1813 Deja la Ingeniería Civil y se inicia como Profesor de matemáticas en la Ècole Polythecnique.

1814 Cauchy realiza un trabajo sobre **Integrales Definidas con Limites Complejos**, iniciando formalmente la ***Teoría de Funciones de Variable Compleja***. Este trabajo de 180 páginas fue publicado en 1827.

1815 Demuestra el teorema general de los números poligonales o figurales, que había sido planteado por Fermat y que Euler y Lagrange no pudieron demostrar. Gauss lo demostró para los triangulares:

Teorema: Todo *entero positivo es la suma de 3 números triangulares, 4 cuadrados, 5 pentagonales, etc., considerando al cero como elemento inicial de cada sucesión de los números figurales.* Por ejemplo, la sucesión de los números cuadrados es 0, 1, 4, 9, 16, 25, ...

1816 Obtiene el Gran Premio de la Academia Francesa por su trabajo de más de 300 páginas ***Teoría de la Propagación de Ondas Sobre la Superficie de un fluido Pesado de Profundidad Indefinida***. A sus 27 años de edad, Cauchy recibe ofrecimiento de membresía de la Academia para la primera vacante que se presente, por lo cual, ocupa el lugar que deja posteriormente Monge.

1818 Se casa con Aloise de Bure procreando 2 hijas.

1821 Animado por Laplace, publica sus ***Conferencias del Curso de Análisis***, que está enseñando en la Ècole Polytechnique, incluyendo definiciones rigurosas de límite y continuidad y detallando el tema sobre convergencia de series, y la **Prueba de la Integral de Cauchy**.

1826 – 30 Inicia la publicación de un Journal titulado **Ejercicios de Matemáticas**, que continúa con una segunda serie titulada **Ejercicios de Análisis Matemático** y de Física donde aparecen todos sus trabajos de matemáticas puras y aplicadas.

1830 Por dificultades con al Academia, se exilia voluntariamente a Suiza, donde se dedica a la investigación y ofrece conferencias científicas. Después se traslada a Turín, Italia para ocupar un puesto de Profesor de matemáticas.

1833-1838 Es encargado de la educación de un niño de 13 años, hijo del Duque de Bordeaux.

1837 Extenso trabajo **Sobre la Dispersión de la Luz**, donde explica el fenómeno de la separación de la luz blanca en diferentes colores, bajo la hipótesis de que la luz es causada por las vibraciones de un sólido elástico. Las fórmulas de esta falsa hipótesis, obtenidas por Cauchy, aún se usan, pero la teoría de los sólidos elásticos falla en casos de dispersiones anómalas.

1838-1857 Realiza más de 500 trabajos sobre todas las ramas de las matemáticas, mecánica y astronomía.

1840 Extenso trabajo con gran cantidad de cálculos numéricos sobre **Astronomía Matemática.**

1845 Inicia su **Teoría de Sustituciones** (o Permutaciones) que conduce a la **Teoría de Grupos Finitos**, donde define el concepto de grupo a través de sus 4 cuatro postulados: cerramiento, asociatividad, identidad e inverso. Esta teoría fue extendida posteriormente por otros matemáticos y se han encontrado gran cantidad de aplicaciones matemáticas y físicas.

En total Cauchy realizó 789 trabajos científicos que ocupan 24 grandes volúmenes, siendo junto con Euler y Cayley, los matemáticos más prolíficos de la historia de las matemáticas.

10.6 NIELS HENRIK ABEL (1802-1829)

Nació en Findö, Noruega, hijo de un Pastor de amplia cultura y en una época de gran pobreza del país por sus recientes guerras con Inglaterra y Suiza.

En la escuela primaria, su primer maestro golpeaba a sus alumnos y fue sustituído por Berat Michael Holmböe (1795-1850), quién observó el genio del niño Abel, convirtiéndose en su protector y editor de la primera publicación de los trabajos completos de Abel en 1839, Post-mortem.

A sus 16 años, Abel estudió por su cuenta las principales obras de matemáticas, incluyendo trabajos de Newton, Euler y Lagrange. A sugerencia de Holmböe, estudia la más difícil de las obras clásicas, ***Las Disquisiciones Aritméticas de Gauss.*** Descubrió que algunas de las demostraciones de los grandes matemáticos, no eran correctas o estaban incompletas. Así, realiza la primera demostración del **Teorema General del Binomio**, sobre el cual, Newton y Euler habían demostrado casos especiales. Esta prueba del caso general fue el inicio de un amplio programa de Abel para la teoría y aplicación de series infinitas.

