los estados de movimiento de los cuerpos, (estática, cinemática, cinética y dinámica). En 1738 escribe su libro de ***Cálculo*** para la preparatoria incorporada a la Academia de San Petesburgo.

En sus investigaciones sobre series, analiza convergencia y divergencia por el método de comparación. Realiza integrales definidas por series utilizando la función $\beta : \int_0^1 x^p (1-x)^n dx$ y la función $\Gamma : \int_0^1 x^p e^{-x} dx$. Además, encontró paradojas que influyeron en la formalización del Cálculo en el siglo XIX. Por ejemplo, aplicando el *Teorema del Binomio* se obtiene:

$\mathbf{-1 = (1 - 2)^{-1} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots = \infty}$, produciéndose la paradoja: $\mathbf{-1 = \infty}$.

La explicación es que el desarrollo binomial de **(a - b) - n** con **a < b** y **n > 0** es divergente y por lo tanto el **Teorema del Binomio** no es aplicable a estos casos.

Euler introdujo la notación **f(x)** para funciones, **e** para la base logarítmica natural, **a**, **b**, y **c** para los lados del triángulo **ABC** y **s** para el semi-perímetro, Σ para sumatorias e **i** para la unidad imaginaria.

Para desarrollos en serie, estableció la llamada Fórmula de Euler : $\mathbf{e^{ix} = Cos\ x + iSen\ x}$, de donde, sustituyendo $x = \pi$ se obtiene la ecuación que relaciona a los importantes números **1, e, i** y π:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Las investigaciones de Euler sobre Teoría de números se dedican fundamentalmente a la obra de Fermat. Así descubre que no todos los números de Fermat $2^{2^p} + 1$ son primos porque para **p = 5**, esta fórmula no da un número primo. Demuestra que $\mathbf{a^4 + b^4 = c^2}$ no tiene solución en los naturales. Además, demuestra el **"pequeño teorema de Fermat"** $\mathbf{a^{p-1} \equiv 1 (mod\ p)}$, y el **"último teorema de Fermat"** $\mathbf{a^n + b^n = c^n}$ no tiene solución en los números naturales para **n > 2**; Euler lo demuestra para **n = 3**.

Encuentra un método para resolver las ecuaciones cuárticas por radicales y propone métodos por radicales para ciertos tipos de ecuaciones de grado mayor que **4**. Produce además una gran cantidad de trabajos de investigación sobre funciones continuas, ecuaciones diferenciales, geometría diferencial y cálculo de variaciones.

Define las funciones homogéneas de **n** variables, muy importantes actualmente en economía para las funciones de producción.

Definición: $\mathbf{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ es homogénea de grado **m** si $\mathbf{f(cx_1, cx_2, \ldots, cx_n) = c^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$.

Para **m = 1**, la homogeneidad es lineal y resulta adecuada para representar a la producción total **z** como función de las cantidades de los factores productivos $\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_n}$, considerando que la homogeneidad lineal significa rendimientos constantes a escala, lo cual es una ley económica a altos niveles de producción.

Una de las propiedades de estas funciones es el llamado **Teorema de Euler**

$$\mathbf{x_1 f x_1 + x_2 f x_2 + \ldots + x_n f x_n = mz}$$

En términos económicos, para **m = 1** significa que: *"La suma de las cantidades de los factores productivos por sus respectivas productividades marginales es igual a la producción total"*.

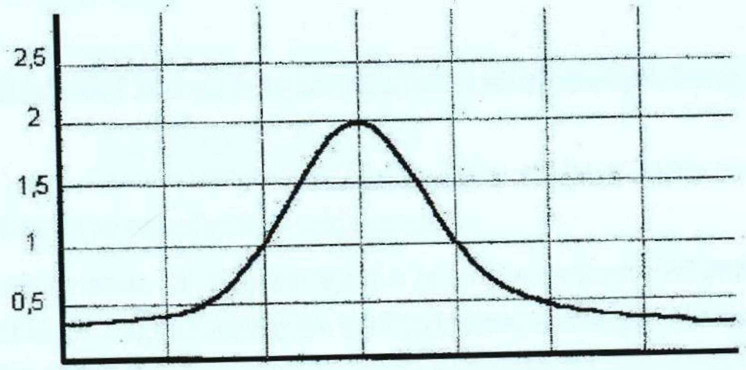
Euler publicó sus investigaciones y sus libros con gran claridad y detalle. En matemáticas aplicadas realizó trabajos sobre hidráulica, mecánica celeste, música, construcciones de barcos y otros.

