CAPÍTULO 8.

ORIGEN Y DESARROLLO DEL CÁLCULO.

8.1 ANTECEDENTES:

1. PARADOJAS DE ZENÓN. (450 A. C.)

Como ya fue considerado en la historia de las matemáticas griegas, estas paradojas surgen del principio de la subdivisión infinita y la hipótesis falsa de que toda suma infinita de números positivos es infinita.

2. MÉTODO EXHAUSTIVO DE EUXODUS.

Este método de aproximación sucesiva fue utilizado para calcular áreas y volúmenes desde la época de Eudoxus y Arquímedes, aplicando el principio de la subdivisión infinita, acercándose notablemente a la integración actual.

8.2 ORIGEN DE LA INTEGRACIÓN EN EUROPA. KEPLER.

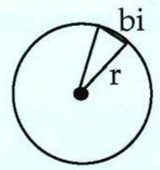
Una traducción de los manuscritos de Arquímedes encontrados en Constantinopla, fue revisada por Johann Muller e impresa en 1540 y a principios del siglo 17 fue difundida entre los matemáticos europeos que empezaron a desarrollar las ideas de Arquímedes.

Johann Keppler (1571-1630) desarrolló un proceso de integración para calcular áreas y volúmenes relacionados con las leyes del movimiento planetario. Para calcular el área de un círculo, Kepler consideraba a la circunferencia como el perímetro de un polígono regular de un número infinito de lados. Cada uno de estos lados es la base de un triángulo con vértice en el centro del círculo. Entonces, el área del círculo es la suma infinita de estos triángulos infinitesimales, todos ellos con altura igual al radio **r** del círculo.

Área de cada triángulo infinitesimal = $\frac{1}{2}br$

$\therefore$ Área del círculo $= \frac{1}{2} r \sum_{i=1}^{\infty} b_i$

$A = \frac{1}{2} rC$



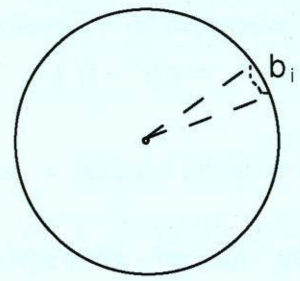
Ahora, $C = \pi d = 2\pi r$

$\therefore$ $A = \pi r^2$

De manera similar, el volumen de una esfera lo consideró como la suma de los volúmenes de conos circulares con vértice en el centro de la esfera y base un círculo infinitesimal en la superficie de la esfera.

Volumen de un cono infinitesimal $= \frac{1}{3}br$

Volumen de la esfera $= \frac{1}{3} r \sum_{i=1}^{\infty} b_i$



$$V = \frac{1}{3} rS = \frac{1}{3} r\, 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

8.3 BONAVENTURA CAVALIERI. (1598- 1647).

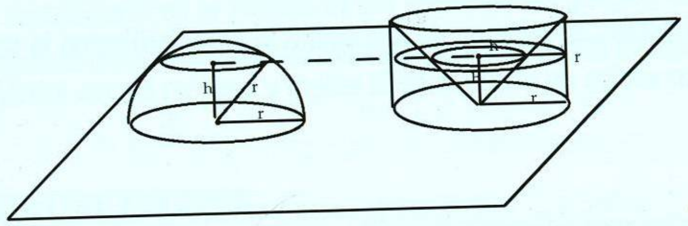
Profesor de matemáticas en la Universidad de Bologna desde 1629 hasta su muerte. Escribió sobre matemáticas, óptica y Astronomía.

Su principal trabajo en matemáticas fue ***El método de los indivisibles*** publicado en 1635, basado en el siguiente *Principio de Cavalieri* :

1. Si dos piezas planares son tales que, al colocarlas entre 2 líneas paralelas en un plano, cualquier recta paralela a estas 2 líneas limitantes corta segmentos de igual longitud en las 2 piezas, entonces sus áreas son iguales.

2. Si dos sólidos se colocan entre 2 planos paralelos y si cualquier plano paralelo a estos 2 planos limitantes, corta secciones iguales en área en los sólidos, entonces sus volúmenes son iguales.

Ejemplo: Para encontrar el volumen de una esfera, se colocan una semiesfera de radio **r** y un cilindro circular de radio **r** y altura **h**, al cual se le quita un cono con base en la cara superior del cilindro y vértice en el centro de la base del cilindro.