En 1820 murió el padre de Abel, por lo que tiene que trabajar como maestro de alumnos particulares para ayudar a sostener a su madre y sus 6 hermanos. Hölmboe trató de conseguirle fondos del gobierno para sus investigaciones y aún contribuyó con algo de sus propios ingresos para ayudarlo.

1821 Abel cree haber resuelto algebraicamente la ecuación general de 5º grado $ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$, pero encuentra una falla en el proceso y demuestra que es imposible resolverla algebraicamente, es decir, a través de las operaciones del álgebra clásica: sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potencias y raíces de los coeficientes (independientemente del trabajo de Paolo Rufino, de 1813).

1822 Abel termina sus estudios en la Universidad de Kristiana. Sus amigos y maestros, a través de la Universidad, solicitaron un subsidio del gobierno noruego que le permita viajar por Europa. Para el efecto, Abel entrega un amplio trabajo para su publicación, algo imposible por falta de fondos que finalmente se perdió. El gobierno le otorgó una beca para que continuara sus investigaciones en la Universidad de Kristiana. Trabajó intensamente en matemáticas y estudiando francés y alemán.

1825 El gobierno noruego le otorga, por fin, modestos recursos para su viaje. En Alemania, entregó su trabajo sobre la quíntica a Gauss, pero éste no mostró interés, tal vez por tratarse de la demostración sobre un caso particular. En Berlín, conoce a August Leopold Crelle (1789-1856), un Ingeniero Civil, aficionado a las matemáticas y constructor del primer ferrocarril de Alemania. Crelle fundó la primera revista dedicada exclusivamente a la investigación matemática: *Revista de Matemáticas Puras y Aplicadas*. Los primeros tres volúmenes del Journal de Crelle contienen 22 trabajos de Abel, incluyendo la prueba de irresolubilidad algebraica de la ecuación quíntica.

1826 Viaja a Freiburg y trabaja sobre lo que conocemos como el **Teorema de Abel** sobre representación algebraica y logarítmica de funciones. Después viaja a Francia, donde presenta

a la Academia de París su trabajo ***Sobre una Propiedad General de un muy extenso conjunto de Funciones Trascendentes***. Aquí, Abel se refiere al limitado conjunto de funciones trascendentes que están siendo consideradas por los matemáticos, ya que se reducen a las logarítmicas, exponenciales y trigonométricas o circulares, por lo que presenta un extenso nuevo conjunto de funciones trascendentes, las funciones elípticas, cuyas derivadas pueden expresarse por medio de ecuaciones algebraicas cuyos coeficientes son funciones racionales de una variable.

Desafortunadamente, los miembros del jurado de la Academia para este trabajo, Cauchy y Legendre, menospreciaron su gran importancia. Cauchy lo llevó a su casa y lo perdió y Legendre declaró que era casi ilegible. En 1829, Jacobi declara que el trabajo de Abel es un gran descubrimiento, tal vez el más grande del siglo. La Academia enmendó su error, otorgando el Gran Premio de Matemáticas de 1830 a Abel y Jacobi, pero para entonces Abel había fallecido. Posteriormente, Hermite se refiere a este trabajo, como algo que tendrá ocupados a los matemáticos por cientos de años.

Abel descubrió que sus nuevas funciones obtenidas de la inversión de integrales elípticas, tienen dos períodos, cuya razón es imaginaria, mientras que las funciones circulares tienen un período y declara: "Estudien las funciones inversas".

Definición: *La inversa de una función* $y = f(x)$ *es la que se obtiene considerando a* x *como variable dependiente. Si se puede despejar* x*, entonces* $x = g(y)$ *es la inversa. Si no se puede despejar* x*, entonces se considera* x *como función implícita de* y *para al inversa.*

Ejemplos: $y = 2x - 6;\quad x = (1/2)y + 3$
$y = ex;\quad x = \ln y$
$y = \mathrm{sen}x;\quad x = \mathrm{sen}^{-1}y$

En cada uno de estos casos, $y = f(x)$ y $x = f(y)$ son funciones inversas.

