UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

COORDINACION DE ADMINISTRACION Y SISTEMAS

DEPARTAMENTO DE ESTUDIOS ECONOMICOS Y OPTIMIZACION

MANUAL DE INVESTIGACION DE OPERACIONES II

ELABORO: M.C. AMANDA VAZQUEZ GARCIA

INDICE

FORMULAS DE INVESTIGACION DE OPERACIONES II

MODELO No. 1 (TASA DE LLEGADAS Y TASA DE SERVICIO CONSTANTE). POBLACION Y LINEA DE ESPERA ∞

PARA S = 1

$Cn = \rho^n \qquad \rho = \lambda / (S\mu) \qquad Pn = \rho^n\ Po \qquad Po = 1 - \rho$

$L = \lambda / (\mu - \lambda) \qquad Lq = \lambda^2 / \mu(\mu - \lambda) \qquad W = 1/(\mu - \lambda) \qquad Wq = \lambda / \mu(\mu - \lambda)$

$P\{W > T\} = e^{-\mu(1-\rho)t}$, para $t \geq 0 \qquad P\{Wq > t\} = \rho e^{-\mu(1-\rho)t}$, para $t \geq 0$

PARA S > 1 , n > 1

$Cn = (\lambda/\mu)^n / n!$, para n = 1,2 ......, S $\qquad Cn = \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{S!\,S^{n-S}}$, para n = S, S + 1,...

$$Po = \dfrac{1}{\sum_{n=0}^{S-1} \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \quad \dfrac{(\lambda/\mu)^S}{S!} \quad \dfrac{1}{1 - (\lambda / S\mu)}} \qquad L = Lq + \dfrac{\lambda}{\mu}$$

$Lq = \dfrac{Po\,(\lambda/\mu)^S\ \rho}{S!\,(1-\rho)^2} \qquad Wq = \dfrac{Lq}{\lambda} \qquad W = Wq + \dfrac{1}{\mu}$

$Pn = \dfrac{(\lambda/\mu)^n\ Po}{n!}$, Si $0 < n > S \qquad Pn = \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{S!S^{n-S}}\ Po$, Si $n \geq S$

$$P\{W > t\} = e^{-\mu t}\left[1 + \frac{P_o(\lambda/\mu)^S}{S!(1-\rho)} \cdot \frac{(1 - e^{-\mu t(S-1-\lambda/\mu)})}{(S-1-\lambda/\mu)}\right]$$

$$P\{W_q > t\} = [1 - P\{W_q = 0\}]\, e^{-S\mu(1-\rho)t}$$

$$P\{W_q = 0\} = \sum_{n=0}^{S-1} P_n$$

MODELO 2 (LINEA DE ESPERA FINITA, POBLACION ∞ , TASA DE LLEGADAS Y SERVICIO CONSTANTES).

PARA S = 1

$\lambda_n = \lambda$ para n = 0,1,2,....,M - 1

$\lambda = 0$ para $n \geq M$ $\mu_n = \mu$

$C_n = (\lambda/\mu)^n = \rho^n$ para n = 1,2,3...,M $C_n = 0$ para n > M

$$P_o = \frac{1-\rho}{1-\rho^{(M+1)}} \qquad P_n = \frac{1-\rho}{1-\rho^{(M+1)}}\,\rho^n \quad \text{para } n = 0,1,\dots,M$$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(M+1)\rho^{(M+1)}}{1-\rho^{(M+1)}} \qquad L_q = L - (1 - P_o) \qquad W = \frac{L}{\bar{\lambda}}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}} \qquad \bar{\lambda} = \lambda(1 - P_M)$$

PARA S > 1, S < M

$$C_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \quad , \text{ para } n = 1,2,\dots,S$$

$$C_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{S!\,S^{n-S}} \quad , \text{ para } n = S, S+1, \dots, M \qquad C_n = 0, \text{ para } n > M$$

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_o \quad , \text{ para } n = 1,2,\dots,S$$

$P_n = (\lambda/\mu)^n$ P_o , para n = S, S +1, ...M $P_n = 0$, para n > M

$$S!\ S^{n-S}$$

$$P_o = \frac{1}{1 + \sum\limits_{n=1}^{S} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^S}{S!} \sum\limits_{n=S+1}^{M} \left[\frac{\lambda}{S\mu}\right]^{n-S}}$$

$$L_q = \frac{P_o\,(\lambda/\mu)^S\,\rho}{S!\,(1-\rho)^2}\left[1-\rho^{M-S}-(M-S)\,\rho^{M-S}\,(1-\rho)\right]$$

$$L = \sum_{n=0}^{S-1} n\,P_n + L_q + S\left[1-\sum_{n=0}^{S-1} P_n\right]$$

$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}} \qquad W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}} \qquad \bar{\lambda} = \lambda\,(1-P_M)$$

MODELO No.3
(TASA DE LLEGADA Y FRECUENCIA DE SERVICIO CONSTANTE, FUENTE DE ENTRADA LIMITADA POBLACION FINITA Y POR LO TANTO LINEA DE ESPERA FINITA)

PARA S=1

$\lambda n = (M - n)\,\lambda$, para $n = 1,2,\ldots, M$

$\lambda n = 0$, para $n \geq M$ $\qquad \mu n = \mu$, para $n = 1,2,\ldots$

$$C_n = \frac{M!}{(M-n)}\,(\lambda/\mu)^n,\ n = 1,2,\ldots M \qquad C_n = 0\ ,\ n > M$$

$$P_o = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{M} \frac{M!}{(M-n)!}(\lambda/\mu)^n} \qquad P_n = \frac{M!}{(M-n)!}(\lambda/\mu)^n P_o,\ \text{para } n=1,2,\ldots,M \qquad P_n = 0\ \text{ para } n>M$$

$$L_q = M - \frac{\lambda+\mu}{\lambda}(1 - P_o) \qquad L = \sum_{n=0}^{M} nP_n = L_q + (1 - P_o) = M - \frac{\mu}{\lambda}(1 - P_o)$$

$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}} \qquad W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}} \qquad \bar{\lambda} = \lambda\,(M - L)$$

PARA S>1

$$C_n = \frac{M!}{(M-n)!\,n!}(\lambda/\mu)^n,\ \text{para } n = 1,2,\ldots S \qquad C_n = \frac{M!}{(M-n)!\,S!\,S^{n-S}}(\lambda/\mu)^n,\ \text{para } n=S,S+1,\ldots$$

$C_n = 0$, para $n > M$

$$P_n = P_o \frac{M!}{(M-n)!n!}(\lambda/\mu)^n, \quad \text{Si} \quad 0 \le n \le S \qquad P_n = P_o \frac{M!}{(M-n)!S!S^{n-S}}(\lambda/\mu)^n, \quad \text{Si} \quad S \le n \le M$$

$$P_n = 0, \quad \text{Si} \quad n > M$$

$$P_o = \frac{1}{\sum_{n=0}^{S-1} \frac{M!}{(M-n)!n!}(\lambda/\mu)^n + \sum_{n=S}^{M} \frac{M!}{(M-n)!S!S^{n-S}}(\lambda/\mu)^n} \qquad L_q = \sum_{n=S+1}^{M} (n-S)P_n$$

$$L = \sum_{n=0}^{S-1} nP_n + L_q + S\left(1 - \sum_{n=0}^{S-1} P_n\right) \qquad W = \frac{L}{\bar{\lambda}_o} \qquad W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}}$$

$$\bar{\lambda} = \lambda(M - L)$$

MODELO No.4
LINEAS DE ESPERA CON TASAS DE LLEGADA Y/O SERVICIO DEPENDIENDO DEL ESTADO DEL SISTEMA (VARIAN), POBLACION Y LINEA DE ESPERA ∞

S=1

$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}} \qquad W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}} \qquad L_q = L - (1 - P_o)$$

Po y L tablas en función de c y ρ $\quad P_1 = C_1 P_o$

CaSo I.- Varia la taSa de Servicio

$$\mu_n = n^c \mu_1 \qquad \lambda_n = \lambda \qquad C_n = \frac{(\lambda/\mu_1)^n}{(n!)^c}, \text{ para } n = 1,2,\ldots..$$

μ_1 = Tasa de servicio normal
c = Factor de presión
μ_n = Razon media de servicio cuando hay n clientes en el sistema

CaSo II.- Varia la tasa de llegada

$$\lambda_n = (n+1)^{-b} \lambda_o, \text{ para } n = 0,1,2,\ldots.. \qquad \mu_n = \mu$$

-b = Factor de presión sobre el cliente

CaSo III.-Cuando la frecuencia de llegada y/o servicio dependen del estado del sistema

$$\mu_n = n^a \mu_1, \text{ para } n=1,2,\ldots.. \qquad \lambda_n = (n+1)^{-b} \lambda_o, \text{ para } n=0,1,2,\ldots. \qquad C = a + b$$

PARA S > 1

$$\mu_n = n\mu^1, \text{ Si } n \le S \qquad \mu_n = (n/S)^a S\mu_1, \text{ Si } n \ge S$$

$$\lambda_n = \lambda_o, \text{ Si } n \le S-1 \qquad \lambda_n = (S/n+1)^b \lambda_o \text{ Si } n \ge S-1$$

$$C_n = \frac{(\lambda_o/\mu_1)^n}{n!}, \text{ para } n=1,2,\ldots..S \qquad C_n = \frac{(\lambda_o/\mu_1)^n}{S!(n!/S!)^c S^{(1-c)(n-S)}}, \text{ para } n=S,S+1,\ldots..$$

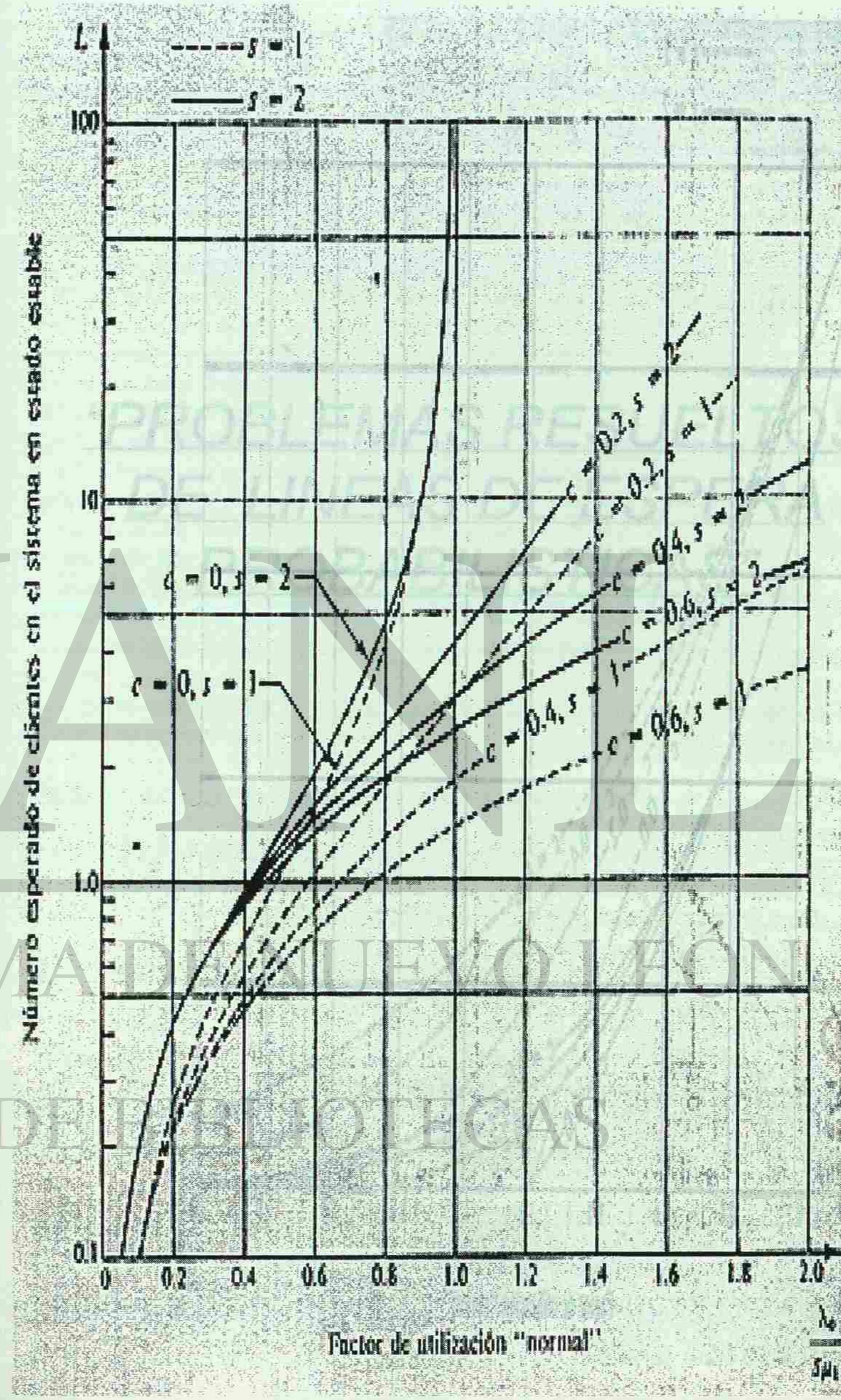
$$L_q = (L - P_1) - 2(1 - P_o - P_1), \quad \text{Si} \quad S=2$$