Si cortamos ambos sólidos con un plano paralelo al plano base a una altura **h**, se tiene:

a) Sección en la semiesfera = Círculo de radio $r_1 = \sqrt{r^2 - h^2}$

$\therefore$ Área $A_a = \pi(r^2 - h^2)$.

b) Sección en el cilindro rebajado = Aro con círculo interior de radio h y círculo exterior de radio r.

$\therefore$ **Área** $\mathbf{A_b = \pi r^2 - \pi h^2 = \pi(r^2 - h^2)}$

Entonces: $\mathbf{A_a = A_b}$ y por el principio de Cavalieri, los 2 sólidos tienen el mismo volumen.

$\therefore$ Volumen de la semiesfera = Volumen del cilindro menos Volumen del cono.
$(V_{se} = V_{ci} - V_{co})$

$$\therefore \quad V_e = 2\left(\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3\right)$$

$$= 2\left(\frac{2}{3}\pi r^3\right)$$

$$V_e = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Procesos similares al método de los indivisibles fueron utilizados por Torriceli, Fermat, Pascal y Barrow.

8.4 <u>ORIGEN DE LA DERIVACIÓN.</u>

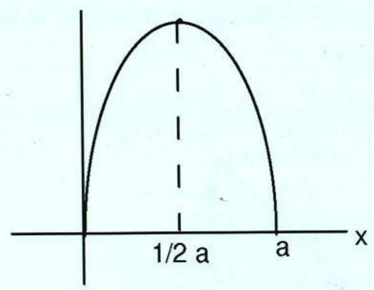
La derivación surgió prácticamente de los problemas de determinar tangentes a curvas y máximos y mínimos de funciones. Aunque estos problemas fueron considerados desde la época de los griegos, la primera anticipación notable del método de derivación la proporcionó Fermat al desarrollar en 1629 el siguiente método para determinar máximos y mínimos de funciones de una variable.

SI **f (x)** tiene un máximo (o mínimo) en **x**, entonces **f (x-e)** es "casi igual" a **f (x)** si **e** es un número *muy pequeño.* Por lo tanto, haciendo **f (x-e) = f (x),** simplificando y después asignando a **e** el valor cero, se encuentran los valores de **x** que corresponden a máximo o mínimo de **f (x).**

Ejemplo: Dividir el número **a** en 2 partes tales que su producto sea máximo.

Solución. Sean **x** y **(a-x)** las 2 partes.

Maximizar: $\mathbf{f(x) = x(a - x)}$
$\mathbf{f(x) = ax - x^2}$



Proceso de Fermat:

1. $\mathbf{f(x - e) = a(x - e) - (x - e)^2}$
$\mathbf{= ax - ae - x^2 + 2ex - e^2}$

2. Hagamos $\mathbf{f(x - e) = f(x)}$

$$ax - x^2 + 2ex - ea - e^2 = ax - x^2$$

$$\div\ e \neq 0 \quad 2ex - ea - e^2 = 0$$

$$2x - a - e = 0$$

3. Ahora, haciendo $\mathbf{e = 0}$:

$$2x - a = 0$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}\,a}$$

Puesto que debe haber un máximo **f (x)** y $x = \frac{1}{2}$ a es el único posible máximo o mínimo, entonces corresponde al máximo y las partes son **1/2 a** y **1/2 a**.

Por el método actual del cálculo:

Máx. $\mathbf{f(x) = ax - x^2}$

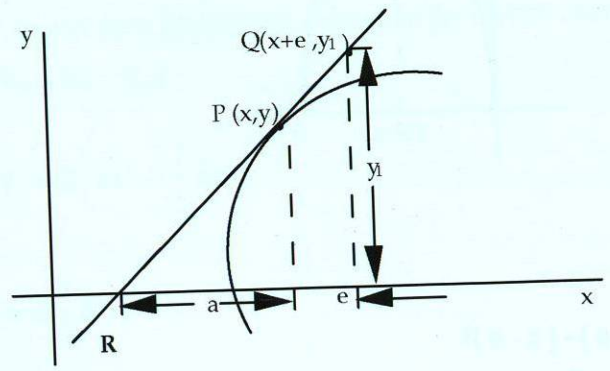
$\mathbf{f'(x) = a - 2x = 0}$ **p.c.t.h.**

$$\therefore \quad \boxed{x = \frac{1}{2}\,a}$$

$\mathbf{f''(x) = -2 < 0} \Rightarrow$

$\therefore \quad x = \frac{1}{2}a$ corresponde a Máx **f (x)**

Fermat también desarrolló un método para encontrar la tangente a una curva en un punto dado P, a partir de su ecuación cartesiana:



Sea **a** = sub-tang. de **f (x,y) = 0** en **P**.