9.6 <u>MARÍA GAETANA AGNESI</u> (1718 – 1799)

Apenas la segunda mujer importante en la historia de las matemáticas.

Nació en Milán, Italia, y desde temprana edad mostró una gran inteligencia y capacidad para los idiomas, tales como francés, latín, griego y hebreo. En su adolescencia debatía con matemáticos sobre temas como propagación de la luz, cuerpos transparentes y curvas geométricas. Escribió sobre tangentes a curvas. Fue la primera mujer en ocupar una cátedra de matemáticas en Milán.

En 1748 se publicó su libro ***Instituzione Analitiche*** de **Cálculo Diferencial**, que se tradujo a varios idiomas y se usó en Europa como texto. Estudió y analizó en particular las *"Curvas de Agnes"*, cuya ecuación es $\mathbf{y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}}$. Para **a = 2**, la curva es $\mathbf{y = \frac{8}{x^2+4}}$



El nombre latino de la curva es *Versoria* que significa cabo de vela

9.7 APLICACIONES FÍSICAS Y ASTRONÓMICAS.

1. Claude Alexis Clairaut (1713 - 1765)

Nació en París. Su padre fue profesor de matemáticas. Se distinguió desde temprana edad en matemáticas. A los 11 años de edad estudia las secciones cónicas de L' Hôpital y el Cálculo de Bernoulli.

1726 A sus 13 años escribe un tratado sobre curvas polinómicas de 4º grado y otro sobre curvas y superficies en el espacio.

1731 A los 18 años de edad escribe su ***Geometría Diferencial de Curvas no Planares en el Espacio***. La Academia Francesa lo acepta excepcionalmente, ya que sus estatutos requerían edad mayor a los 18 años.

1736 Participó en una expedición a Lapland para medir la longitud de un grado del meridiano para dilucidar una controversia sobre la forma de la tierra, confirmando la teoría de Newton de que la tierra es achatada en los polos, contra la afirmación del astrónomo italiano Giovani Cassini de que la tierra es alargada en los polos.

1739 Demostró que la 2ª derivada parcial cruzada de **z = f(x, y)** es independiente del orden de derivación $\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 z}{\delta y \delta x}$

1740 Escribe un ensayo sobre las funciones homogéneas.

1743 Como resultado de sus investigaciones después de sus expedición a Lapland, escribe ***Thèorie de la Figure de la Terre***.

1752 ***Thèorie de la Lune***. Estudio matemático de los movimientos lunares.

1759 Calculó con un mes de error el regreso del cometa Halley.

Trabajó en ecuaciones diferenciales y resolvió la llamada Ecuación de Clairaut

$$\mathbf{y = xy' + f(y')}.$$

2. Jean Le Round D'Alembert. (1717 - 1783)

Recién nacido fue abandonado en la iglesia de Saint Jean le Round de París, por lo que fue bautizado con ese nombre.

1741. Es admitido como miembro de la Academia Francesa. En cinética, parte de la mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos, tomando en cuenta las causas que lo producen y la naturaleza misma de los cuerpos, establece el llamado **Principio de D'Alembert**, el cual aplica para escribir y publicar los siguientes libros:

1743. **Traité de Dynamique.**

1744 **Equilibrio y Movimiento de Fluidos.**

1746 **Causas de los Vientos.**

1747 **Cuerdas Vibrantes.**

En estos trabajos plantea y resuelve ecuaciones diferenciales parciales.

1754 Ocupa el puesto de Secretario de la Academia Francesa hasta su muerte en 1783. En este mismo año de 1754 sugiere que una teoría de límites es el fundamento necesario para la formalización del Análisis, pero no consiguió interesar a sus contemporáneos.