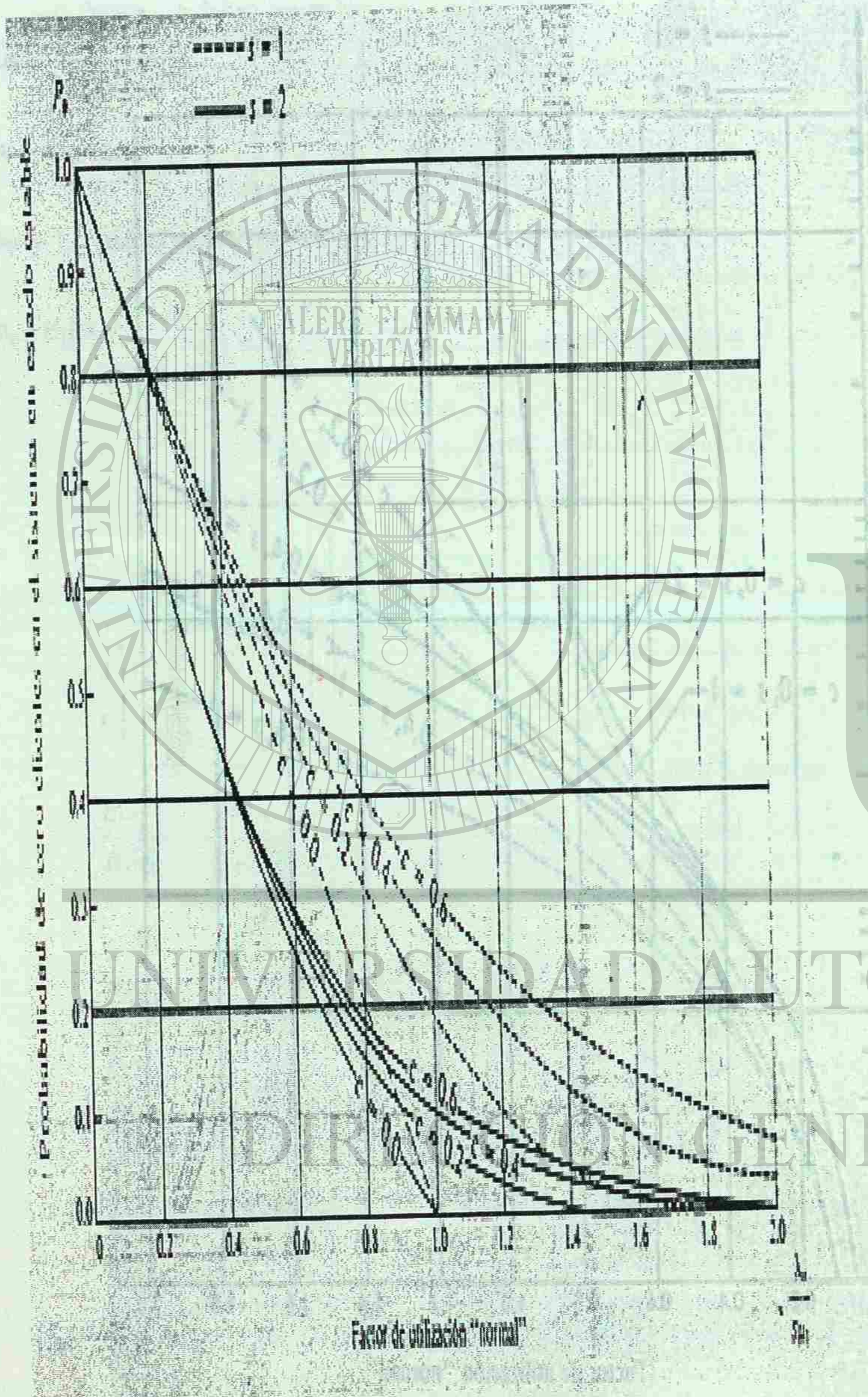
$$Lq = \frac{Po\,(\lambda/\mu)^S\,\rho}{S!\,(1-\rho)^2}$$

$$W = Wq + 1/\mu$$

Po y L (tablas en funcion de c y ρ)

$$P_1 = C_1 Po$$





"PROBLEMAS RESUELTOS DE LINEAS DE ESPERA PROBABILISTICAS"

TERMINOLOGIA

L = ESTADO DEL SISTEMA O EL NUMERO DE CLIENTES EN EL SISTEMA EN UN MOMENTO DADO.

Lq = NUMERO DE CLIENTES EN EL SISTEMA ESPERANDO POR SERVICIO.

W = TIEMPO TOTAL DEL CLIENTE EN EL SISTEMA DESDE QUE ENTRA HASTA QUE SALE.

Wq = TIEMPO TOTAL DE ESPERA POR SERVICIO DEL CLIENTE EN EL SISTEMA.

ρ = RAZÓN DE UTILIZACIÓN DEL SISTEMA.

M = MÁXIMO NUMERO DE CLIENTES POTENCIALES EN EL SISTEMA EN UN MOMENTO DADO.

S = NUMERO DE SERVIDORES EN EL SISTEMA.

n = NUMERO DE CLIENTES EN EL SISTEMA EN UN TIEMPO t.

Pn(t) = PROBABILIDAD DE QUE HAYA EXACTAMENTE n CLIENTES EN EL SISTEMA EN UN TIEMPO t.

λ = FRECUENCIA DE LLEGADAS POISSON = NUMERO DE CLIENTES QUE LLEGAN POR UNIDAD DE TIEMPO .

μ = FRECUENCIA DE SERVICIO EXPONENCIAL = NUMERO DE CLIENTES QUE SON ATENDIDOS POR UNIDAD DE TIEMPO.

$1/\lambda$ = TIEMPO ENTRE LLEGADAS QUE TRANSCURRE ENTRE UNA LLEGADA Y LA SIGUIENTE.

$1/\mu$ = TIEMPO DE SERVICIO ALA MEDIA DE LA DISTRIBUCIÓN ESPERADA DE LOS TIEMPOS DE SERVICIO.

P{ W>t} = PROBABILIDAD DE QUE UN CLIENTE SE ESTE MAS DE UN TIEMPO t EN EL SISTEMA.

P{ Wq > t} = PROBABILIDAD DE QUE UN CLIENTE SE ESTE MAS DE UN TIEMPO t ESPERANDO POR SERVICIO EN EL SISTEMA.

1.-En el departamento de emergencia de un hospital los pacientes llegan con una distribución de probabilidad poisson a una media de 3 clientes por hora.El médico que esta en dicho departamento los atiende con una frecuencia de servicio exponencial a una tasa media de 4 clientes por hora. ¿ Contrataria o no a un segundo médico?

Nota: Este problema no tiene parámetro para tomar una desición, se realizó para fines de práctica para utilización de fórmulas.

Determine :

a) Razón de utilización del sistema (ρ).
b)Probabilidad de que no se encuentren pacientes en el sistema (P0).
c)Probabilidad de que exista un paciente en el sistema (P1).
d)Probabilidad de que existan 3 pacientes en el sistema (P3).
e)Tiempo total del cliente en el sistema (W).
f)Tiempo total de espera por servicio en el sistema (Wq).
g)El número de pacientes en el sistema en un momento dado (L).
h)El número de pacientes en el sistema esperando por servicio (Lq).
i)Probabilidad de que el cliente se espere más de 1 hora en el sistema.P {W > 1 }
j)Probabilidad de que el cliente espere más de media hora en el sistema esperando por servicio. P { Wq > 1 / 2 } .

SOLUCION : MODELO I

Poblacion = ∞ — Tasa de llegadas = cte. (λ)

Línea de espera = ∞ — Tasa de servicio = cte. (μ)

Datos:

λ = 3 Pacientes/ hora

μ = 4 Pacientes/hora

Para s = 1

a)$\rho = \lambda / s\mu = 3/(1)(4) = 3/4$

b)$P0 = 1 - \rho = 1 - 3/4 = 1/4$

c)$Pn = \rho^n P0$

c)$P1 = (3/4)^1 (1/4) = 3/16$

Para s = 2

a)$\rho = \lambda / s\mu = 3/(2)(4) = 3/8$

b)$$P0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \left\{\frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \left(\frac{1}{1-(\lambda/s\mu)}\right)\right\}}$$

b)$$P0 = \frac{1}{\left\{ \frac{(3/4)^0}{0!} + \frac{(3/4)^1}{1!} + \left\{\frac{(3/4)^2}{2!} \cdot \frac{1}{1-3/(2)(4)}\right\}\right\}} = 5/11$$

c) $$Pn = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0$$

$d) P3= (3/4)^3 (1/4)=.1054$

$c) P1= \dfrac{(3/4)^1}{1!} (5/11) = .3409$

$e) W= \dfrac{1}{\mu - \lambda} = \dfrac{1}{4 - 3} = 1$

$d)\ P_n = \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{s!\, s^{n-s}} P_0$

$f) Wq= \dfrac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \dfrac{3}{4(4-3)} = 3/4$

$d)\ P3= \dfrac{(3/4)^3}{2!\, 2^{3-2}} .(5/11) = .0479$ (n>s)

sustituyendo:

$g) L = \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda} = \dfrac{3}{4-3} = 3$

? $e)\ W= Wq+ \dfrac{1}{\mu} =$

$h)\ Lq= \dfrac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \dfrac{(3)^2}{4(4-3)} = 2.25$

? $f)\ Wq= \dfrac{Lq}{\lambda}$

$i)\{ P\{W>1\} = e^{-\mu(1-\rho)t}$
$= e^{-4(1-3/4)(1)}$
$= .3678$

$h) Lq= \dfrac{P_0 (\lambda/\mu)^s \rho}{s!\,(1-\rho)^2}$

$j)\{ P\{Wq>1/2\} = \rho\, e^{-\mu(1-\rho)t} \}$
$= (3/4)\, e^{-4(1-3/4)(1/2)}$
$= .4548$

$h) Lq= \dfrac{(5/11)\,(3/4)^2\,(3/8)}{2!\ \ (1-3/8)^2} = .1227$

Continuación incisos i) y j) para cuando s=2:

$$i)P\{W>1\} = e^{-\mu t}\left\{ 1+ \dfrac{P_0 (\lambda/\mu)^s}{s!\,(1-\rho)} \dfrac{(1 - e^{-\mu t(s-1-\lambda/\mu)})}{s-1-(\lambda/\mu)} \right\}$$

$$i)P\{W>1\} = e^{-4(1)}\left\{ 1+\dfrac{5/11)\ (3/4)^2}{2!\,(1-3/8)} \dfrac{(1 - e^{-4(1)(2-1-3/4)})}{2-1-(3/4)} \right\}$$

$i)P\{W>1\} =.027$

?