Los investigadores que siguieron el análisis de las funciones elípticas y sus generalizaciones, llamadas funciones abelianas, (Jacobi, Weirstrass, Riemann y otros), descubrieron funciones de <u>n</u> variables con 2n períodos y aplicaron estas funciones a la solución de problemas de geometría, mecánica y física matemática.

1827 Agotados sus recursos económicos, incluyendo una pequeña aportación de Hölmboe, Abel regresa a Kristiana muy débil por su desnutrición y ya afectado de tuberculosis pulmonar.

Había una vacante en la Universidad pero no se otorga a Abel por considerarlo inexperto como maestro. Hölmboe ocupa el puesto, que de otra manera iba a ser otorgado a un profesor extranjero, y envía alumnos a Abel para clases particulares.

Abel trabaja sobre lo que ahora se llaman integrales abelianas y establece el **Criterio Logarítmico de Convergencia de Series.**

Por su parte Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) sistematiza el estudio de las funciones elípticas mediante series. Abel y Jacobi liberan el análisis matemático de la física y el mundo real, casi simultáneamente con la geometría, que logra su independencia a través de las geometrías no-euclidianas.

Abel trabajó también sobre álgebra abstracta en lo que ahora se llaman grupos abelianos.

10.7 EVARISTE GALOIS (1811-1832)

Nació en Bourg-La-Reine, cerca de París. Su padre fue un intelectual, alcalde del pueblo y amante de la libertad. Recibió la primera educación de su madre.

1823 A los doce años de edad, Galois entra al Liceo Luis-le-Grand de París, donde obtuvo premios por su buena preparación.

1824 – 25 Su trabajo académico de literatura, retórica, griego y latín es calificado como mediocre; se aburre con estas materias, hasta que inicia sus cursos de matemáticas a sus 14 años de edad. Se entusiasma con la geometría de Legendre, la cual digiere con facilidad. En su

curso de álgebra, le disgusta el libro de texto, por lo que se dedica a leer a Lagrange y los trabajos de los grandes matemáticos de su época, sobre solución de ecuaciones y teoría de funciones analíticas. Descuida su trabajo escolar normal, pero en el examen general de matemáticas obtiene el primer lugar.

1826 A sus 15 años, se considera a sí mismo como un ser superior en matemáticas y parece disfrutar al demostrarlo ante sus compañeros y sus maestros, quienes lo consideran un niño extraño de gran ambición por las matemáticas, pero que desprecia sus demás materias. Pierde la simpatía de sus maestros, quienes consideran que debería dedicarse únicamente a las matemáticas.

1827 Su maestro de matemáticas, Vernier, trata de convencerle de que trabaje sistemáticamente, pero Galois no hace caso y sin completar sus conocimientos de matemáticas elementales, intenta entrar a la Ècole Polytechnique, la gran institución francesa, fundada durante la revolución para proporcionar a los ingenieros civiles y militares la mejor preparación científica del mundo en esa época. Galois fracasó en sus exámenes a pesar de su notable inteligencia para las matemáticas, que sus examinadores no lograron entender.

1828 A sus 17 años, conoce a Louis-Paul-Èmile Richard (1795-1849) profesor de matemáticas avanzadas en el Liceo de Louis-le-Grand, quien inmediatamente reconoce el genio de Galois y lo considera el más extraordinario de sus alumnos, que debería haber sido admitido en la Ècole Polytechnique sin someterlo a exámenes. Este maestro impulsó a sus alumnos que llegaron a ser notables científicos como Leverrier, descubridor por medio del análisis matemático, del planeta Neptuno y Hermite, algebrista de primera categoría. Richard reconoce en Galois una notable superioridad sobre sus otros alumnos y le otorga el primer premio en su curso.

1829 Galois publica su primer trabajo de investigación sobre **fracciones continuas**, y lleva a la Academia Francesa un trabajo con sus principales descubrimientos, recibiendo de Cauchy la promesa de presentarlo. Sin embargo, Cauchy no sólo olvida su promesa, sino que pierde el escrito de Galois, repitiendo el desastre de su relación con Abel. Curiosamente, las dos fallas de Cauchy se presentan ante 2 genios jóvenes que después de su muerte, obtienen amplio reconocimiento por sus descubrimientos.