1765 El Rey de Alemania le ofrece la presidencia de la Academia de Berlín, pero no la acepta por consideración a Euler.

3. Johann Heinrich Lambert. (1728 - 1777)

Hijo de un sastre suizo, no puede ir a la Universidad por falta de recursos. Trabaja como ayudante de su padre. En forma autodidacta aprende matemáticas directamente de los libros y trabaja como profesor particular.

1752 Su inquietud intelectual lo conduce a la invención del **Perspectógrafo**, aparato para trazar perspectivas.

1759 Escribe y publica su **Tratado de Perspectiva**, el cual resulta mejor, en el aspecto práctico, que el de Taylor que estaba en uso y se acababa de re-editar.

1761 Escribe un tratado del Universo con su propia teoría, titulado **Cosmología**.

1766 **Teoría de las Paralelas.**

1768 Demuestra que π es irracional porque $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ es racional y previamente establece que las tangentes de ángulos racionales son irracionales. Este teorema y el hecho de que $\frac{\pi}{4}$ tiene tangente racional, implican que $\frac{\pi}{4}$ es irracional y por tanto π es irracional.

1769 Publica su ***Teoría de las Funciones Hiperbólicas***, considerándolas tan importantes como las trigonométricas. Construye una tabla de funciones hiperbólicas.

Además, contribuye con sus trabajos a otras ramas de las matemáticas aplicadas como la Geometría Descriptiva, la Teoría de Proyecciones para elaboración de mapas y el estudio de las Orbitas de Cometas.

9.8 JOSEPH LOUIS LAGRANGE. (1736 - 1813)

Lagrange y Euler están considerados como los más grandes matemáticos investigadores del siglo XVIII. Nació en Turín, Italia; hijo de un empleado de origen francés quien, arruinado por especulaciones comerciales, desea que su hijo sea abogado. Sin embargo, Lagrange se aficiona a la geometría en la Escuela Superior de Revelli y al Cálculo, al leer las obras de Newton, Leibniz, Juan y Jacobo Bernoulli y Euler.

1755 A los 19 años de edad, se inicia como profesor de matemáticas en la Academia de Artillería de Turín.

1757 Miembro fundador de la Academia de Turín.

1759 En la **Miscelánea Matemática** de la Academia de Turín publica sus primeros escritos:

- I Cálculo Diferencial de una y varias variables con aplicaciones.
- II Teoría de Variaciones y Series.
- III Ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales con aplicaciones.
- IV Ampliación al Cálculo de Variaciones.
- V Casos de errores de observación.

1761 Sufre un padecimiento nervioso que lo obliga a ordenar su ritmo de trabajo.

1766 Matemático de la Corte de Federico el Grande, sucesor de Euler como Presidente de la Academia de Berlín durante 20 años.

1767 Publica su Tratado de la Solución de Ecuaciones De todos los Grados.

1786 Se jubila en la Academia de Berlín, se naturaliza francés y empieza como profesor de la Ècole Politechnique, contribuyendo a elevar su nivel académico y ubicándola como la mejor institución académica de Europa en ésa época.

1788 Realiza numerosas investigaciones sobre ecuaciones diferenciales y series y publica su ***Mecánica Analítica***, incluyendo la ecuación general de un sistema dinámico, que se conoce como la **Ecuación de Lagrange**.

1795 Profesor de la Ècole Normale, contribuyendo también a su prestigio académico.

1797 Publica una de sus grandes obras: ***Theorie des Founctions Analytiques Contenant les Principes de Calcul Differentiel***. Este libro puede considerarse como un primer intento de una Teoría de funciones de una variable real. Introduce la idea de cardinalidad a través de representaciones polinómicas infinitas de funciones desarrolladas en series de Taylor, aunque descuida detalles de convergencia para la representación en series.

1801 ***Soluciones Singulares de Ecuaciones Diferenciales***.