$j)\ P\{Wq>1/2\}= [\ 1- P\{ Wq=0 \}]\ e^{-s\,\mu(1-\rho)t}$

utilizando fórmula:

$$P\{ Wq=0 \}= \sum_{n=0}^{s-1} Pn$$

$$P\{ Wq=0 \}= \sum_{n=0}^{2-1} Pn = P0+P1$$

$= 5/11+15/44$
$= .7954$

sustituyendo en fórmula inciso j):

$j)P\{Wq>1/2 \}= [\ 1- .7954]]\ e^{-2(4)(1-3/8)(1/2)}$

$= .01677$

TABLA DE VALORES FINALES:

	S = 1	S = 2
a) ρ	3/4	3/8
b) P0	1/4	5/11
c) P1	3/16	15/44
d) P3	.1054	.0479
e) W	1	.2908
f) Wq	3/4	.0409
g) L	3	.8727
h) Lq	2.25	.1227
i)P{W>1}	.3678	.027
j) P{Wq>1/2}	.454	.0167

2.-Durante un periodo de 8 horas, llegaron 96 carros a la estación de servicio de Joe. Suponiendo que el tiempo entre llegadas tiene una distribución exponencial, use los datos proporcionados para estimar:

a) El valor de la frecuencia de llegadas .
b) El tiempo medio entre llegadas.
c) La razón media de llegadas

SOLUCION: MODELO I

Poblacion = ∞ Tasa de llegadas = cte. (λ)
Línea de espera = ∞ Tasa de servicio = cte. (μ)

Por medio de una regla de tres simple obtenemos que:

96 carros ------ 8 horas
χ ------ 1 hora

$\chi = \lambda =$ 12 carros/hora a) $\lambda =$ 12 carr/hr.

b) El tiempo medio entre llegadas

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{12} = 0.083333 \text{ horas}$$

b) $\frac{1}{\lambda} =$ 0.083333 hr.

c) La razon media de llegadas:

$\lambda n = \lambda =$ 12 carros/hora c) λn = 12car/hr.

3.-Determine el número de máquinas a que puede dar servicio un Mecánico económicamente si cada maquina requiere servicio una vez en 10 horas , y se lleva una hora para dar servicio a una máquina. Suponga que los costos por máquina son de $30 por hora y la M.O es $ 5 por / hora para cada mecánico.

SOLUCION : MODELO III

Poblacion = finita Tasa de llegadas = cte. (λ)
Línea de espera = finita Tasa de servicio = cte. (μ)

Datos:
λ= 10 HORA
μ= 1/HORA
s= 1 SERVIDOR
L($ 30) + 5(# mecánicos)= TOTAL

M= 1 1 Máquina (1 máquina - 1 mecánico

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{M}\left[\frac{M!}{(M-n)!}(\lambda/\mu)^n\right]}$$

P_O= .9091

$$L = M - \frac{\mu}{\lambda}(1-P_0)$$

A)L= .0909 L(30) + 5(Mecánico)= Total
.0909(30)+ 5(1)= 7.7270 (1 Máquina - 1 Mecánico)

7.7270 * 2= 15.45 (1 Máquina - 2 Mecánicos)

2 Máquinas (1 Mecánico)
M = 2

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{M}\left[\frac{M!}{(M-n)!}(\lambda/\mu)^n\right]} = .8197$$

$$L = M - \frac{\mu}{\lambda}(1-P_0)$$

L= .1970

L(30) + 5(# Mecánicos)= Total
.1970(30) +5(1)= 10.91

4.-.-Dos Mecánicos atienden 5 máquinas en un taller. Cada máquina se descompone con una media de 3/ hora . El tiempo de reparación por máquina es exponencial con una distribución poisson con una media de 15 minutos.

A) Encuentre la probabilidad de que los dos mecánicos estén ociosos y la de que uno de ellos este desocupado.

B) Cuál es el # esperado de máquinas inactivas que no se le está dando servicio

C) Cuál es el # total de máquinas inactivas

SOLUCION : MODELO III

Poblacion = finita — Tasa de llegadas = cte. (λ)

Linea de espera = finita — Tasa de servicio = cte. (μ)

Datos:

$1/\mu$= 15 minutos

λ= 3 / hora

μ= 4/HORA

s= 2 SERVIDORES

M= 5 Máquinas

$$P_{O}=\frac{1}{\sum_{n=0}^{S-1}\frac{M!}{(M-n)!n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}+\sum_{n=s}^{M}\frac{M!}{(M-n)!s!s^{n-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}}$$

$$P_{O}=\frac{1}{(5-0)!(0!)}\left(\frac{3}{4}\right)^{0}+\frac{5!}{(5-1)!}\left(\frac{3}{4}\right)^{1}+\left[\frac{5!}{(5-2)!2!2^{0}}\left(\frac{3}{4}\right)^{2}+\frac{5!}{(5-3)!2!2^{1}}\left(\frac{3}{4}\right)^{3}+\frac{5!}{(5-4)!2!2}\right.$$

$$+\frac{5!}{(5-5)!2!2^{3}}\left(\frac{3}{4}\right)^{5}$$

A)Po= 4.32%

$$P_n = Po\frac{M!}{(M-n)!n!}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$$

$$P_1 = .0432\frac{5!}{(5-1)!1!}\left(\frac{3}{4}\right)^{1}$$

A)P1= 16.14%

$$P3 = Po\frac{M!}{(M-n)!s!s^{n-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}$$

$$P3 = .0432\frac{5!}{(5-3)!2!2^{1}}\left(\frac{3}{4}\right)^{3} = 27.34\%$$

$$P4 = .0432\frac{5!}{(5-4)!2!2^{2}}\left(\frac{3}{4}\right)^{4} = 20.50\%$$

$$P5 = .0432\frac{5!}{(5-5)!2!2^{3}}\left(\frac{3}{4}\right)^{5} = 7.69\%$$

$$Lq = \sum_{n=s+1}^{M}(n-s)Pn$$

$$Lq = (3-2).2734 + (4-2).2050 + (5-2).0769$$

B)Lq=.9141

$$L = \sum_{n=o}^{S-1} nPn + Lq + s\left[1-\sum_{n=0}^{s=1} Pn\right]$$

$$L = \left[(0^{*}.0432)+(1^{*}.1614)\right]+.9141+2\left(1-\left((.0432+.1614)\right)\right)$$

C)L=2.6663

5.-Una cafetería tiene una capacidad máxima de asientos para 50 personas. Los clientes llegan con una distribución Poisson a una tasa de 10 clientes/hr y son atendidos a una tasa de 12 clientes/hr.

a) ¿Cual es la probabilidad de que el siguiente cliente no comerá en la cafetería en virtud de que ésta esta saturada?

b) Supóngase que tres clientes que llegan quieren sentarse juntos ¿cuál es la probabilidad de que no se puedan cumplir sus deseos (supóngase que pueden hacerse arreglos para sentarse juntos en tanto que haya 3 asiento desocupados en cualquier lugar de la cafetería?

Datos:

$\lambda = 10$ clientes / hr

$\mu = 6$ clientes / hr

$M = 50$

Razon de utilizacion

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{12} = 0.83333$$

$$Pn = \left[\frac{1-\rho}{1-\rho^{M+1}}\right]\rho^{n}$$

$$P_{50} = \frac{1-0.8333}{1-0.8333^{50+1}}(0.8333)^{50}$$

$$\underline{\underline{P_{50} = 1.82\mathrm{x}10^{-5}}}$$

$$P_{48} = \frac{1-0.8333}{1-0.8333^{50+1}}(0.8333)^{48}$$

$$\underline{\underline{P_{48} = 2.65\mathrm{x}10^{-5}}}$$

6.- Dos mecánicos están atendiendo cinco máquinas en un taller. Cada máquina se descompone según una distribución Poisson con media de 3 por hora. El tiempo de reparacion por máquina es exponencial con media de 15 minutos.
a) Encuentre la probabilidad que los dos de ellos estén de ociosos y la de que uno de ellos esté desocupado.
b) ¿Cuál es el número esperado de máquinas inactivas a las que no se les da servicio?

SOLUCION : MODELO III

Poblacion = finita — Tasa de llegadas = cte. (λ)

Línea de espera = finita — Tasa de servicio = cte. (μ)

Datos:

S=2

M=5

λ=3ctes/hr

1/μ=15minutos(1hr/60minutos)=1/4hr

μ=4ctes/hr

a) P0=?, P1=?

b)Wq=?

$$po = \frac{1}{\left\{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\frac{M!}{(M-n)!n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}\right]+\sum_{n=s}^{M}\left[\frac{M!}{(M-n)!s!s^{n-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}\right]\right\}}$$

$$P0 = \frac{1}{\left\{\sum_{n=0}^{2-1=1}\left[\frac{5!}{(5-0)!0!}\left(\frac{3}{4}\right)^{0}+\frac{5!}{(5-1)!1!}\left(\frac{3}{4}\right)^{1}\right]+\sum_{n=2}^{5}\left[\begin{matrix}\frac{5!}{(5-2)!2!2^{(2-2)}}\left(\frac{3}{4}\right)^{2}+\frac{5!}{(5-3)!2!2^{(3-2)}}\left(\frac{3}{4}\right)^{3}+\\ \frac{5!}{(5-4)!2!2^{(4-2)}}\left(\frac{3}{4}\right)^{4}+\frac{5!}{(5-5)!2!2^{(5-2)}}\left(\frac{3}{4}\right)^{5}\end{matrix}\right]\right\}}$$

a) $$P0 = \frac{1}{1+3.75+5.625+6.3281+4.7461+1.7798} = 0.043$$

$$Pn = Po\frac{M!}{(M-n)!n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n} \quad \text{si } 0<n<s \Rightarrow 0<1<2$$

a) $$P1 = \frac{(.043)(5!)}{(5-1)!1!}\left(\frac{3}{4}\right)^{1} = .1614$$

$$Pn = Po\frac{M!}{(M-n)!s!s^{(n-s)}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n} \quad \text{si } s<n<M \Rightarrow 2<3<5$$

$$P3 = \frac{(.043)(5!)}{(5-3)!2!2^{(3-2)}}\left(\frac{3}{4}\right)^{3} = 0.2721$$

$$P4 = \frac{(.043)(5!)}{(5-4)!2!2^{(4-2)}}\left(\frac{3}{4}\right)^{4} = 0.2040$$

$$P5 = \frac{(.043)(5!)}{(5-5)!2!2^{(5-2)}}\left(\frac{3}{4}\right)^{5} = 0.0765$$

$$Lq = \sum_{n=s+1}^{M}(n-s)Pn$$

$$Lq = \sum_{n=2+1}^{5}\left[(3-2)(.2721)+(4-2)(.2040)+(5-2)(.0765)\right] = 0.9096$$

$$L = \sum_{n=0}^{s-1} nPn + Lq + s\left[1-\sum_{n=0}^{s-1} Pn\right]$$

$$L = \sum_{n=0}^{2-1}\left[(0)(.043)+(1)(.1614)\right] + 0.9096 + 2\left[1-\sum_{n=0}^{2-1}(.043+.1614)\right] = 0.1614 + 0.9096 + 1.5912 = 2.6622$$

$\overline{\lambda}$ = λ(M-L) = (3)(5-2.6622) = 7.0134

b) $$Wq = \frac{Lq}{\overline{\lambda}} = \frac{0.9096}{7.0134} = 0.12969$$

8.- En una instalacion de auto servicio las llegadas ocurren según una distribución Poisson con media de 50 por hora. Los tiempos de servicio por cliente estan exponencialmente distribuidos con media de 5 minutos.

a) Encuentre el numero esperado de clientes en servicio
b) ¿Cuál es el porcentaje de tiempo que la instalación está vacía?

SOLUCION : MODELO I

Poblacion = ∞ — Tasa de llegadas = cte. (λ)
Línea de espera = ∞ — Tasa de servicio = cte. (μ)

Datos:
λ=50 ctes/hr
1/μ=1/5minutos(60min/ hora) = 12
μ=12ctes/hr

supongamos 5 servidores
s=5
a) L-Lq=?
b) Po=?