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{y_1}{a+e} = \frac{y}{a} \Rightarrow y_1 = \frac{a+e}{a}\,y = y\left(1 + \frac{e}{a}\right)$$

Si **e** es "muy pequeño", entonces **Q** está *casi* en la curva de **f(x, y) = 0**. Considerando provisionalmente que **Q** está en la curva, se tiene:

$$\mathbf{f(x+e),\ y\ (1 + e/a) = 0}$$

Simplificando y haciendo después **e = 0** para que la ecuación sea correcta, se encuentra **a** en términos de las coordenadas de **P**.

Ejemplo: Encontrar la sub-tangente en cualquier punto del folio de Descartes:

$$\mathbf{x^3 + y^3 = nxy}$$

Solución: En $\mathbf{Q\,(x + e,\ y\,(1 + e/a))}$: $(x + e)^3 + y^3(1 + e/a)^3 - n(x + e)y(1 + e/a) = 0$

$$\cancel{x^3} + 3x^2e + 3xe^2 + e^3 + \cancel{y^3} + \frac{3e}{a}y^3 + \frac{3e^2}{a^2}y^3 + \frac{e^3}{a^3}y^3$$

$$- \cancel{nyx} - nye - \frac{ne}{a}yx - \frac{ne^2}{a}y = 0$$

Dividiendo entre $\mathbf{e \neq 0}$:

$$3x^2 + \frac{3}{a}y^3 - \frac{n}{a}xy - ny + e\left(3x + \frac{3}{a^2}y^3 - \frac{n}{a}y\right) + \left(1 + \frac{1}{a^3}y^3\right) = 0$$

Para $\mathbf{e = 0}$:

$$3x^2 - ny = \frac{nxy}{a} - \frac{3y^3}{a}$$

$$\therefore \quad \boxed{a = \frac{nxy - 3y^3}{3x^2 - ny}}$$

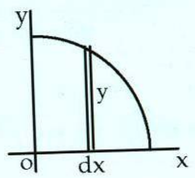
8.5 JOHN WALLIS (1616 - 1703).

Profesor de matemáticas en Oxford durante 54 años, desde 1649 hasta su muerte. Fue el primero en considerar las cónicas como ecuaciones de segundo grado.

En 1656 publicó su libro ***Arithmetica Infinitorum*** en el que amplía y sistematiza los métodos de Descartes y Cavalieri. Induce resultados como los siguientes (en notación actual):

$$\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{m+1}$$, para toda **m** racional diferente de **-1**.

Explica completamente el significado de los exponentes negativos, cero y fraccionarios e introduce el símbolo actual ∞ para infinito. Determina el número π, encontrando el área de un cuadrante del círculo $x^2 + y^2 = 1$, lo cual equivale a evaluar



$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

En 1673 escribió el primer libro inglés importante, sobre historia de las matemáticas, publicado en 1685 con el título : ***De Algebra Tractatus Historicus et Practicus***. En este libro presenta una interpretación gráfica de las raíces complejas de las ecuaciones cuadráticas. Fue miembro fundador de la Royal Society.

ISAAC BARROW (1630 - 1677).

Graduado en Cambridge con honores en Matemáticas, fue el primero en ocupar la plaza de la fundación Henry Lucas, renunciando en 1669 para pasar su lugar a su discípulo Isaac Newton.

Su principal obra es un libro publicado en 1669 con el título ***Lectiones Opticae et Geometricae*** en el que se aproxima al actual proceso de diferenciación al determinar tangentes a curvas. Establece que la derivación y la integración son procesos inversos.

RESUMEN. Hasta este momento del cálculo se han realizado integraciones para obtener áreas y volúmenes, y derivaciones para encontrar máximos y mínimos y tangentes a curvas con una idea informal del concepto de límite. Lo que falta es la creación de un simbolismo general y completo y un conjunto de reglas analíticas y conceptos formales, lo cual fue realizado por Newton y Leibiniz. Cien años después, el analista francés Agustín Louis Cauchy estableció las bases rigurosas para la formalización de los conceptos fundamentales del Cálculo, en el siglo XIX.