Intenta de nuevo ingresar a la Ècole Polytechnique pero vuelve a fracasar ante un jurado que no entiende su genio, inclusive tiene una controversia con uno de sus examinadores, quien estaba equivocado y obstinado en su error, por lo que Galois pierde la paciencia y le arroja el borrador a la cara. Para completar su frustración ante la sociedad, pierde a su padre, quien se suicida ofendido por una campaña difamante de un predicador, en su contra.

Regresa a la escuela para prepararse como maestro. Después de sus exámenes finales, sus maestros le dan calificaciones de excelencia en física y matemáticas, pero en literatura lo consideran una nulidad, con serias dificultades para expresarse con claridad, por lo que dudan pueda llegar a ser un buen maestro.

1830 A sus 19 años, fue aprobado para pasar a la Universidad. Trabaja por su cuenta y produce 3 ensayos que contienen su ***Teoría de ecuaciones algebraicas***, presentándola a la Academia deCiencias para competir por el Gran Premio de Matemáticas, al cual sólo aspiraban los más notables matemáticos de la época. El Secretario recibe el manuscrito, lo lleva a su casa para examinarlo, pero desgraciadamente fallece y se pierde todo rastro del manuscrito. Ante estas circunstancias, decide unirse al grupo radical de los republicanos, por lo que es expulsado de la escuela.

Galois decide ofrecer un curso particular de Álgebra Superior con un programa que contiene todos sus descubrimientos:

1. Nueva teoría de los imaginarios (Los imaginarios de Galois, muy importantes actualmente en álgebra y teoría de números).
2. Teoría de la solución de ecuaciones por radicales. (Teoría de Galois).
3. Teoría de números.
4. Funciones elípticas por álgebra.

Nadie se inscribe para este curso y Galois decide ingresar al ejército. Vuelve a escribir su trabajo sobre ***Teoría general de ecuaciones*** y lo envía a la Academia de Ciencias, pero Poisson le encuentra "incomprensible".

1831 – 1832 Galois se ve envuelto en problemas políticos, por lo que es arrestado, liberado y vuelto a arrestar por considerarlo un peligroso radical, siendo condenado a 6 meses de prisión, de donde sale en abril de 1832 bajo palabra. Tiene su única relación amorosa y se compromete en duelo con pistolas a 25 pasos, donde resulta herido en el intestino y abandonado en el campo del honor. Un campesino lo lleva al hospital, donde fallece de peritonitis el 31 de mayo de 1832.

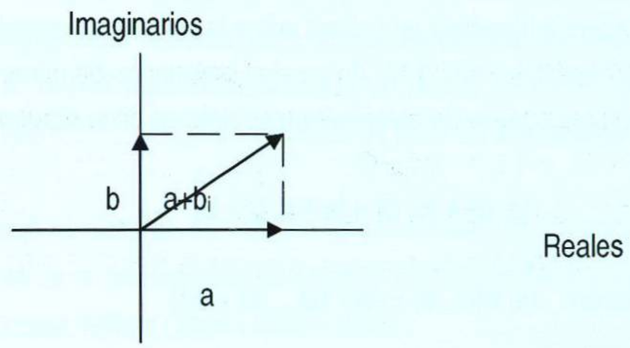
Antes del duelo, Galois escribe frenéticamente sus descubrimientos, incluyendo la teoría de grupos y sus implicaciones con brillante éxito, en un escrito de 60 páginas, que envía a su amigo Auguste Chevalier con la esperanza de que alguien pueda disfrutar de todo esto en el futuro.

Catorce años después, en 1846, Joseph Liouville (1809 - 1882) publicó algunos de los escritos de Galois en su *Journal de Matemáticas Puras y Aplicadas*. Posteriormente, Jules Tannery completó la publicación de los trabajos de Galois en 1908, conteniendo las más importantes propiedades de los grupos y sus extensiones a campos. En 1870, Camille Jordan(1838 - 1922) publica su ***Tratado de Sustituciones***, en el que reconoce el carácter unificador de la **Teoría de Galois**. Dos discípulos de Jordan, Felix Klein (1849 - 1925) y Marios Sophos Lie (1842 - 1899) exponen en sus trabajos de investigación, el poder sistemático y unificador de la Teoría de Galois.