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{50}{(5)(12)} = 0.8333$$

$$Po = \frac{1}{\left\{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}}{n!}\right] + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s}}{s!}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)}\right)\right\}}$$

$$Po = \frac{1}{\left\{\sum_{n=0}^{5-1=4}\left[\frac{\left(\frac{50}{12}\right)^{0}}{0!} + \frac{\left(\frac{50}{12}\right)^{1}}{1!} + \frac{\left(\frac{50}{12}\right)^{2}}{2!} + \frac{\left(\frac{50}{12}\right)^{3}}{3!} + \frac{\left(\frac{50}{12}\right)^{4}}{4!}\right] + \frac{\left(\frac{50}{12}\right)^{5}}{5!}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{50}{(5)(12)}\right)}\right)\right\}}$$

b) $$Po = \frac{1}{1+4.1666+8.6805+12.0563+12.55+62.78} = 0.00987 = 0.98\%$$

$$Lq = \frac{Po\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}{s!(1-\rho)^2} \quad \rho = \frac{(.0098)}{5!(1-.8333)^2}\left(\frac{50}{12}\right)^5 (.8333) = 3.1$$

$$L = Lq + \frac{\lambda}{\mu} = 3.1 + \frac{50}{12} = 7.2666$$

a) $L - Lq = 7.2666 - 3.1 = 4.1666$

9.-En promedio una afinación completa (bujias, punterias, aceite, etc.) en Fire Year dura 45 minutos. Si el tiempo para hacer una afinación es una variable aleatoria con distribución exponencial.

a)¿ Cual es el valor de la frecuencia de servicio?

b)¿ Cual es el tiempo medio de servicio ?

c)¿ Cual es la tasa media de servicio ?

SOLUCION: MODELO I.

Poblacion = ∞ — Tasa de llegadas = cte. (λ)

Linea de espera = ∞ — Tasa de servicio = cte. (μ)

Si el tiempo de servicio son 45 minutos por afinación entonces:

1 afinación ------- 45 minutos

χ ------- 60 minutos

$\chi = \mu = 1.3333$ — a) μ =1.33333 clien/hr

b) ¿ Cual es el tiempo medio de servicio ?

$\frac{1}{1.33} = \frac{1}{1.33}(60) =$ 45 minutos — b) $\frac{1}{\mu}$ = 45 minutos

c)¿ Cual es la tasa media de servicio ?

$\mu n = \mu = 1.3333$ ctes./min — c) μn = 1.333 clien/hr.

10.-Una computadora procesa los trabajos que se le asignan sobre la base "primero en llegar primero ser atendido"(PEPS). Los trabajos llegan con una distribución Poisson con promedio de tiempo entre llegadas de cinco minutos. En el procesamiento de los trabajos consiste en que ningún trabajo pase más de seis minutos promedio en el sistema. ¿ Qué tan rápido debe de trabajar el procesador para cumplir con este objetivo ?

Datos:

$\frac{1}{\lambda}$ = 1/5(60min./hr.) = λ =12 trabajos/hora

W = 6 minutos(1/60 horas/minuto) = .1horas

Nos pide la frecuencia de servicio (μ) ?

SOLUCION: MODELO I

Poblacion = ∞ — Tasa de llegadas = cte. (λ)

Línea de espera = ∞ — Tasa de servicio = cte. (μ)

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$W(\mu - \lambda) = 1$$

$$\mu - \lambda = 1 / W$$

$$\mu = \frac{1}{W} + \lambda = 1/.1 + 12$$

μ = 22 trabajos/hora

11.-.-Actualmente una gasolinera tiene 2 bombas y está considerando agregar una tercera. Los vehículos llegan al sistema con un promedio de 1 cada 10 minutos. cada vehículo requiere de un promedio de 5 minutos para ser atendido. Supóngase que los vehículos llegan de acuerdo con una distribución Poisson y que el tiempo necesario para prestar el servicio se distribuye en forma exponencial.

a)Determine la razón de utilización del sistema. (ρ)

b)¿Cuál sería el efecto sobre la línea de espera si se agrega una tercera bomba?

c)¿Cómo se evaluarían los costos en esta situación?

SOLUCION: MODELO I

Poblacion = ∞ — Tasa de llegadas = cte. (λ)

Línea de espera = ∞ — Tasa de servicio = cte. (μ)

Datos:

$1/\lambda$=10min*60 min/hra

λ=6 ctes/hra

$1/\mu$=5 min*60 min/hra

μ=12 ctes/hra

Cuando s=2

a) $\rho = 6 / 2*12=0.25$ — $\rho < 1$ el sistema se resuelve.

$$Po=\frac{1}{\frac{(0.5)^0}{0!}+\frac{(0.5)^1}{1!}+\{\frac{(0.5)^2}{2!}*\frac{1}{1-0.25}\}} = 0.60$$

$$P2=\frac{(0.5)^2}{2!}(0.60)=0.075=7.5\%$$

$$Lq=\frac{(0.60)(0.5)^2(0.25)}{2!\,(1-0.25)^2}= 0.3333$$

Cuando S=3

$$Po=\frac{1}{\frac{(0.5)^0}{0!}+\frac{(0.5)^1}{1!}+\frac{(0.5)^2}{2!}+\{\frac{(0.5)^3}{3!}*\frac{1}{1-0.166}\}} = 0.606$$

$$P3=\frac{(0.5)^3}{3!}(0.606)=0.0126=1.26\%$$

$$Lq=\frac{(0.606)(0.5)^3(0.166)}{3!\,(1-0.166)^2}= 0.00301$$

b) Como se muestra el número de clientes en espera de servicio cambia notablemente de un 0.33 a un 0.003, pero con 2 bombas es suficiente para atender a los clientes,

c) Y en cuanto al costo no es justificable la instalación de otra bomba de gasolina.

12.-En una peluquería existen 3 peluqueros que se encargan de atender a los clientes. Actualmente, los clientes llegan con una tasa media de 6 por hora. Cada peluquero puede hacer un corte de pelo a una tasa de 4 clientes por hora. Los intervalos de llegada parecen seguir la distribución Poisson y los tiempos de servicio siguen una distribución exponencial

a.)¿Cuál será la longitud promedio de la linea de espera? (Lq)

b.)¿Cuánto tiempo deberá esperar el cliente promedio para que empiece su servicio?(Wq)

SOLUCION : MODELO I

Poblacion = ∞ — Tasa de llegadas = cte. (λ)

Línea de espera = ∞ — Tasa de servicio = cte. (μ)

s=3

λ=6 ctes/hra

μ=4 ctes/hra

ρ= 6 / (3) (4) = .5

$$Po=\frac{1}{\frac{(1.5)^0}{0!}+\frac{(1.5)^1}{1!}+\frac{(1.5)^2}{2!}+\{\frac{(1.5)^3}{3!}*\frac{1}{1-0.5}\}} = 0.2105$$

a) $$Lq=\frac{(0.2105)\,(1.5)^3\,0.5}{3!\,(1-0.5)^2}= 0.2368$$

b) $$Wq=\frac{0.2368}{6}= 0.0394 \text{ hrs}$$

13.--En un sistema de reservaciones de líneas aéreas un empleado se encarga de atender las llamadas telefónicas. El tiempo promedio para atender una llamada es de 3 minutos. Los tiempos de servicio se distribuyen en forma exponencial. Las llamadas ocurren con un promedio de 10 minutos entre una y otra y se ajustan a una distribución Poisson. Recientemente, algunos de los clientes se han quejado porque la línea está ocupada cuando llaman. Investigue el origen de estas quejas mediante la teoría de colas.

SOLUCION : MODELO I

Poblacion = ∞ — Tasa de llegadas = cte. (λ)

Línea de espera = ∞ — Tasa de servicio = cte. (μ)

$1/\lambda$=10 min*60 min/hra	ρ =6 / 20=0.3
λ=6 ctes/hra	Po=1-0.3=0.7
$1/\mu$=3 min*60 min/hra	P1=$(0.3)^1$ 0.7=0.21
μ=20 ctes/hra	L=6 / (20-6)=0.42
Lq=6^2 / 20(20-6)=0.1285	Wq=6 / 20(20-6)=0.0214

Solución: Las quejas de los clientes no tienen razón de ser, por que la línea queda ocupada solamente 21% de probabilidad de que la línea esté ocupado.

14.-Considere una oficina de inmigración. Suponiendo que el modelo básico es una aproximación razonable de la operación, recuerde que si la agente estuviese ocupada todo el tiempo procesaría 120 ingresos durante su turno de 8 horas. Si a su oficina llega un promedio de un ingreso cada 6 minutos, encuentre:

a) El numero esperado en el sistema
b) El numero esperado en la fila
c) El tiempo previsto de línea de espera
d) El tiempo previsto de espera
e) La probabilidad de que el sistema este vacío

SOLUCION : MODELO I

Poblacion = ∞ — Tasa de llegadas = cte. (λ)

Línea de espera = ∞ — Tasa de servicio = cte. (μ)

S = 1

DATOS

$1/\lambda$ = 6 minutos

$1/\lambda$ = 0.1 hr

λ = 10 / hr μ = 15 personas/horas

a) $L = \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda}$

$L = \dfrac{\mathbf{10\ /hr}}{15 \text{ personas/hr} - 10\text{/hr}}$

L = 2 personas/hr

b) $Lq = \dfrac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$

$Lq = \dfrac{(10\ /hr)^2}{15 \text{ personas/hr } (15 \text{ personas/hr} - 10\text{/hr})}$

Lq = 1.333 personas/hr

c) $W = \dfrac{1}{\mu - \lambda}$ $W = \dfrac{1}{(15 - 10)}$ W = 0.2 hrs./persona

d) $Wq = \dfrac{\lambda}{(\mu - \lambda)}$ $W = \dfrac{10}{15\ (15 - 10)}$ W = 0.1333 h/persona

e) Po = 1 - ρ

$\rho = \dfrac{\lambda}{s\mu} = \dfrac{10}{1(15)} = 0.6666$

Po = 1 - 0.6666

Po = 0.3333

15.- A la exclusa de La Crosse de en el río Mississippi llegan barcazas a razón de una cada dos horas, en promedio. Si el intervalo de tiempo tiene una distribución exponencial:

a) Cual es el valor de λ ?
b) Cual es el tiempo medio entre llegadas?
c) Cual es la razón media de llegadas?

SOLUCION : MODELO I

Poblacion = ∞ | Tasa de llegadas = cte. (λ)
Línea de espera = ∞ | Tasa de servicio = cte. (μ)

a)

$\lambda = ½$

$\lambda = 0.5$ barcas/hora

b)

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0.5}$$

$$\frac{1}{\lambda} = 2 \text{ horas}$$

c) $\lambda n = 0.5$ hora

16.- Una agente de inmigración del aeropuerto Heathrow de Londres podría procesar un promedio de 120 personas que llegan durante sus 8 horas de servicio si estuviese constantemente ocupada. Si el tiempo necesario para procesar un ingreso es una variable aleatoria con distribución exponencial:

a)Cual es el valor de μ?
b)Cual es el tiempo medio de servicio?
c)Cual es la razón media de servicio?

SOLUCION : MODELO I

Poblacion = ∞ | Tasa de llegadas = cte. (λ)
Línea de espera = ∞ | Tasa de servicio = cte. (μ)

a)

$$\mu = \frac{120 \text{ personas}}{8 \text{ horas}}$$

$\mu = 15$ personas/hora

b)

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{15}$$

$$\frac{1}{\mu} = 0.067 \text{ personas/hora}$$

c)

$\mu_n = \mu = 15$ personas/hora

17.-.- Considere el modelo.

a) Suponga que sólo hay un servidor y que el tiempo esperado de servicio es exactamente un minuto. Compare L para los casos en que la tasa media de llegada es: 0.5, 0.9 y 0.99 clientes por minuto, respectivamente. Haga lo mismo para Lq, W, Wq y P{W>5}.

b) Ahora suponga que se cuenta con dos servidores y que el tiempo esperado de servicio es exactamente dos minutos. Haga las mismas comparaciones que en el inciso *a*.

SOLUCION : MODELO I

Poblacion = ∞ Tasa de llegadas = cte. (λ)

Línea de espera = ∞ Tasa de servicio = cte. (μ)

Datos:

s = 1
$1/\mu = 1$ min

a) Comparar L cuando
$\lambda = 0.5$ clientes/min.
$\lambda = 0.9$ clientes/min.
$\lambda = 0.99$ clientes/min.
Haga lo mismo para: Lq, W, Wq y P{W>5}

b) s = 2
$1/\mu = 2$ min
Haga las mismas comparaciones que en el inciso a.

Respuestas del inciso (a).

$1/\mu = 1$ min. =====> $\mu = 1/1\text{min}.(60\text{min.}/1\text{hr.}) = 60$ clientes/hrs.

