revistas de matemáticas.

La mayoría se dedicaba a matemáticas elementales, paradojas y matemáticas recreativas. La primera revista dedicada a matemáticas avanzadas exclusivamente fue el ***Journal de L'ècole Polythecnique,*** iniciada en 1794.

Algunas de las revistas actuales de matemáticas superiores se iniciaron a mediados del siglo XIX.

Por ejemplo:

1836 Journal de Mathematiques Pures et Apliquees.

1839 Cambridge Mathematical Journal. Esta revista cambió en:

1855 Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics.

1872 Bulletín de la Sociétè Mathematique de France.

1865 Proceedings of the London Mathematical Society.

1878 American Journal of Mathematics (Editado por J. Sylvester).

1887 Rediconti del Circolo Matematico de Palermo.

1888 Bulletín of the American Mathematics Society.

Actualmente, la mayoría de los países tienen sociedades matemáticas y revistas.

En México, la Sociedad Matemática Mexicana se inicia en 1943, realizando congresos, publicando su revista y apoyando el desarrollo de las matemáticas.

La Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas inicia sus actividades en 1968, convocando a congresos regionales y nacionales, publicando su revista e impulsando las matemáticas desde el nivel medio.

<u>EJERCICIO 9.</u> PASCAL, DESCARTES Y FERMAT.

1. Demostrar que la suma de los elementos de cualquier diagonal del Triángulo Aritmético de Pascal es igual al doble de la suma de los elementos de la diagonal anterior.
Sugerencia: Desarrollar $(1+1)^n$.

2. Sea **Amn** el elemento en la hilera **m** y la columna **n** del *Triángulo Aritmético* de Pascal. Demostrar que **Amn = A((m - 1)n + Am(n - 1).** (Aplicar la definición).

3. Aplicando las leyes de exponentes y la definición de logaritmo en base a establecer las siguientes propiedades: (Napier).

1) $\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$ 2) $\log_a \sqrt[t]{m} = \frac{1}{t}\log_a m$

4. Utilizando la regla de Descartes de los signos, determinar la naturaleza de las raíces de la ecuación:

$$x^9 + 3x^8 - 5x^3 + 4x + 6 = 0$$

5. Aplicando la regla de Descartes de los signos, verificar que la ecuación $x^5 + x^2 + 1 = 0$ tiene una raíz real negativa y cuatro raíces complejas.

6. Por el método de Descartes, encontrar la tangente a la parábola $y^2 = 4x + 1$ en el punto **P(0,1).** Graficar y verificar el resultado por cálculo diferencial.

7. Encontrar la ecuación en coordenadas polares del folio de Descartes $x^3 + y^3 = 3axy$. Graficarlo para $a = 2$.

8. Haciendo $y = tx$, encontrar las ecuaciones paramétricas del folio de Descartes, en términos del parámetro **t**.

9. Graficar el cardioide $r = a(1 - \cos\Theta)$, para $a = 2$. Encontrar su ecuación en coordenadas cartesianas.

10. Para $a = 2$, graficar la espiral de Arquímedes $r = a\Theta$. Encontrar su ecuación en coordenadas cartesianas.

11. Encontrar los primos de Fermat $2^{2^n} + 1$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

12. Si $\Phi(n)$ = Número de enteros positivos menores que **n**, y relativamente primos con **n**, encontrar $\Phi(n)$ para $n = 2, 3, 4, ..., 15$. $\Phi(p) = ?$, para cualquier **p** primo.

13. Aplicando el teorema $\Phi(ab) = \Phi(a)\,\Phi(b)$ para todo **a** y **b** relativamente primos y mayores que **1**, encontrar: $\Phi(120)$, $\Phi(154)$, $\Phi(504)$, $\Phi(111{,}030)$, $\Phi(180{,}180)$.