10.8 LIBERACIÓN DEL ÁLGEBRA.

A partir de mediados del siglo XIX, el álgebra avanza notablemente en abstracción y generalización. Del concepto de grupo, nombre propuesto por Galois, surgen una gran cantidad de sistemas algebraicos o estructuras, agregando o quitando condiciones. Así tenemos los semigrupos, cuasigrupos, monoides, anillos, ideales, dominios enteros, anillos de división, campos, espacios vectoriales, álgebras lineales, etc.

En particular el *vector*, nombre propuesto por Hamilton, provisto de magnitud y dirección, es utilizado por los físicos desde finales del siglo XVII para representar fuerzas y velocidades. Sin embargo, el matemático no le dedica mayor atención hasta principios del siglo XIX cuando Gauss los usa implícitamente en la representación geométrica de los números complejos **a + bi** en el plano



Esta representación geométrica de los vectores con los números complejos, se utiliza para el estudio de las rotaciones del plano. Hamilton considera que esto puede ser extendido al estudio de las rotaciones del espacio y para el efecto, construye un sistema algebraico, los cuaternios o cuaterniones, donde se liberan las condiciones tradicionales de una suma asociativa y conmutativa y una multiplicación asociativa, conmutativa y distributiva sobre la suma. Los cuaternios de Hamilton constituyen el primer sistema algebraico con una multiplicación no conmutativa, indispensable para cumplir los propósitos generalizantes del álgebra y al mismo tiempo, satisfacer los requerimientos de la Física y la Geometría.

10.9 WILLIAM ROWAN HAMILTON. (1805 - 1865)

Nació en Dublín, Irlanda. Huérfano desde pequeño, fue educado por un tío, con una orientación hacia la literatura y los idiomas.

1820 A sus 15 años de edad, Hamilton se entusiasma por las matemáticas al asistir a una presentación del notable calculista mental americano Zerah Colburn. Estudia la aritmética, la geometría analítica, el cálculo y los 4 volúmenes del ***Principia Matemática*** de Newton.

1823 Encuentra un error matemático en la **Mecánica Celeste** de Laplace y escribe su primer ensayo sobre este tema.

1824 - 28 Estudia en el Trinity College de Dublín y a sus 22 años de edad, es propuesto como Astrónomo Real, Director del Observatorio y profesor de astronomía de la Universidad. Matemáticamente predice que en los cristales biaxiales la refracción es cónica, lo cual es verificado experimentalmente.

1833 Presenta a la Academia Irlandesa un trabajo sobre los números complejos, considerándolos como un sistema algebraico abstracto de parejas ordenadas de números reales **a + bi = (a, b)** donde las operaciones o leyes de composición se definen de la siguiente manera:

Suma: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

Multiplicación: $(a, b)(c, d) = (ac - bd\ ,\ ad + bc)$.

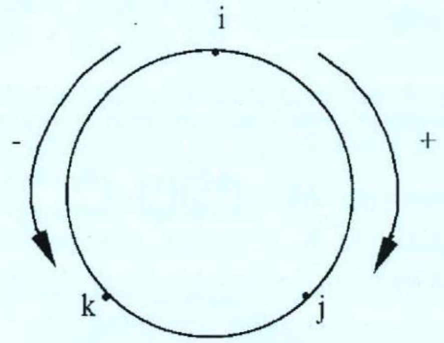
Los números reales están contenidos en este sistema en la forma **(a, 0)** y los números imaginarios puros también pertenecen al sistema como **(0, b).** Esta concepción abstracta de los complejos permite la posibilidad de extensión del sistema algebraico de los complejos a otro sistema similar que lo contenga.

1843 Observando que los números complejos son adecuados para el estudio de los vectores y las rotaciones del plano, Hamilton desarrolla un sistema algebraico para el estudio de vectores y las rotaciones en el espacio. Para el afecto, considera las cuaternas ordenadas de números reales, extendiendo la suma y multiplicación de los complejos para obtener un sistema algebraico similar con tres unidades imaginarias **i**, **j** y **k**.