Para $\lambda = 0.5$

$\lambda = 0.5$ clientes/min.(60 min./1 hr.) = 30 Clientes/hr.

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{30}{60 - 30} = 1 \text{ cliente.}$$

$$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{30^2}{60(60 - 30)} = 0.5 \text{ cliente.}$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{60 - 30} = 0.0333 \text{ hora.}$$

$$Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{30}{60(60 - 30)} = 0.016666 \text{ hora.}$$

$$P\{W>t\} = e^{-\mu(1-\rho)t} = e^{-60(1-(30/60))5} = 7.175 \text{ X}10^{-66}$$

Para $\lambda = 0.9$

$\lambda = 0.9$ clientes/min.(60 min./1 hr.) = 54 Clientes/hr.

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{54}{60 - 54} = 9 \text{ cliente.}$$

$$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{54^2}{60(60 - 54)} = 8.1 \text{ cliente.}$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{60 - 54} = 0.16666 \text{ hora}$$

$$Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{54}{60(60 - 54)} = 0.15 \text{ hora.}$$

$$P\{W>t\} = e^{-\mu(1-\rho)t} = e^{-60(1-(54/60))5} = 9.357 \text{ X}10^{-14}$$

Para $\lambda = 0.99$

$\lambda = 0.99$ clientes/min.(60 min./1 hr.) = 59.4 Clientes/hr.

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{59.4}{60 - 59.4} = 99 \text{ cliente.}$$

$$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{59.4^2}{60(60 - 59.4)} = 98.01 \text{ cliente.}$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{60 - 59.4} = 1.6666 \text{ hora.}$$

$$Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{59.4}{60(60 - 59.4)} = 1.65 \text{ hora.}$$

$$\mathbf{P\{W>t\} = e^{-\mu(1-\rho)t} = e^{-60(1-(59.4/60))5} = 0.04978}$$

Respuestas del inciso (b). $s = 2$

$1/\mu = 2$ min. =====> $\mu = 1/2\text{min.}(60\text{min.}/1\text{hr.}) = \underline{30 \text{ clientes/hrs.}}$

Para $\lambda = 0.5$

$\lambda = 0.5$ clientes/min.(60 min./1 hr.) = 30 Clientes/hr.

$$P_0 = \cfrac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \left\{\left(\frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \left(\frac{1}{1-(\lambda/s\mu)}\right)\right\}\right.}$$

$$P_0 = \cfrac{1}{\frac{(30/30)^0}{0!} + \frac{(30/30)^1}{1!} + \left\{\left(\frac{(30/30)^2}{2!} \cdot \left(\frac{1}{1-(30/2(30))}\right)\right\}\right.} = \frac{1}{1 + 1 + (0.5 \text{ X } 2)}$$

$P_0 = 0.33333$

$$L_q = \frac{P_0(\lambda/\mu)^s \rho}{s!\,(1-\rho)^2} = \frac{0.3333(30/30)^2\ (30/(30X2))}{2!\ (1-0.5)^2} = 0.3333 \text{ clientes.}$$

$L = L_q + \lambda/\mu = 0.3333 + 30/30 = \underline{1.3333 \text{ clientes}}$

$W_q = L_q/\lambda = 0.333/30 = \underline{0.0111 \text{ hrs.}}$

$W = W_q + 1/\mu = 0.0111 + 1/30 = 0.0444$ hrs.

$$P\{W>t\} = e^{-\mu t}\left\{1 + \frac{P_0(\lambda/\mu)^s}{s!\,(1-\rho)}\ \frac{(1 - e^{-\mu t(s-1-\lambda/\mu)})}{s-1-(\lambda/\mu)}\right\}$$

$$P\{W>5\} = e^{-(30 X 5)}\left\{1 + \frac{0.3333\,(30/30)^2}{2!\,(1-0.5)}\ \frac{(1 - e^{-(30 X 5)(2-1-30/30)})}{2-1-(30/30)}\right\}$$

$P\{W>5\} = 7.175 \text{ X } 10^{-66}(1 + (0.3333 \text{ X } 0)) = \underline{7.175 \text{ X } 10^{-66}}$

Para $\lambda = 0.9$

$\lambda = 0.9$ clientes/min.(60 min./1 hr.) = 54 Clientes/hr.

$$P_0 = \cfrac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \left\{\left(\frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \left(\frac{1}{1-(\lambda/s\mu)}\right)\right\}\right.}$$

$$P_0 = \cfrac{1}{\frac{(54/30)^0}{0!} + \frac{(54/30)^1}{1!} + \left\{\left(\frac{(54/30)^2}{2!} \cdot \left(\frac{1}{1-(54/2(30))}\right)\right\}\right.} = \frac{1}{1 + 1.8 + (1.62X10)}$$

$P_0 = 0.05263$

$$L_q = \frac{P_0(\lambda/\mu)^s \rho}{s!\,(1-\rho)^2} = \frac{0.05263(54/30)^2\ (54/(30X2))}{2!\ (1-0.9)^2} = 7.669 \text{ clientes.}$$

$L = L_q + \lambda/\mu = 7.669 + 54/30 = \underline{9.46908 \text{ clientes}}$

$W_q = L_q/\lambda = 7.669/54 = \underline{0.1420 \text{ hrs.}}$

$W = W_q + 1/\mu = 0.1420 + 1/30 = 0.1753$ hrs.

$$P\{W>t\} = e^{-\mu t}\left\{1 + \frac{P_0(\lambda/\mu)^s}{s!\,(1-\rho)}\ \frac{(1 - e^{-\mu t(s-1-\lambda/\mu)})}{s-1-(\lambda/\mu)}\right\}$$

$$P\{W>5\} = e^{-(30 X 5)}\left\{1 + \frac{0.05263\,(54/30)^2}{2!\,(1-0.99)}\ \frac{(1 - e^{-(30 X 5)(2-1-54/30)})}{2-1-(54/30)}\right\}$$

$P\{W>5\} = 7.175 \text{ X } 10^{-66}(1 + (8.526 \text{ X } 1.630 \text{ X}10^{52})) = \underline{9.9713 \text{ X } 10^{-13}}$

Para $\lambda = 0.99$

$\lambda = 0.99$ clientes/min.(60 min./1 hr.) = 59.4 Clientes/hr.

$$P_0 = \frac{1}{\frac{(59.4/30)^0}{0!} + \frac{(59.4/30)^1}{1!} + \left\{\frac{(59.4/30)^2}{2!} \cdot \left(\frac{1}{1-(59.4/2(30))}\right)\right\}} = \frac{1}{1+1.98+(1.9 X 100)}$$

$P_0 = 5.025 X 10^{-3}$

$$L_q = \frac{P_0 (\lambda/\mu)^s \rho}{s!\,(1-\rho)^2} = 5.025 X 10^{-3} \frac{(59.4/30)^2\,(59.4/(30X2))}{2!\,(1-0.99)^2} = 97.515 \text{ clientes.}$$

$L = L_q + \lambda/\mu = 97.515 + 59.4/30 = \underline{99.495 \text{ clientes}}$

$W_q = L_q/\lambda = 97.515/59.4 = \underline{1.6416 \text{ hrs.}}$

$W = W_q + 1/\mu = 1.6416 + 1/30 = 1.6749$ hrs.

$$P\{W>t\} = e^{-\mu t}\left\{1 + \frac{P_0 (\lambda/\mu)^s}{s!\,(1-\rho)} \left(\frac{1 - e^{-\mu t(s-1-\lambda/\mu)}}{s-1-(\lambda/\mu)}\right)\right\}$$

$$P\{W>5\} = e^{-(30 X 5)}\left\{1 + \frac{5.025 X 10^{-3} (59.4/30)^2}{2!\,(1-0.99)} \left(\frac{1 - e^{-(30 X 5)(2-1-59.4/30)}}{2-1-(59.4/30)}\right)\right\}$$

$P\{W>5\} = 7.175 X 10^{-66} (1 + (0.98500 X 7.08048 X 10^{63})) = \underline{0.050040}$

18.- Un banco emplea cuatro cajeras para servir a sus clientes. Los clientes llegan de acuerdo con un proceso Poisson con una tasa media de 3 por minuto. Si un cliente encuentra todas las cajas ocupadas, se une a una cola a la que dan servicio todas las cajeras, es decir, no hay colas frente a cada cajera, si no que esperan en una cola la primera cajera que se desocupa. El tiempo para realizar las transacciones entre la cajera y el cliente tiene una distribución exponencial con media de un minuto.

a) Encuentre la distribución de probabilidad de estado estable para el número de clientes en el banco.

b) Encuentre: L_q, W_q, W y L.

Modelo I

Datos:

s = 4

$1/\mu = 1$ min =====> μ = 1/1min.(60min./1hr.) = 60 clientes/hrs.

$1/\lambda = 3$ min. =====> λ = 1/3 clientes/min.(60 min./1 hr.) = 20 Clientes/hr.

a) P_0 = ?

b) L_q, W_q, W y L.

Solución del inciso (a):

$\underline{\rho = \lambda/(s\mu) = 20/(4X60) = 0.083333}$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \left\{\frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \left(\frac{1}{1-(\lambda/s\mu)}\right)\right\}}$$

$$P_0 = \frac{1}{\left\{\frac{(20/60)^0}{0!} + \frac{(20/60)^1}{1!} + \frac{(20/60)^2}{2!} + \frac{(20/60)^3}{3!}\right\} + \left\{\frac{(20/60)^4}{4!} \cdot \left(\frac{1}{1-(20/(4 X 60))}\right)\right\}}$$

$$P_0 = \frac{1}{(1 + 0.3333 + 0.0555 + 0.00617) + (1.0914)} = \frac{1}{1.3952}$$

$P_0 = 0.7167$

Solución del inciso (b):

$$L_q = \frac{P_0 (\lambda/\mu)^s \rho}{s!\,(1-\rho)^2} = \frac{0.7167(20/60)^4\,(20/(4X60))}{2!\,(1-0.083333)^2} = 3.65 X 10^{-5} \text{ clientes.}$$

$L = L_q + \lambda/\mu = 3.65 X 10^{-5} + 20/60 = \underline{0.3333 \text{ clientes}}$

$W_q = L_q/\lambda = 3.65 X 10^{-5}/20 = \underline{1.825 X 10^{-6} \text{ hrs.}}$

$W = W_q + 1/\mu = 1.825 X 10^{-6} + 1/60 = 0.016666$ hrs.

19.- Una oficina de boletos de una aerolínea tiene dos agentes que contestan las llamadas para hacer reservaciones. Además, una llamada sepuede poner en espera hasta que uno de los agentes se desocupa para tomarla. Si las tres líneas (las de ambos agentes y la de espera) están ocupadas, el cliente potencial obtiene tono de ocupado y se supone que hace llamada a otra oficina de boletos y que la venta se pierde. Las llamadas y los intentos de llamadas ocurren aleatoriamente (es decir, de acuerdo con un proceso poisson) a una tasa media de 15 por hora. La duración de una conversación telefónica tiene una distribución exponencial con media de 4 minutos.

a) Encuentre la probabilidad de estado estable de que:

1) Un cliente pueda hablar de inmediato con un agente.

2) El cliente quede en espera.

3) El cliente obtenga el tono de ocupado.

MODELO II

Datos:

$s = 2$

$M = 3$

$\lambda = 15$ clientes/hr.

