En 1874 publicó un artículo que marca el nacimiento de la *Teoría de Conjuntos.* Aquí considera dos tipos de infinito: El de los números naturales y el de los reales. Al examinar el conjunto de los números reales, es decir, el conjunto de todas las raíces de todas las ecuaciones polinómicas con coeficientes enteros, demuestra que es numerable. En este mismo artículo demuestra que los números reales no pueden ponerse en correspondencia uno a uno con los números naturales, mediante un método complicado que mejoró en 1891.

De 1879 a 1884 publicó su ***Teoría de Conjuntos,*** en seis partes, a pesar de la oposición de sus ideas, especialmente por parte de Kronecher. En 1883, en la quinta parte, presenta los conjuntos bien ordenados, los números ordinales, la suma y multiplicación de números transfinitos. En 1884 tiene su primera crisis mental.

En 1895 y 1897 publica su ***Tratado de la Teoría de Conjuntos***, con una introducción que parece un libro moderno de **Teoría de Conjuntos.** Su contribución al metalenguaje de las matemáticas es utilizada actualmente en todas las ramas de las matemáticas.

## 10.12 CONCLUSIÓN.

La evolución histórica de las matemáticas sigue una notable proliferación de largos caminos hasta nuestros días. Como ejemplos podemos citar los siguientes:

**a).** La lógica deductiva de Aristóteles, evoluciona con Leibniz en el siglo XVII y se formaliza a mediados del siglo XIX, empezando con George Boole (1815 - 1864), fundador de la **Lógica Simbólica,** y culmina con la obra de Bertrand Russell (1872 - 1970) con la colaboración de Alfred N. Whitehead (1861 - 1947), ***Principia Mathematica***, publicada en 1910, que presenta a la matemática fundamental, como una lógica.

**b).** La axiomática de la geometría euclidiana se formaliza y generaliza en las matemáticas, a fines del siglo XIX, empezando con Moritz Pasch (1843 - 1931) en su obra de 1882 ***Lecciones de Geometría Moderna***, que incluye un sistema de postulados para la exposición rigurosa de la Geometría Proyectiva. Después, Richard Dedekind (1831 - 1916) expone en 1888 un sistema de axiomas para fundamentar la aritmética. Simultáneamente, el matemático italiano Guiseppe Peano (1858 - 1932) presenta en 1899 sus ***Principios de la Geometría expuestos lógicamente*** y en 1891 sus ***Formularios Matemáticos*** conteniendo los ***Principios de la Aritmética***, a partir de un sistema de 9 postulados de los cuales, 5 de ellos fundamentan la construcción de los números naturales. David Hilbert (1862 - 1943) sistematiza el método axiomático en 1899 con su obra ***Fundamentos de la Geometría***, donde presenta un método universal y fecundo para toda la matemática. Convencido de la necesidad de problemas definidos en la investigación, Gilbert propone en su conferencia *Problemas de la Matemática,* presentada en el Congreso de París, en 1900, 23 problemas fundamentales que sirvieron de base para el desarrollo de gran parte de la investigación matemática del siglo 20.



Así como en los ejemplos mencionados, podríamos seguir con la aritmetización del análisis, la Teoría de Conjuntos con la formalización del metalenguaje de las matemáticas y la aritmética transfinita, el desarrollo de la Topología, etc. En 1945, cuando la electrónica hace posible la creación de las computadoras, se propicia el desarrollo de la Investigación de Operaciones (Optimización) y de gran cantidad de ramas de la ciencia donde se aplican las matemáticas, como la Física, la Astrofísica, etc. En todas estas direcciones, se presentan interesantes historias y biografías que deben darse a conocer en los cursos universitarios donde se manifiesta su presencia.

**EJERCICIO 12.** **EL SIGLO XIX.**

**1.** Expresar de una o más formas, los primeros **20** números naturales, como una suma de **4** ó menos números cuadrados. ¿Cuál es el que tiene el mayor número de representaciones de esta forma?

**2.** Encontrar los primeros **4** términos y determinar la convergencia o divergencia de las siguientes series:

**2.1** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ Prueba de la razón.

**2.2** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ Prueba de la integral.

**3.** Demostrar que las unidades de los complejos **1** é **i**, junto con sus inversos aditivos **-1** y **-i** constituyen un grupo abeliano finito bajo multiplicación. Construir la tabla de multiplicación.

**4.** Verificar que el conjunto de los números reales es un subconjunto de los complejos y que éste a su vez es un subconjunto de los cuaternios. Ilustrar esto con un diagrama de Venn.