Los cuaternios **Q** de Hamilton pueden presentarse en forma más objetiva y práctica que las cuaternas ordenadas de números reales, de la siguiente manera:

$$\left\{ a + bi + cj + dk \,\middle|\, a, b, c, d \in R;\ i^2 = j^2 = k^2 = 1;\ ij = ji = k;\ jk = kj = i;\ ki = ik = j \right\}$$

La suma y multiplicación de cuaternios se definen como si fueran polinomios, con las reglas establecidas en **Q** para multiplicar las unidades imaginarias **i, j** y **k,** las cuales pueden establecerse objetivamente en términos de rotaciones de la siguiente manera:



En este sistema algebraico, la suma es asociativa y conmutativa, mientras que la multiplicación es asociativa y distributiva sobre la suma, pero no es conmutativa, por lo que por primera vez Hamilton libera al álgebra de su molde tradicional, creando un nuevo sistema algebraico que incluye en sus cursos desde 1843 y que fue publicado en 1853 con el título de ***Elementos de Cuaterniones***.

Hamilton trabajó el resto de su vida en una extensión de su obra sobre los cuaternios, pero este sistema pierde interés al desarrollarse el Análisis Vectorial del físico y matemático americano de la Universidad de Yale Josiah Willard Gibbs (1839 - 1903).

10.10 LAS ÁLGEBRAS LINEALES.

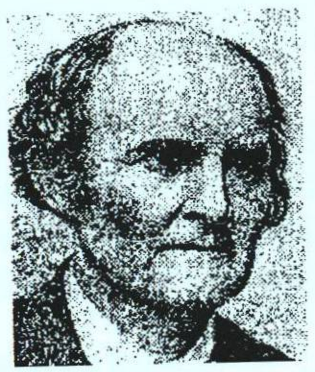
Los cuaternios de Hamilton, fueron generalizados casi simultáneamente, en 1844, por el matemático alemán Herman Günther Grassman (1809-1877) en su ***Tratado de hiper-complejos***, definidos como $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$.

Los e_j son las unidades de este sistema algebraico; una de ellas es 1, la unidad de los reales, las demás son imaginarias y las x_j son números reales. Las reglas para la multiplicación de los e_j pueden ser similares o diferentes a las de los cuaternios. Grassman orienta su tratado de hipercomplejos hacia la metafísica, por lo que tampoco tiene éxito, a pesar de que su sistema es mucho más general.

Lo que definitivamente viene a superar los esfuerzos de Hamilton y Grassman, es la creación de las álgebras matriciales en 1857, por el matemático inglés Arthur Cayley (1821 - 1895). Trabajando en su ***Teoría de los Invariantes***, Cayley define las matrices 2 * 2 para representar transformaciones lineales en el plano que llevan **P(x, y)** a **Q(x', y')** de la siguiente manera

$$(1)\quad \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

donde **a, b, c y d** son números reales. Esta transformación la representa con la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que se aplica al punto **P(x, y)** de manera que $AX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = X'$.



ARTHUR CAYLEY

Definiendo la multiplicación de 2 transformaciones como su aplicación sucesiva $X(T_A \cdot T_B) = (XT_A)T_B = X''$. Si T_B lleva **Q(x', y')** a **R(x", y")** de manera similar a T_A, se tiene

$$(2)\quad \begin{cases} x'' = ex' + fy' \\ y'' = gx' + hy' \end{cases}$$

donde **e, f, g y h** son números reales.

La matriz correspondiente a T_B es $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$. Entonces, el producto de las matrices debe ser la matriz del producto de las transformaciones que se obtiene sustituyendo **x'** y **y'** de **(1)** en **(2)** de lo cual resulta lo siguiente:

$$x'' = e(ax + by) + f(cx + dy) = (ea + fc)x + (eb + fd)y$$

$$y'' = g(ax + by) + h(cx + dy) = (ga + hc)x + (gb + hd)y$$

$$\therefore \quad (BA)X = B(AX) = BX' = X'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

debe ser $BA = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea + fc, & eb + fd \\ ga + hc, & gb + hd \end{pmatrix}$. Entonces, cada hilera de la matriz producto, se obtiene sumando los productos de los elementos de la correspondiente hilera del primer factor **B** por los correspondientes elementos de las columnas del segundo factor **A**.

La generalización a matrices **nXn**, con $n \in N$, de esta multiplicación no-conmutativa, proporciona una estructura de Álgebra Lineal para cada **n**, al definir suma y multiplicación por escalar de la siguiente manera:

$$A + B = (a_{ij})_{nXn} + (b_{ij})_{nXn} = (a_{ij} + b_{ij})_{nXn}$$

$$kA = k(a_{ij})_{nXn} = (ka_{ij})_{nXn}$$

Además para todo $m, n \in N$, las matrices **mXn** proporcionan una estructura de Espacio Vectorial con la suma y la multiplicación por escalares de un campo cualquiera. De esta manera, las álgebras matriciales de Cayley proporcionaron mejores condiciones que los cuaternios de Hamilton y los hipercomplejos de Grassman, por lo que éstos se convierten rápidamente en reliquias históricas.