$1/\mu = 4$ min =====> $\mu = 1/4$min.(60min./1hr.) = 15 clientes/hrs.

a) $P_0 = ?$

b) $P_2 = ?$

c) $P_3 = ?$

$\rho = \lambda/(s\mu) = 15/(4X15) = 0.25$

Solución al inciso (a):

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{s} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \left\{\frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \sum_{n=s+1}^{M} \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s}\right\}}$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \left\{\frac{(15/15)^1}{1!} + \frac{(15/15)^2}{2!}\right\} + \left\{\frac{(15/15)^2}{2!} \cdot \left(\frac{15}{15 X 2}\right)^{3-2}\right\}}$$

$$P_0 = \frac{1}{(1 + 1 + 0.5 +) + (0.5 X 0.5)}$$

$P_0 = 0.3636$

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 = \frac{(15/15)^1}{1!} (0.3636) = \underline{0.3636} = P_1$$

$\underline{P_0 + P_1} = 0.3636 + 0.3636 = \underline{0.7272}$

Solución al inciso (b):

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 = \frac{(15/15)^2}{2!} (0.3636) = \underline{0.1818} = P_2$$

Solución al inciso ©:

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 = \frac{(15/15)^3}{3!} (0.3636) = \underline{0.0909} = P_3$$

20.- Se están haciendo planes para abrir un pequeño autolavado y el dueño debe decidir cuánto espacio conviene asignar a los autos que esperan. Se estima que los clientes llegarán de manera aleatoria (es decir, de acuerdo con un proceso poisson) con tasa media de uno cada 4 minutos, a menos que el área de espera esté llena, en cuyo caso los clientes que llegan llevarán su automovil a otra parte. el tiempo total que se puede atribuir al lavado de un carro tiene una distribución exponencial con media de 3 minutos. Compare la fracción de los clientes potenciales que se pierden por falta de espacio de espera si se proporcionan:

a) Cero espacios (sin incluir el lugar donde se lavan los carros).
b) Dos espacios.
c) Cuatro espacios.

Modelo II

Datos:

$s = 1$

$1/\mu = 3$ min =====> $\mu = 1/3\text{min.}(60\text{min.}/1\text{hr.}) = \underline{20 \text{ Clientes/hrs.}}$

$1/\lambda = 4$ min. =====> $\lambda = 1/4$ clientes/min.$(60 \text{ min.}/1 \text{ hr.}) = \underline{15 \text{ Clientes/hr}}$.

a) $P_1 = ?$
b) $P_3 = ?$
c) $P_5 = ?$

$\underline{\rho = \lambda/(s\mu) = 15/(1X20) = 0.75}$

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-(\rho)^{M+1}} = \frac{1-0.75}{1-(0.75)^{1+1}} = 0.5714$$

Solución al inciso (a):

$$P_n = \left(\frac{1-\rho}{1-(\rho)^{M+1}}\right)\rho^n = \left(\frac{1-0.75}{1-(0.75)^{1+1}}\right)(0.75)^1 = 0.4285 = P_1$$

Solución al inciso (b):

$$P_n = \left(\frac{1-\rho}{1-(\rho)^{M+1}}\right)\rho^n = \left(\frac{1-0.75}{1-(0.75)^{3+1}}\right)(0.75)^3 = 0.1542 = P_3$$

Solución al inciso ©:

$$P_n = \left(\frac{1-\rho}{1-(\rho)^{M+1}}\right)\rho^n = \left(\frac{1-0.75}{1-(0.75)^{5+1}}\right)(0.75)^5 = 0.077 = P_5$$

21.-Un químico que ensaya diversos productos de diferentes unidades de una refinería. Este tiempo y el equipo tienen un costo de $18 dls. la hora. El químico puede realizar 3 ensayos por hora. Una unidad de reparación tiene un tiempo medio entre requerimientos de ensayo de 2 hrs.
Cuando la muestra requiere más de 1 hora, la utilización adicional de equipo cuesta $100 dls. ¿Cuántos químicos deben emplearse si 6 unidades funcionan continuamente?

Modelo III

Datos:

$\mu = 3$ Clientes/hrs.

$1/\lambda = 2$ hrs. =====> $\lambda = ½$ clientes/hrs.= $\underline{0.5 \text{ Clientes/hr}}$.

$/hora. = $18

Si W>1hrs. entonces se cobra un costo adicional de $100

M = 6

s = ?

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{M}\left\{\frac{M!}{(M-n)!}\cdot(\lambda/\mu)^n\right\}}$$

$$\underline{P_0} = \frac{1}{\left\{\frac{6!}{(6-0)!}(.5/3)^0 + \frac{6!}{(6-1)!}(.5/3)^1 + \frac{6!}{(6-2)!}(.5/3)^2 + \frac{6!}{(6-3)!}(.5/3)^3 + \frac{6!}{(6-4)!}(.5/3)^4 + \frac{6!}{(6-5)!}(.5/3)^5 + \frac{6!}{(6-6)!}(.5/3)^6\right\}}$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + 1 + 0.83333 + 0.5555 + 0.27777 + .09259 + 0.01543}$$

$P_0 = 0.2649$

$L = M - \{(\mu/\lambda)(1 - P_0)\}$

$L = 6 - (3/0.5)(1 - .2649) = \underline{1.589}$

$\underline{\bar{\lambda} = \lambda(M - L) = 0.5(6 - 1.589) = 2.205}$

$W = l/\bar{\lambda} = 1.589/2.205 = \underline{.7205}$

Conclusión: Como W con un servidor nos dio menor que 1, esto es, 0.7205 < 1 (con un químico la muestra no requiere mas de 1 Hr.) entonces no es necesario pagar los $100 adicionales. Lo que indica que la mejor opción sera continuar con 1 químico.

22.- Los trabajos que deben realizarse en una máquina especifica llegan de acuerdo a un proceso de entradas Poisson con tasa media de 2 por hora. Suponga que la máquina se descompone y su reparación tardará una hora. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de nuevos trabajos que lleguen durante este tiempo sea a)cero, b) dos, c) cinco ó mas?.

MODELO I
l = 2 ctes/hr
s = 1
Wq = 1

$$Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \qquad (\mu^2 - \lambda\mu)Wq = \lambda$$

$$\mu^2 Wq - \lambda\mu Wq - \lambda = 0$$

$$\mu^2 - 2\mu - 2 = 0$$

$$\mu = \frac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{+2 \pm 3.464}{2}$$

$$\underline{\mu = 2.732}$$

$$\rho = \lambda / \mu = 2 / 2.732$$

$$\underline{\rho = 0.7320}$$

$$P0 = 1 - \rho = 1 - 0.7320 = 0.2680$$

$$P2 = \rho^n P0 = (0.7320)^2 (0.2680)$$

$$\underline{P2 = 0.1436}$$

$$P5 = (0.7320)^5 (0.2680)$$

$$\underline{P5 = 0.0563}$$

23.- Una tienda de tipo "minisuper" tiene una sola caja con un cajero de tiempo completo. Los clientes llegan a la caja de manera aleatoria (es decir, un proceso de entradas Poisson) con una tasa media de 30 por hora. Cuando solo hay un cliente en la caja, el cajero lo atiende solo, con un tiempo de servicio esperado de 1.5 minutos, pero el muchacho que ayuda tiene instrucciones fijas de que siempre de que haya mas de un cliente en la caja ayude al cajero a empacar la mercancía. Esta ayuda reduce el tiempo esperado de servicio a un minuto. En ambos casos, la distribución de estos tiempos de servicio es exponencial. Obtenga L para este sistema. Utilice esta información para determinar Lq, W y Wq.

MODELO IV
S = 1
l = 30 ctes/hr
1/m1 = 1.5 min.
1/m2 = 1 min.

$$\mu 1 = \frac{1}{1.5\,\text{min}}\left(\frac{60\,\text{min}}{1hr}\right) = 40\,ctes/hr$$

$$\mu 2 = \frac{1}{1\,\text{min}}\left(\frac{60\,\text{min}}{1hr}\right) = 60\,ctes/hr$$

$$\mu 2 = n^c \mu 1$$

$$n^c = \frac{\mu 2}{\mu 1}$$

$$c \ln n = \ln\left(\frac{\mu 2}{\mu 1}\right)$$

$$c = \frac{\ln \frac{60}{40}}{\ln 2}$$

$$\underline{\underline{c = 0.5849}}$$

$$Lq = L - (1 - P0)$$

$$Lq = 1 - (1 - 0.44)$$

$$\underline{\underline{Lq = 0.44}}$$

$$\frac{\lambda 0}{\mu 1} = \frac{30}{40} = 0.75$$

De acuerdo a la tabla 10.9

$$\underline{\underline{P0 = 0.44}}$$

$$\underline{\underline{L = 1}}$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{30}$$

$$\underline{W = 1/30}$$

$$Wq = \frac{0.44}{30}$$

$$\underline{\underline{Wq = 0.01466}}$$

24.- Suponga que un sistema de colas tiene dos servidores, una distribución de tiempos entre llegadas exponencial con media de dos horas y una distribución de tiempo de servicio exponencial con media de dos horas. Lo que es más, a las doce del día acaba de llegar un cliente.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la siguiente llegada ocurra antes de la 1:00 P.M. ? ¿entre las 2:00 P.M. ?

b} Suponga que no llegan más clientes antes de la 1:00 P.M. Ahora, cuál es la probabilidad de que la siguiente llegada tenga lugar entre la 1:00 y las 2:00 P.M.?

c} ¿ Cuál es la probabilidad de que el número de llegadas entre la 1:00 y las 2:00 P.M. sea cero uno, dos, o más?

.d) Suponga que ambos servidores están atendiendo clientes a la 1:00P.M. ¿ Cuál es la probabilidad de que ningún cliente haya completado el servicio antes de las 2:00P.M.? ¿Antes de la 1:10P.M.? ¿Antes de la 1:01P.M.?

Modelo I

a) Po = $1/(S^{s=1}{}_{n=0}(l/m)^n / n\text{¡} + (l/m)^s / s\text{¡} * 1/(1-(l/sm))$)

s = 2 Sustituyendo l = 0.5,s= 2, m = 0.5

l = 0.5 Po = 1/3

m = 0.5

b) $P_2 = ((l/m)^n / n\text{¡})*Po$

$P_2 = (0.5/0.5)^2 / 2\text{¡})*1/3$

$P_2 = 1/6$

$P_1 = ((l/m)^n / n\text{¡})*Po$

$P_1 = (0.5/0.5)^1 / 1\text{¡})*1/3$

$P_1 = 1/3$

$P_3 = ((l/m)^s / s\text{¡}s^{n-s})*Po$

$P_3 = (0.5/0.5)^3 / 2\text{¡}2^1)*1/3$

$P_3 = 1/12$

c) $P_0 = 1/3$, $P_1 = 1/3$, $P_2 = 1/6$, $P_3 = 1/12$

d) $P(Wq>t) = (1 - P(Wq=0))e^{-sm(1-r)t}$

$P(Wq>1) = (1 - 2/3)e^{-2(0.5)(1-0.5)1}$

$P(Wq>1) = 0.2021$

$P(Wq=0) = S^{s=1}{}_{n=0} P_n = P_0 + P_1 = 1/3 + 1/3 = 2/3$

$P(Wq>1/6) = (1 - 2/3)e^{-2(0.5)(1-0.5)1/6}$

$P(Wq>1/6) = 0.3066$

$P(Wq>1/60) = (1 - 2/3)e^{-2(0.5)(1-0.5)1/60}$

$P(Wq>1/60) = 0.33056$

25.- Se planea abrir un local para lavar autos y se debe tomar una decisión en cuanto a cuanto espacio proveer para autos esperando. Se estima que los clientes llegan al azar con una tasa promedio de 1 cada 4 minutos, a menos que el área de espera este llena , en este caso el cliente llevará su auto a otro lado. El tiempo de lavado del auto tiene una distribución exponencial con un a media de 3 minutos. Compare la fracción esperada de clientes potenciales perdidos debido a que el espacio no es suficiente si se pusieran.

a) Cero espacios adicionales
b) Dos espacios adicionales
c) Cuatro espacios adicionales

a)	b)	c)
s	s x x	s x x x x x
P1	P3	P5
M=1	M=3	M=5

modelo 1

$(1/\lambda) = 4min$

$\lambda = (1/4min)\ (60min/1hr) = 15ctes/hr$

$(1/s\mu) = 3min$

$\mu = (1/3min)\ (60min/1hr) = 20ctes/hr$

$\rho = \lambda/s\mu = 15/20 = 3/4$

a) $P1 = ((1 - \rho)/(1 - \rho^{M+1}))\ \rho^n$

$P1 = ((1 - 3/4)/(1 - (3/4)^{1+1}))\ (3/4)^1$

$P1 = 42.85\%$

b) $P3 = ((1 - 3/4)/(1 - (3/4)^4))\ (3/4)^4 = ((1/4)\ (27/64))/(1 - (21/256)) = (27/256)/(175/256)$

$P3 = 15.24\%$

c) $P5 = ((1-.75)/(1-.75^6))\ (.75^5)$

$P5 = 7.21\%$

26.- Considere un taller de reparación de calzado con un zapatero. Los pares de zapatos llegan para reparación (sobre la base de primero en llegar, primero en salir) de acuerdo a un proceso Poisson con una tasa media de un par por hora. El tiempo necesario para reparar cada zapato individual tiene una distribución exponencial con media de 15 min.

a) Considere la formulación de éste sistema de colas cuando se toma cada zapato individual (y no los pares) como un cliente. Para ésta formulación, construya un diagrama de tasas y desarrolle las ecuaciones de balance, pero no resuelva el sistema.

b} Ahora considere la formulación de este sistema de colas cuando los pares de zapatos son los clientes. Identifique el modelo de colas específico que se ajusta a esta formulación y utilice los resultados disponibles para calcular el tiempo de espera esperado W. (Interprete W como el tiempo de espera esperado hasta que ambos zapatos de un par están listos.)