8.6 ISAAC NEWTON (1642 - 1727)

Hijo de un granjero que murió antes de que él naciera, y que esperaba que se dedicara a la granja; desde niño mostró gran habilidad y entusiasmo para los modelos mecánicos y los experimentos. Construyó un molino de juguete que convertía el trigo en harina, usando un ratón como fuerza motriz y un reloj de madera accionado por una corriente de agua.

En 1660, entró al Trinity College de Cambridge, interesándose por las matemáticas al leer los ***Elementos*** de Euclides, que encontró claros, y la ***Geometrie*** de Descartes, que le pareció oscura y algo difícil. También estudió los trabajos de Viète y de Kepler y la ***Aritmética Infinitorum*** de Wallis. En 1665, a los 23 años, estableció el **Teorema General del Binomio** y desarrolló el **Método de la fluxiones** que ahora conocemos como Cálculo Diferencial.

Los siguientes 2 años los pasó en su granja por una epidemia que obligó a cerrar la Universidad. Entonces, trabajó en experimentos de óptica y desarrolló la **Teoría de la Gravitación**. Regresó a Cambridge y continuó sus investigaciones de óptica, iniciando su carrera como profesor de Física y Matemáticas de 1669 a 1687.

En 1675 envió a la Royal Society su **Teoría Corpuscular de la luz**. De 1673 a 1683 enseño álgebra y Teoría de ecuaciones. En 1684, Edmund Halley visitó a Newton para discutir la ley de la fuerza que hace que los planetas se muevan en órbitas elípticas alrededor del sol. El trabajo de Newton en este asunto aparece en el primero de los tres libros de su ***Principia_Mathematica***, editado por cuenta de Halley en 1687 y que tuvo aceptación en toda Europa.

De 1692 a 1694 padeció una enfermedad mental, después de lo cual se dedicó a la química y a la teología, de manera preponderante.

En 1703 fue elegido presidente de la Royal Society y en 1705 fue nombrado Caballero del Rey. Sus principales trabajos fueron publicados mucho después de su realización:

1687 ***Philosophiae Naturalis. Principia Mathematica.***

1704 ***Opticks.***

1707 ***Arithmetica Universalis.***

1711 ***Analysis per Series, fluxiones et Methodus Dfferentialis.***

1729 ***Lectiones Opticae.***

1736 ***The Method of Fluxions and Infinite Series.***

Este libro fue escrito por Newton en 1671 y publicado después de su muerte. En él, Newton considera las curvas generadas por el movimiento continuo de un punto cuya abcisa y ordenada son en general, cantidades variables. A una cantidad variable le llama *"fluente"* (Cantidad que fluye) y a la velocidad de cambio le llama la *"fluxión" del fluente.* Si un fluente, tal como la ordenada de un punto que genera una curva, la representa por **y**, entonces la fluxión correspondiente la representa por $\dot{y}$, y la fluxión de $\dot{y}$ la representa por $\ddot{y}$. Se consideran 2 tipos de problemas:

1. Dada una relación entre 2 ó más fluentes, encontrar una relación entre estos fluentes y sus fluxiones (Derivación).

2. Dada una relación entre los fluentes y sus fluxiones, encontrar una relación entre los fluentes solamente (Solución de ecuaciones diferenciales).

Introduce el concepto de límite y aplica el método de fluxiones para determinar máximos y mínimos, tangentes, curvaturas, puntos de inflexión y concavidad de curvas. Realiza integraciones, resuelve ecuaciones diferenciales y encuentra un método de aproximación para encontrar raíces reales de una ecuación algebraica ó trascendente por diferenciales, conocido como Método de Newton.

En su libro ***Arithmetica Universalis***, demuestra que las raíces complejas de un polinomio con coeficientes reales, aparecen por pares conjugados y la regla para la multiplicidad de las raíces en términos de los coeficientes del polinomio.