Los cuaternios son una curiosa estructura algebraica de las que ahora se llaman anillo de división no-conmutativo.

Las **álgebras de matrices**, nombre propuesto por Cayley, pueden ser consideradas como ampliaciones del concepto abstracto general de **espacio vectorial**, definido como un conjunto no-vacío **S** de elementos llamados vectores, con una relación de igualdad (equivalencia universal), una suma **+** tal que **(S,+)** es un grupo conmutativo, es decir, la suma es cerrada, asociativa, conmutativa, con identidad e inverso y una multiplicación por elementos de un campo llamados escalares, (por ejemplo, los números reales) que es asociativa, con unidad y distributiva sobre la suma de vectores y sobre la suma de escalares.

Agregando al espacio vectorial **(S, +, •)** una multiplicación de vectores **x** que sea asociativa y bilineal, es decir, distributiva sobre la suma por ambos lados, se tiene una estructura de Álgebra Lineal (S,+, •, x). Las múltiples aplicaciones de las álgebras lineales en todas las actividades profesionales actuales, a través de los modelos lineales y la investigación de operaciones, han obligado a incorporar a los planes de estudio, un curso de Álgebra Lineal conteniendo álgebras matriciales, espacios vectoriales y transformaciones lineales.

La ***Teoría de los Invariantes*** de Cayley proporcionó posteriormente a Félix Klein (1849 - 1925) la base para una geometría general y unificadora, de la cual la geometría euclidiana, la geometría hiperbólica y la geometría elíptica, son casos particulares. En esta geometría, como en el álgebra, agregando y quitando o modificando postulados, se obtienen diferentes geometrías que fueron codificadas por Klein en su famoso programa de la Universidad de Erlanger.

Otro campo de investigación matemática de Cayley es el estudio de las **Formas Cuadráticas** de **n** variables:

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j, \quad \text{donde } a_{ij} = a_{ji}.$$

En términos matriciales, si:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad A = (a_{ij})_{nXn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

es una matriz simétrica y $X' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es la transpuesta de **X**: $q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X'AX$.

Las formas cuadráticas de Cayley son funciones polinómicas de **n** variables, simétricas y homogéneas de segundo grado, de gran utilidad en las matemáticas aplicadas de la actualidad.

10.11 GEORGE CANTOR (1845 – 1918)

George Ferdinand Ludwig Phillips Cantor nació en San Petersburgo, Rusia, en 1845, aunque sus padres eran holandeses. En 1856, su familia emigró a Frankfurt, Alemania. Su padre sugería que estudiara una carrera de ingeniería para especializarse en filosofía, física y matemáticas.

Cantor estudió en Zurich, Göttingen y Berlín, donde estuvo bajo la influencia de Weinstrass, obteniendo su Doctorado en 1869. Viajó a Holanda y realizó una larga carrera de 36 años, dedicados a la enseñanza en la Universidad de Halle, de 1869 a 1905. Allí falleció en una clínica psiquiátrica, en 1918. Sus primera investigaciones fueron en **Teoría de Números**, publicando varios artículos sobre esta materia, en 1867 y 1871.

En 1872 conoció en Suiza a Richard Dedekind, surgiendo una amistad entre ellos y, por consiguiente, una correspondencia de muchos años, con una notable influencia de la lógica profunda de Dedekind para que se desarrollaran las ideas de Cantor sobre Teoría de Conjuntos. En ese mismo año Dedekind publicó su definición de los números reales a través de las llamadas *Cortaduras de Dedekind.* Recordemos que en el año 370 A. C. Eudoxus resuelve el problema de los irracionales con su Teoría de Proporciones. Cantor investigó sobre series trigonométricas y publicó, en ese mismo año, un artículo definiendo los números irracionales en términos de secuencias convergentes de números irracionales

En 1873, Cantor demostró que los racionales son numerables, es decir, que pueden ponerse en correspondencia uno a uno con los números naturales.