1812 Se publican sus **Apuntes de Matemáticas Generales**. (Conferencias en la Ècole Normale).

Escribió también en Teoría de números varios ensayos como la demostración del **Teorema de los 4 cuadrados**: *"Todo número natural puede expresarse como la suma de cuatro o menos cuadrados"*. Fue pionero del Álgebra Abstracta, contribuyendo por ejemplo, con su **Terorema de Lagrange**: *"El orden de un subgrupo de un grupo finito G es divisor del orden de G."*

En las aplicaciones del Cálculo Diferencial, Lagrange propone su **Criterio de Lagrange** para intentar la solución de los problemas de optimización, que en su forma general canónica tiene la forma siguiente:

Máximo o Mínimo de $\mathbf{Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$

Sujeta a :

$$\begin{cases} g1(x1, x2, \ldots, xn) = 0 \\ g2(x1, x2, \ldots, xn) = 0 \\ \approx \quad \approx \quad \approx \\ gn(x1, x2, \ldots, xn) = 0 \end{cases}$$

Para el efecto, define $\mu = Z - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i$ para ligar las condiciones laterales a la función objetivo. Los posibles máximos o mínimos relativos de **z** deberán satisfacer la condición necesaria del primer diferencial de $\mu = 0$. Esto conduce al llamado "**Sistema de Ecuaciones de Lagrange**", que incluye las condiciones laterales y contiene **(m + n)** ecuaciones con **(m + n)** incógnitas. *Si el sistema es consistente*, es decir, si tiene un número finito de soluciones, entonces la solución óptima será la que proporcione el máximo (o mínimo) valor de **z**, según el caso.

Este críterio sirvió de punto de partida para el Equipo de Investigación de Operaciones que se encargó de la optimización de recursos militares a fines de la Segunda Guerra Mundial, en Inglaterra (1943). Desde luego, el criterio es inaplicable cuando el sistema de ecuaciones de Lagrange es imposible de resolver o cuando es indeterminado, es decir, cuando tiene un conjunto infinito de soluciones, como en el caso de la Programación Lineal, que se resolvió con Álgebra Lineal, por el Método Simplex del Dr. G. Dantzig en 1947.

9.9 GEOMETRÍAS DESCRIPTIVA Y PROYECTIVA.

GASPARD MONGE. (1746 - 1818)

Nació en Beaune, Francia; hijo mayor de un comerciante. Se educó en colegios religiosos de Beaune y Lyons.

1762 A sus 16 años de edad se inicia como profesor de Física en Lyons, pero no acepta ser religioso.

1764 Ingresa a la Escuela Militar de Mézières como diseñador y constructor de obras militares. Sus novedosos proyectos de fortificaciones fueron elogiados por los militares y declarados secreto militar.

1768 Profesor de matemáticas en Mézières, donde enseña Geometría Descriptiva.

1771 Profesor de Física en Mézières.

1772 Miembro de la Academia Francesa.

1780 Profesor de hidráulica en el Liceo de París.

1795 Profesor fundador en la Ècole Polytechnique.

1798 Acompañó a Napoleón y Fourier a Egipto.

1816 Es expulsado de la Academia a la caída de Napoleón.

Monge realizó un gran número de investigaciones publicadas sobre cálculo de variaciones, fundamentos de geometría diferencial, ecuaciones funcionales, ecuaciones diferenciales parciales, geometría descriptiva, geometría proyectiva y temas de Física y Química. Está considerado como el creador de la geometría proyectiva y uno de los pioneros de la geometría diferencial. Fue un maestro muy seguido por sus alumnos, entre los cuales se distinguen Charles Dupin, (1784 - 1873), en geometría diferencial y Victor Poncelet, (1788 - 1867), en geometría proyectiva.

9.10 LA MECÁNICA CELESTE.

PIERRE SIMÓN LAPLACE. (1749 - 1827).

Hijo de noble familia, nació en Normandía.

1765 A sus 16 años, estudia en Caen.

1772 Profesor de matemáticas en la Escuela Militar de París, donde Napoleón es su alumno.

1774 – 75 Escribe sobre investigaciones de problemas de probabilidad. A partir de este año trabaja intensamente en el cálculo de probabilidades culminando con una obra cumbre sobre este tema en 1812.

1779 Contribuye en ecuaciones diferenciales (**Transformada de Laplace**) y en ecuaciones diferenciales parciales (**Método de Cascadas**).

1794 – 95 Escribe sus cursos de Introducción a las matemáticas en la Ècole Normale que se publican en 1812.

1799-1825 Como resultado de sus trabajos astronómicos durante estos años, publica su obra principal ***Traité de Mécanique Céleste*,** en 5 volúmenes.