8.7 GOTTFRIED W. LEIBNIZ. (1646 - 1716)

Nació en Leipzig, Alemania. Aprendió a leer latín y griego desde niño y antes de los 20 años dominaba las matemáticas, filosofía, teología y leyes. Debido a su corta edad, la Universidad de Leipzig se negó a otorgarle el grado de doctor, por lo que se trasladó a Nuremberg donde se graduó con una brillante tesis sobre la enseñanza de leyes por el método histórico. Entonces, inició su carrera diplomática en Mainz y Hannover por el resto de su vida. En 1666 desarrolló su ***Characteristica Generalis*** conteniendo matemáticas generales que posteriormente florecieron en la lógica simbólica de George Boole (1815 - 1864), y en 1910 en la obra ***Principia Mathematica*** de Bertrand Russell.

En 1672, estando en París en misión diplomática, dio lecciones de matemáticas al científico Christian Huygens y en 1673; estando en Londres en misión política presentó su máquina calculadora a la Royal Society y sus fórmulas de derivación con una notación que en la actualidad se sigue utilizando.

De 1682 a 1692 editó una revista titulada ***Acta Eruditorum*** en la cual se publicaron la mayor parte de sus trabajos de matemáticas. En 1700 fundó la **Academia de Ciencias de Berlín**.

En los últimos 7 años de su vida, se vio envuelto en la controversia con Newton sobre quien había sido el "inventor" del cálculo. En 1714 fue cesado de su trabajo por el primer rey alemán de Inglaterra y 2 años después, en 1716, murió abandonado, siendo acompañado en su funeral únicamente por su secretario.

Desarrolló su teoría de la lógica matemática y un método simbólico con reglas formales para sistematizar los razonamientos, reduciendo el esfuerzo mental. Estableció las propiedades fundamentales de la suma lógica, multiplicación, negación e inclusión y observó la semejanza entre las propiedades de inclusión de conjuntos y la implicación de proposiciones.

Inventó su cálculo entre 1673 y 1676. En 1675 utilizó el signo actual de integral como una ese alargada $\int$ para denotar la suma infinita de los indivisibles de Cavalieri. Además introdujo los símbolos actuales de diferenciales y derivadas, así como los integrales $\int y\,dx$; $\int x\,dy$

Su primer trabajo de Cálculo apareció publicado en 1684, donde considera a **dx** como un intervalo finito y define **dy** por la proporción: $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{\text{subtangente}}$

Obtuvo la mayoría de las reglas de derivación que se utilizan actualmente y una regla para obtener la enésima derivada de un producto de 2 funciones que se conoce como **Regla de Leibniz**. Su notación es mejor que la notación fluxional de Newton. Sin embargo, Inglaterra conservó la notación de Newton hasta el siglo XIX.

Inició la teoría de los determinantes en 1693, al considerarlos en relación con los sistemas de ecuaciones lineales, aunque 10 años antes, el matemático japonés Seki Kowa había hecho consideraciones similares.

Realizó la generalización del **Teorema del binomio** al **Teorema multinomial** para el desarrollo de $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^n$.

Nota: El primer texto de cálculo que tuvo amplia difusión y aceptación en Europa fue editado y obsequiado por el Marqués de L'Hôpital en 1696 de las notas de clase de su maestro, Johann Bernoulli. En este libro aparece la Regla de **L'Hôpital** para encontrar el límite de una fracción de

funciones elementales, donde el numerador y el denominador tienden a **0** ó ∞, produciendo las formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$. La regla establece que, si éste es el caso, entonces:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esta regla surgió en la Villa de L'Hôpital, donde el marqués invitaba a los matemáticos de su época a vacacionar.

Actualmente, se realizan eventos donde los maestros e investigadores de matemáticas y de otras ciencias, tienen oportunidad, en sus vacaciones, de asistir a congresos, tomar cursos especiales, escuchar conferencias y participar en mesas redondas para mejorar su trabajo. Como ejemplos se pueden citar la Escuela de Verano de la Fundación Ford, el Programa para Mejorar la Enseñanza de las Ciencias de la Organización de Estados Americanos y, en México, los cursos de verano de la UNAM y el IPN, y el Coloquio Nacional de Matemáticas que se realizó en el Centro Vacacional del IMMS de Oaxtepec, Morelos, en 1968.

EJERCICIO 10. **GEOMETRÍA ANALÍTICA Y CÁLCULO.**

1. Por el método de Criba de la Eratóstenes, encontrar todos los números primos menores que **500** y calcular la densidad correspondiente.

2. Por el método de Arquímedes, encontrar el área entre la parábola $y = x^2$ y la **recta** $y = 4$. Graficar y verificar el resultado por cálculo integral.