**5.** Demostrar que la multiplicación de cuaternios no es conmutativa.

**6.** Mostrar que en el álgebra de las matrices reales 2X2, toda matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1+a \\ 1-a & -a \end{pmatrix}$, con $a \in R$ es una raíz cuadrada de la matriz identidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7.- Explique las siguientes paradojas del álgebra de los reales:

**a).** 2 > 1. Multiplicando ambos miembros de la desigualdad por log(1/3):

$2\log(1/3) > \log(1/3)$

$\therefore$ $\log(1/3)^2 > \log(1/3)$

$\therefore$ $(1/3)^2 = 1/9 > 1/3$ **(¡Absurdo!)**

**b).** $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ para todo $a, b \in R$.

$\therefore$ $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{1} = 1$

Ahora $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = i \cdot i = i^2 = -1$

$\therefore$ **1 = -1 (¡Absurdo!)**

**8.** En 1906, Maurice Fréchet define **espacio métrico** como un conjunto no vacío **P** con una *distancia:* $d_{\overline{PQ}} \in R$ tal que para todo **P, Q, R** $\in$ **P**:

**1).** $d_{\overline{PQ}} \geq 0$

**2).** $d_{\overline{PQ}} = 0$ **si y sólo si P = Q.**



**3).** $d_{\overline{PQ}} = d_{\overline{QP}}$

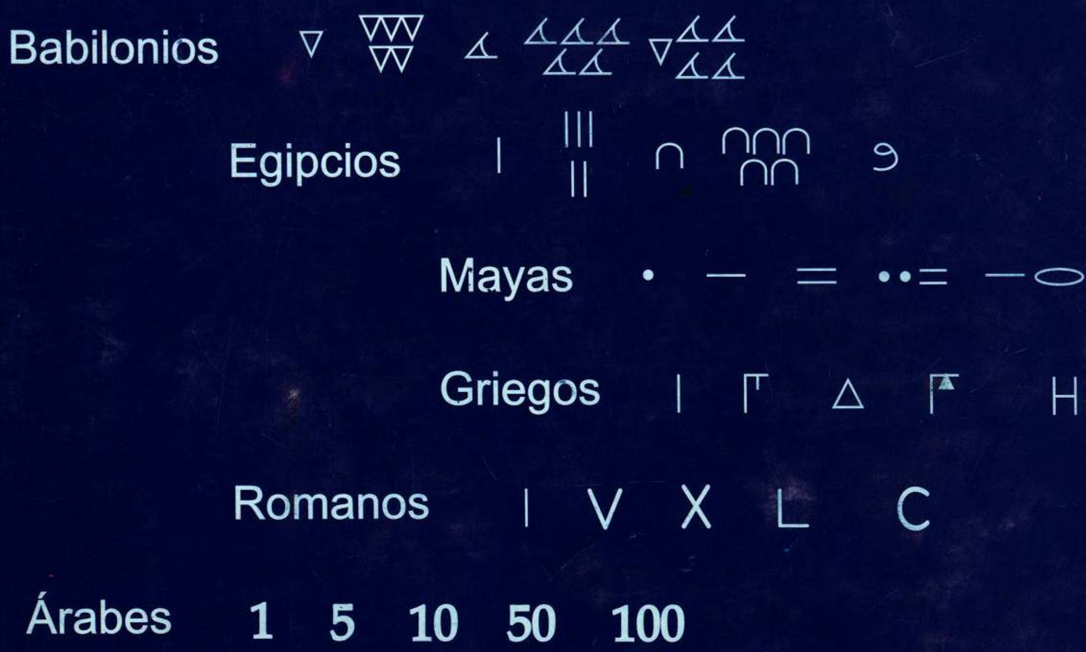
**4).** $d_{\overline{PQ}} + d_{\overline{QR}} \geq d_{\overline{PR}}$ (Ley del Triángulo).

Verificar que los números reales **R** con $d_{\overline{PQ}} = |P - Q|$ es un espacio métrico.

**9.** Mostrar que el conjunto de puntos del plano con $d_{\overline{PQ}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ para todo $P(x_1, y_1)$; $Q(x_2, y_2)$ es un espacio métrico.

**10.** Consideremos la geometría plana de Euclides limitada a los puntos del interior de un círculo con centro en **C** y radio **r**, donde las rectas son las intersecciones no-vacías del círculo con las rectas del plano euclidiano no-tangentes al círculo. Verificar que esta **geometría** es **hiperbólica** porque por un punto **P** fuera de la recta **L**, pasan un conjunto infinito de rectas, que no intersectan a **L** (Modelo de F. Klein).

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |




Las Matemáticas de primer nivel universitario son indispensables para todo profesionista. El conocimiento de su origen, a través de los registros escritos de las primeras civilizaciones y su evolución histórica hasta el siglo XX, se presenta en 10 capítulos que incluyen ejercicios para cada curso semestral de Historia de las Matemáticas