1812 Publica su ***Théorie Analytique des Probabilités,*** obra monumental, resultado de sus trabajo de más de 30 años en este campo de las matemáticas.

EJERCICIO 11. MACLAURIN, TAYLOR, DE MOIVRE, EULER, LAMBERT Y LAGRANGE.

1. Representar en serie de Maclaurin $f(x) = \text{sen}x$ y $g(x) = e^x$. Determinar sus intervalos de convergencia.

2. Derivando la serie polinómica de **sen x**, encontrar la representación en serie de **cos x** y determinar su intervalo de convergencia.

3. Aplicar los resultados de los problemas anteriores, para demostrar la ecuación de Euler $\cos x + i\,\text{sen}\, x = e^{ix}$.

4. Utilizar la Ecuación de Euler del problema anterior para establecer una ecuación que relacione los números **1**, π, **e**, **i**.

5. Demostrar por inducción matemática la fórmula de De Moivre $(\cos x + i\,\text{sen}\, x)^n = \cos nx + i\,\text{sen}\, nx;\ n \in N$.

6. Con el resultado anterior, encontrar **sen 3x** y **cos 3x** como funciones de **sen x** y **cos x**.

7. Aplicando la fórmula de De Moivre, encontrar las **5** raíces quintas de la unidad **1**.

8. Graficar la curva de distribución normal $y = 100e^{-x^2}$. Determinar su dominio **D** y su co-dominio **C**, su sentido de crecimiento en **D** y sus puntos críticos de tangente horizontal.

9. Encontrar el valor aproximado del factorial de **90**, aplicando la fórmula de De Moivre atribuida a Stirling

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

10. Demostrar la siguiente identidad de funciones hiperbólicas $\cos h^2 x - \text{sen}\, h^2 x = 1$.

Definición:

$$\text{senh}x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

11. Verificar que la siguiente función de producción de tipo Cobb - Douglas es lineal homogénea y que satisface el Teorema de Euler. Interpretar en términos económicos $z = 1500\, x^{1/3} y^{2/3}$

12. Aplicando el criterio de optimización de Lagrange, determinar la caja rectangular sin tapa, de máximo volumen, que puede obtenerse de manera que su área total, base y caras laterales, sea igual a **1,728 cms²**.

CAPÍTULO 10.

LIBERACIÓN Y FORMALIZACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS.

10.1 INTRODUCCIÓN

A partir de Lagrange, se observa la intención de formalizar e independizar las matemáticas del mundo físico real, para lograr su desarrollo autónomo riguroso y debidamente fundamentado. Esto se consigue en el siglo XIX con la liberación de los pilares de las matemáticas:

a). **La geometría**, en el primer tercio del siglo, a través de las geometrías no-euclidianas hiperbólica y elíptica.

b). **El álgebra,** a mediados de siglo, a través de las estructuras no-conmutativas de los Cuaternios, los hipercomplejos y las álgebras lineales.

Además, se formaliza el análisis matemático, el álgebra abstracta y sus estructuras algebraicas y a fines del siglo y principios del siglo XX, se desarrolla la lógica matemática, los fundamentos de las matemáticas, su meta-lenguaje y la aritmética transfinita a través de la teoría de conjuntos. En el segundo cuarto del siglo XX, se desarrolla la topología y culmina la computación electrónica. Las matemáticas modernas, rigurosas, formales y bien cimentadas, producen un efecto de desarrollo acelerado de la física, la astrofísica, la optimización y en general, de todas las ciencias que utilizan a las matemáticas.

En este capítulo se presenta una síntesis de algunos sucesos y personajes relevantes de este período, desde fines del siglo XVIII y hasta el siglo XX.

10.2 LIBERACIÓN DE LA GEOMETRÍA.

La geometría de Euclides fue la primera estructura unificadora de un sistema de conocimientos matemáticos, que reúne los teoremas de 3 siglos del período griego del 600 al 300 A. C. A partir de un conjunto de 5 axiomas y 5 postulados consistentes e independientes en el sentido de la axiomática, y aplicando la lógica deductiva de Aristóteles, Euclides presenta sus 465 proposiciones en los 13 libros