3. Los recíprocos negativos μ y ν de las intersecciones con los ejes **a** y **b** de una línea recta, son las coordenadas de línea de Plucker. Encontrar las coordenadas de línea de la recta $5x + 3x - 6 = 0$

4. Encontrar la ecuación en coordenadas cartesianas de la recta cuyas coordenadas de Plucker son **L (1, 3).** Graficar.

5. Encontrar la pendiente de la tangente al círculo $x^2 + y^2 = 25$ en el punto **P (3, 4)** por el método de Fermat para la sub-tangente. Graficar y verificar por cálculo diferencial.

6. Establecer el desarrollo en serie de Mac Laurin de **Sen x** y, usando este resultado, demostrar que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{Sen}x}{x} = 1$$

7. Explique la siguiente paradoja del cálculo integral $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -1-1=-2$ Pero $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ es positiva para todo $x \neq 0$ real. Entonces la integral anterior no puede ser **-2**.
Sugerencia: Graficar $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

8. Integrando de 2 maneras se obtiene $\int \text{Senx}\text{Cosx}dx = \frac{1}{2}\text{Sen}^2x = -\frac{1}{2}\text{Cos}^2x$
Entonces $\text{Sen}^2x + \text{Cos}^2x = 0$. Explique este absurdo. Sabemos que para todo **x**, $\text{Sen}^2x + \text{Cos}^2X = 1$.

9. Un número real algebraico si es raíz de un polinomio con coeficientes enteros. Muestre que todo número racional es algebraico y por lo tanto los números trascendentes ó no algebraico son irracionales. ¿Podemos afirmar que todo número irracional es trascendente ? ¿Por qué?

10. Demostrar el siguiente teorema de Fermat: **"Todo número primo mayor que 2, puede expresarse en forma única como una diferencia de cuadrados en N"**.
Sugerencia: Verificar que para todo **P** primo impar, $P = \left(\frac{P+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{P-1}{2}\right)^2$

11. Inducir la regla de Leibniz para la derivada de un producto de funciones $y = f(x).g(x)$. Encontrar la quinta derivada de $y = (x^2-3)e^{2x}$, aplicando la regla anterior.

12. Establecer la regla de Leibniz para el cuadrado de un polinomio $(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2$. Encontrar $(x^2 - 3x + 5)^2$ aplicando la regla anterior.

CAPÍTULO 9

LA INFLUENCIA DEL CÁLCULO

9.1 INTRODUCCIÓN.

A fines del siglo XVII, el cálculo ha sido realizado formalmente por Newton y Leibniz, apoyados en la geometría analítica de Descartes y el álgebra simbólica del siglo XVI. Estos 3 grandes pilares: el álgebra simbólica, la geometría analítica y el cálculo, ofrecen poderosas herramientas para resolver problemas e impulsar el desarrollo de nuevas ramas de las matemáticas. Estas actividades se orientan durante el siglo XVIII hacia las ecuaciones diferenciales, la probabilidad y estadística matemática, la mecánica analítica y la astronomía. A fines del siglo XVIII y principios del XIX se revisan los conceptos fundamentales del cálculo para evitar la presencia de contradicciones y resolver las paradojas que resultan precisamente por la falta de rigor básico. Los maestros e investigadores se vuelven exigentes y rigurosos con las matemáticas, propiciando la liberación del álgebra y la geometría de sus moldes tradicionales. Así surgen las geometrías no-euclidianas y el álgebra abstracta, el análisis matemático, las álgebras lineales y la Lógica Matemática, todo esto en el siglo XIX.

En este capítulo trataremos la época de fines del siglo XVII a principios del siglo XIX, presentando en forma cronológica y sintetizada a los principales personajes y sus actividades matemáticas, académicas y de investigación.

9.2 LA FAMILIA BERNOULLI.

En la segunda mitad del siglo XVII, un rico comerciante y consejal suizo de nombre Nicolaus Bernoulli, procrea 2 hijos, Jakob y Johann, quienes se dedican a las matemáticas influenciados por las publicaciones de Leibniz y contribuyen al desarrollo del cálculo en sus aplicaciones y su divulgación en Europa. Posteriormente, 4 nietos y 2 biznietos de Nicolaus, 5 de ellos descendientes de Johann, se distinguen también como maestros investigadores de matemáticas, aunque sin llegar a superar la obra de sus ancestros, los hermanos Jakob y Johann Bernoulli.