Modelo I

a) $\lambda = 2$ zapatos/hr. $\qquad r = l/m = 2/4$

$1/\mu = 15$ min. $\qquad r = 0.5$

$\mu = 4$ zapatos7hr.

$L = \lambda / (\mu - \lambda) = 2/ (4 - 2)$ $\qquad Lq = \lambda^2 / \mu(\mu - \lambda) = 2^2/ 4\ (4 - 2)$

$L = 1$ $\qquad Lq = 0.5$

$W = 1 / (\mu - \lambda) = 1/ (4 - 2)$ $\qquad Wq = \lambda / \mu(\mu - \lambda) = 2/ 4\ (4 - 2)$

$W = 0.5$ $\qquad Wq = 0.25$

$Po = 1 - \rho = 1 - 0.5$

$Po = 0.5$

b) $\lambda = 1$ par/hr.

$1/\mu = (15\ min)\ (2par) = 30$ min $\qquad \rho = \lambda/\mu = 1 / 2$

$\mu = 2$ pares/hr. $\qquad \rho = 0.5$

$L = \lambda / (\mu - \lambda) = 1/ (2 - 1)$ $\qquad Lq = \lambda^2 / \mu(\mu - \lambda) = 1^2/ 2\ (2 - 1)$

$L = 1$ $\qquad Lq = 0.5$

$W = 1 / (\mu - \lambda) = 1/ (2 - 1)$ $\qquad Wq = \lambda / \mu(\mu - \lambda) = 1/ 2\ (2 - 1)$

$W = 1$ $\qquad Wq = 0.5$

$Po = 1 - \rho = 1 - 0.5$

$Po = 0.5$

27- En un lote de estacionamiento existen 10 espacios solamente. Los automóviles llegan según una distribución Poisson con una media de 10 cada hora. El tiempo de estacionamiento está exponencialmente distribuido con una media de 10 min. Determine lo siguiente:

a) El número esperado de espacios en el estacionamientos vacios.

b) Probabilidad que un automóvil que llegue no encontrará espacio para estacionarse.

c)¿ Cúanto tiempo esperará un automóvil a que se desocupe un espacio para estacionarse ?

d) Determine la razón de utilización del sistema.

Modelo I

$$Po = 1/(S^{s=1}_{n=0}(\lambda/\mu)^n / n_i + (\lambda/\mu)^s / s_i * 1/(1-(\lambda/s\mu))$$

Sustituyendo $\lambda = 10, s=10, \mu = 6$

$s = 10$

$\lambda = 10$

$\mu = 6$

$Po = 0.1893$

$Lq = Po(\lambda/\mu)^{s}\rho / s_i (1 - \rho)^2$

$Lq = .1893(10/6)^{10}(1/6) / 10_i (1 - (1/6))^2$

$Lq = 2.076 X 10^{-6}$

$L = Lq + (\lambda/\mu) = 2.076 X 10^{-6} + 10/6$

$L = 1.666$

a) $10 - L = 10 - 1.666 = 8.33$

$P_{10} = ((\lambda/\mu)^n / n_i)*Po$

$P_{10} = (10/6)^{10} / 10_i)*.1893$

b) $P_{10} = 8.604 X 10^{-6}$

$Wq = Lq / \lambda = 2.076 X 10^{-6} / 10$

c) $Wq = 2.076 X 10^{-7}$

$\rho = \lambda/s\mu = 10/ 10(6)$

d) $\rho = 1/6$

28.- Un restaurante de comida rápida tiene una ventanilla para dar servicio a automóviles . Se estima que los autos llegan de acuerdo a una distribución Poison a la tasa de 2 cada 5 minutos y que hay espacio suficiente para dar cabida a una fila de 10 autos . Otros autos que llegan pueden esperar fuera. Los empleados tardan 1.5 minutos en promedio en surtir un pedido pero el tiempo de servicio varia en realidad según una distribución exponencial.

a) La probabilidad de que el establecimiento este inactivo

b) El numero esperado de clientes en espera

c) El tiempo de espera calculado hasta que un cliente pueda hacer su pedido en la ventanilla

d) La probabilidad de que la línea de espera será mayor que la capacidad del espacio que conduce a la ventanilla de servicio.

MODELO I

$s = 1$

$1/\lambda = 2.5$ minutos = 25 c/hr

$1/\mu = 1.5 = 40$ c/hr

a) Po c) Wq

b) Lq d) P11

$Po = 1 - \lambda/s\mu = 1 - (24 / (1)(40))$ a) Po = 0.4

$Lq - \lambda/\mu(\mu-\lambda) = (24) / 40 (40 - 24)$ b)Lq = 0.9

$Wq = \lambda/\mu(\mu-\lambda) = (24) / 40 (40 - 24) =$ c)Wq= 0.0375 =2.25 min

$P11 = \lambda/\mu(Po) = (24/40)(0.4)$ d)P11 = 0.014

29.- Los automóviles llegan a una caseta de pago en una carretera según una distribución Poison con una media de 90 por hora .EL tiempo promedio para pasar por la caseta es de 38 segundos.
Los choferes se quejan de un largo tiempo de espera las autoridades están dispuestas a disminuir el tiempo a 30 segundos para pasar la caseta introduciendo nuevos mecanismos automáticos . Esto puede justificarse únicamente si con el sistema anterior el numero de autos que esperan no excede de 5. Además el % de tiempo ocioso de la caseta con el nuevo sistema no debe ser 10% mayor Puede justificarse?
Justificaciones Lq>5 y Pof < Po(1.

MODELO I

λ= 90 c/hr

Lq > 5

s = 1

$1/\mu$= 38 = 94.73 c/hr

$Lq = \lambda/ \mu(\mu-\lambda)$ = 90 / 94.73 (94.73 - 90) Lq= 18.07

Po = 1 - λ/μ= 1 - 90 / 94.73 Po= 0.04999

$1/\mu$= 1/.5 = 120 c/hr

Pof= 1-90 /120 Pof= 0.25

La primera justificación se cumplió por Lq pero ahora hay que comprobar la segunda:

Pof < Po (1.10)

0.25 no es menor que (0.0499)(1.10)

Por lo tanto la medida no es justificada

30.- Los clientes llegan a una ventanilla bancaria de autoservicio según una distribución Positón con una media de 10 por hora. El tiempo de servicio por cliente es exponencial con una media de 5 minutos. El espacio enfrente de la ventanilla incluyendo el auto al que se le da servicio puede acomodar a un máximo de tres vehículos . Otros vehículos pueden esperar fuera de este espacio.

a) Cual es la probabilidad de que un cliente que llega pueda manejar directamente hasta el espacio frente la ventanilla?

b) Cual es la probabilidad de que un cliente que llega tendrá que aguardar fuera del espacio?

c) Cuanto tendrá que esperar un cliente que llega antes de que comience a dársele servicio?

MODELO I

λ= 10 C/HR

$1/\mu$= 1/5 = 12 C/HR

Po = 1 - λ/μ= 1 - 10/12 = Po= 0.16666

P1 = (λ/μ)(Po) = (10/12)(0.1666) P1= 0.1388

P2= (λ/μ)(Po) = (10/12)2(0.16666) P2= 0.1157

a) Po + P1 + P2 = 0.1666+ 0.1388+0.1157 a) 0.4212

P3 = (λ/μ)(Po)= (10/12)(0.1666) = P3= 0.0964

b)P3=0.964

c) wq= $\lambda/\mu(\mu-\lambda)$ = 10 / (12(12 -10) c) Wq=0.4166

31.- Para atraer a mas clientes el propietario de un restaurante de comida rápida del problema 14 decidió dar una bebida gratis a cada cliente que espere mas de 5 minutos . Normalmente una bebida cuesta 50 centavos Cuanto se espera que pague el dueño del establecimiento todos los días por las bebidas que obsequia.

MODELO I
$\lambda = ½.5 = 24$ c/hr
$\mu = 1/1.5 = 40 = 480$

$P\{Wq > 5\} = \rho e$ <u>P = 0.1582</u>

$Lq = 24 / (40(40 - 24)$ <u>Lq = 0.9</u>

32.-Suponga que se ha asignado a un mecánico la responsabilidad de dar mantenimiento a 3 máquinas. Para cada máquina la distribución de probabilidad del tiempo de operación antes de descomponerse es exponencial con media de 9 hrs. El tiempo de reparación también tiene una distribución exponencial con media de 2 hr.

a) Calcule la distribución de probabilidad de estado estable y el número esperado de máquinas que no estan en operación.

b) Como una aproximación burda, suponga que la fuente de entrada es infinita y que el proceso de entrada es Poisson con una tasa media de 3 cada 9 hr. Compare el resultado de el insiso "a" con el que se obtenga haciendo uso de esta aproximación 1) Con el modelo de colas infinito correspondiente y 2) Con el modelo de colas finito correspondiente.

c) Suponga que se dispone de un segundo mecánico siempre que este descompuesta más de una de estas máquinas, calcule la información especificada en el inciso a.

Respuesta inciso "a"
Modelo 3
$\lambda = 1/9$ c/hr
$\mu = ½$ c/hr
M = 3
Po, P1,P2, P3, L = ?

$Po = 1 / \Sigma^{M}_{n=0} [(M! / (M-n)!) (\lambda / \mu)^n] = 1 / \{ [3!/ (3-0)!] (0.11 / 0.5)^0 + [3!/ (3-1)!] (0.11 / 0.5)^1 + [3!/ (3-2)!] (0.11 /0.5)^2 + [3!/ (3-3)!] (0.11 / 0.5)^3$
Po = 0.4929

$P1 = (M! / (M-n)!) (\lambda / \mu)^n * Po = [3!/ (3-1)!] (0.11 / 0.5)^1 (0.4929)$
P1 = 0.3286

$P2 = (M! / (M-n)!) (\lambda / \mu)^n * Po = [3!/ (3-2)!] (0.11 / 0.5)^2] (0.4929)$
P2 = 0.146

$P3 = (M! / (M-n)!) (\lambda / \mu)^n * Po = [3!/ (3-3)!] (0.11 / 0.5)^3] (0.4929)$
P3 =0.03245

$L = M - [(\mu / \lambda) (1 - Po)] = 3 - [(0.5/0.11) (1-0.4929)]$
L = 0.718

b) Modelo I Y II

i) $\lambda = 3/9$ c/hr
$\mu = 0.5$ c/hr

$Po = 1 - \rho = 1 - (0.33/0.5)$ Po = 0.3333

$P1 = (\lambda/\mu)^n * Po = (0.33/0.5)^1 (0.33)$ $\quad$ $P1 = 0.2222$

$P2 = (\lambda/\mu)^n * Po = (0.33/0.5)^2 (0.33)$ $\quad$ $P1 = 0.148$

$P3 = (\lambda/\mu)^n * Po = (0.33/0.5)^3 (0.33)$ $\quad$ $P1 = 0.0986$

$L = \lambda / (\mu - \lambda) = 0.33 / (0.5-0.33)$ $\quad$ $L = 2$

ii)

$Po = 1 - \rho \;/\; 1 - \rho^{M+1} = 1 - 0.66 / 1 - (0.66)^{3+1}$ $\quad$ $Po = 0.41538$

$P1 = [1 - \rho \;/\; 1 - \rho^{M+1}]\, \rho^n = [1 - 0.66 / 1 - (0.66)^{3+1}]\,(0.66)^1$ $\quad$ $P1 = 0.277$

$P2 = [1 - \rho \;/\; 1 - \rho^{M+1}]\, \rho^n = [1 - 0.66 / 1 - (0.66)^{3+1}]\,(0.66)^2$ $\quad$ $P2 = 0.1846$

$P3 = [1 - \rho \;/\; 1 - \rho^{M+1}]\, \rho^n = [1 - 0.66 / 1 - (0.66)^{3+1}]\,(0.66)^3$ $\quad$ $P3 = 0.123$

$L = [\rho / 1 - \rho] - [(M+1)\, \rho^{M+1} \;/\; 1 - \rho^{M+1}] = [0.66/ 1-0.66] - [(3+1)(0.666)^4 / 1 - (0.66)^4]$ $\quad$ $L = 1.0154$

c) Modelo 3

Para s=2

$Po = 1 / \{ \Sigma^{s-1}_{n=0} [(M! / (M-n)!) (\lambda/\mu)^n] + \Sigma^{M}_{n=s} [(M! / (M-n)!\, s!\, s^{n-s}) (\lambda/\mu)^n]$

$Po = 1 / [3!/ (3-0)!] (0.11 / 0.5)^0 + [3!/ (3-1)!] (0.11 / 0.5)^1 + [3!/ (3-2)!] (0.11 /0.5)^2 + [3!/ (3-3)!] (0.11 / 0.5)^3$

$Po = 0.546$

$P1 = Po\, (M! / (M-n)!) (\lambda/\mu)^n = (0.546)\, 3!/ (3-1)!] (0.11 / 0.5)^1$ $\quad$ $P1 = 0.364$

$P2 = Po\, (M! / (M-n)!) (\lambda/\mu)^n = (0.546)\, 3!/ (3-2)!] (0.11 / 0.5)^2$ $\quad$ $P2 = 0.0808$

$P3 = Po\, (M! / (M-n)!) (\lambda/\mu)^n = (0.546)\, 3!/ (3-3)!] (0.11 / 0.5)^3$ $\quad$ $P3 = 0.00898$

$L = \Sigma^{s-1}_{n=0} nPn + Lq + s [1 - \Sigma^{s-1}_{n=0} Pn]$

$L = 0(0.546 + (0.00898) + 1.234 + 2 [1 - (0.546+ 0.364)$ $\quad$ $L = 0.553$

33.-Una base de mantenimiento de una línea aérea sólo tiene medios para reparar el motor de un avión a la vez. Por lo tanto, para hacer que los aviones regresen al servicio tan pronto como sea posible, la política ha sido alternar la reparación de los cuatro motores de cada avión. En otras palabras, sólo se repara un motor cada vez que un avión llega al taller. Bajo esta política, los aviones han estado llegando según un proceso de Poisson, a una tasa media de uno por día. El tiempo requerido para reparar un motor (una vez que se ha iniciado el trabajo) tiene una distribución exponencial con una media de ½ día. Se ha hecho la proposición de cambiar la política, de manera que se reparen los 4 motores consecutivamente, cada vez que un avión llega al taller. Se señala que, aun cuando esto cuadruplicaría el tiempo esperado de servicio, la frecuencia con la que el avión necesitaría ir al taller sería sólo un cuarto de la actual. Utilícese la teoría de las colas para comparar las dos alternativas de manera significativa.

Modelo I
actual

s=1
n=1
$\lambda = 1/24$ c/hr
$\mu = 1/12$ c/hr

$L = \lambda / (\mu - \lambda) = 0.0416 / (0.0833-0.0416)$ $\quad$ $L = 1$

Propuesto
s=2
n=4

$\lambda = 0.0104$ c/hr
$\mu = 1/3$ c/hr

$Po = 1 / \Sigma^{s-1}_{n=0} (\lambda/\mu)^n / n! + [(\lambda/\mu)^s / s! * 1 / 1 - (\lambda / s\mu)] = 1 - \{[(0.0104/0.333)^0 /0! + (0.0104/0.333)^1 /1!] + [(0.0104/0.333)^2 2!] [1 / 1- (0.0104/ (2)\, 0.333)]\}$

Po = 0.58945

$Lq = Po\, (\lambda/\mu)^s\; \rho / s!\, (1-\rho)^2 = (0.58945)(0.0104/0.333)^2 (0.0104/ (2)\, 0.333) / [1 - (0.0104/ (2)\, 0.333)]^2$
Lq = 0.7813

$L = Lq + (\lambda/\mu) = 0.7813 + (0.0104/0.333)$
L = 0.8125

34.- Una oficina de boletos de una aerolínea tiene dos agentes que contestan las llamadas para hacer reservaciones.Además, una llamada se puede poner en espera hasta que uni de los agentes se desocupa para tomarla. Si las tres líneas (las de ambos agentes y la de espera) estan ocupadas, el cliente potencial obtiene tono de opcupado y se supone que hace la llamada a otra oficina de boletos y que la venta se pierde. Las llamadas y los intentos de llamadas ocurren aleatoriamente (es decir, de acuerdo con porceso Poisson) a una tasa media de 15 por hora. La duración de una conversación tiene una distribuición exponencial con media de 4 minutos.

a) Encuentrese la probabilidad de estado estable de que:

1. Un cliente pueda hablar de inmediato con un agente 2.- El cliente quede en espera

3.- El cliente Obtenga el tono de ocupado.

MODELO II

Datos:

λ= 12 Clientes/hora $\qquad \rho = \lambda / s\mu \qquad \rho$= [12/ (2)(15)] $\qquad \underline{\rho=0.4}$

μ= 15 Clientes/hora

M= 3 Clientes

a) Po + P1

Po= 1 / [1 + $\sum$ (λ / μ) / n! + [(λ / μ) / s! . $\sum$ (λ / sμ)]]

Po= 1 / [1 + $\sum$ (12/15) / 1! + $\sum$(12/15) / 2! + [(12 / 15) / 2! $\sum$ (12/ 2x15)]]

Po= 0.44

P1= [(λ / μ / n!] Po

P1= (12 / 15) / 1! (0.44)

P1= 0.3558

Po + P1 = 0.44 + 0.3558 ---> *<u>Po + P1 = 0.792</u>*

b) P2= ?

P2= (λ / μ) / n! Po

P2 = [(12 / 15) / 2!] (0.44) = 0.142348754

P2= 0.142348754

c) P3= ?

P3= (λ / μ) / s!s (Po)

P3= (12/15) / (2! 2) (0.44)

P3= 0.05632

“PROBLEMAS RESUELTOS DE LINEAS DE ESPERA DETERMINISTICAS”

34.- Una oficina de boletos de una aerolínea tiene dos agentes que contestan las llamadas para hacer reservaciones.Además, una llamada se puede poner en espera hasta que uni de los agentes se desocupa para tomarla. Si las tres líneas (las de ambos agentes y la de espera) estan ocupadas, el cliente potencial obtiene tono de opcupado y se supone que hace la llamada a otra oficina de boletos y que la venta se pierde. Las llamadas y los intentos de llamadas ocurren aleatoriamente (es decir, de acuerdo con porceso Poisson) a una tasa media de 15 por hora. La duración de una conversación tiene una distribuición exponencial con media de 4 minutos.

a) Encuentrese la probabilidad de estado estable de que:

1. Un cliente pueda hablar de inmediato con un agente 2.- El cliente quede en espera
3.- El cliente Obtenga el tono de ocupado.

MODELO II
Datos:
λ= 12 Clientes/hora $\qquad \rho = \lambda / s\mu \qquad \rho = [\ 12/ (2)(15)\ ] \qquad \underline{\rho=0.4}$
μ= 15 Clientes/hora
M= 3 Clientes

a) Po + P1

$$Po = 1 / [\ 1 + \sum (\lambda / \mu) / n! + [(\lambda / \mu) / s! \,.\, \sum (\lambda / s\mu)]\ ]$$
$$Po = 1 / [\ 1 + \sum (12/15) / 1! + \sum(12/15) / 2! + [\ (12 / 15) / 2! \sum (12/ 2x15)\ ]\ ]$$
$$Po = 0.44$$

$$P1 = [\ (\lambda / \mu / n!]\ Po$$
$$\boldsymbol{P1 = (12 / 15) / 1! (0.44)}$$
$$\boldsymbol{P1 = 0.3558}$$
$$Po + P1 = 0.44 + 0.3558 \ \text{--->}\ \underline{Po + P1 = 0.792}$$

b) P2= ?
$$P2 = (\lambda / \mu) / n!\ Po$$
$$P2 = [\ (12 / 15) / 2!\ ] (0.44) = 0.142348754$$
$$P2 = 0.142348754$$

c) P3= ?
$$P3 = (\lambda / \mu) / s!s\ (Po)$$
$$P3 = (12/15) / (2!\ 2 \quad) (0.44)$$
$$P3 = 0.05632$$

“PROBLEMAS RESUELTOS DE LINEAS DE ESPERA DETERMINISTICAS”

METODOS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE LINEAS DE ESPERA (D/D1) POR MEDIO DE SIMULACION

Ejemplo 1.-

Cada 3 minutos llega un nuevo aparato de television ,que es tomado por un ingeniero de control de calidad siguiendo un orden del tipo primero en llegar primero en atenderse. Hay solamente un ingeniero a cargo del proceso y le toma exactamente 4 minutos el inspeccionar cada nuevo televisor. Determinese el numero promedio de aparatos en espera de ser inspeccionados durante la primera media hora de un turno, si no habia aparatos al inicio del turno.(Lq).

Nota.- Este es un sistema D/D/1 que indica que el tiempo entre llegadas es deterministico y hay un solo servidor.

Se elabora una tabla donde muestra la historia del sistema en el tiempo t (en este caso 30 minutos).

Reloj simulado	Cliente en servidor	Linea de espera
0	....	....
3	#1	
6	#1	#2
7	#2	....
9	#2	#3
11	#3	....
12	#3	#4
15	#4	#5
18	#4	#5, #6
19	#5	# 6
21	#5	#6, #7
23	#6	#7
24	#6	#7, #8
27	#7	#8, #9
30	#7	#8, #9, #10

Nota: Solo se analizan aquellos instantes en que ocurre un cambio en el estado del sistema (cuando llega un cliente o se concluye un servicio).

Observese que no hay clientes en la linea de espera del momento 0 al 6, ni del momento 11 al 12, durante 2 minutos en total, hay un solo cliente en la linea , del

momento 6 al 7, del 9 al 11, del 12 al 18, del 19 al 21 y del 23 al 24, durante 12 minutos totales.

De manera similar, hay dos clientes en la linea de espera del momento 18 al 19 , del 21 al 23 y del 24 al 30 durante nueve minutos en total: y hay tres clientes en el momento 30 al 30 con cero minutos en total, entinces la longitud promedio de linea de espera es:

$$\frac{0\,(9) + 1\,(12) + 2(9) + 3(0)}{30} = 1 \text{ aparato} \qquad Lq$$

Hay cero clientes en el sistema del (0 al 3), hay un cliente en el sistema del 3-6, 11-12, hay 2 clientes en el sistema del 6-7, 9-11, 12-15, 15-18, 19-21, 23-24, hay 3 clientes en el sistema del; 18-19, 21-23, 24-30., hay 4 clientes en el sistema del 30-30.

$$L = \frac{30\,(0) + 6\,(1) + 12(2) + 9(3) + 0(4)}{30} = 1.9$$

El tiempo que el cliente espera por servicio . El cliente #1 tarda 0 min esperando por servicio #2 del 6-7, #3 (9-12), #4 (12-15), #5 (15-19), #6 (18-23), #7 (21-27), #8 (24-30), #9 (27-30), #10 (30-30).

$$Wq = \frac{\#3\,(3) + \#4\,(3) + \#5\,(4) + \#6\,(5) + \#7\,(6) + \#8(6) + \#9\,(3) + \#10\,(0)}{10} = \frac{30}{10} = 3$$

El tiempo total del cliente en el sistema:
#1(0-4), #2(6-11), #3 (9-15) , #4 (12-19), #5 (15-23), #6 (18-27), #7 (21-30), #8 (24-30), #9 (27-30), #9 (27-30), #10 (30-30).

$$Wq = \frac{\#1(4) + \#2(5) + \#3(6) + \#4(7) + \#5(8) + \#6(9) + \#7(9) + \#8(6) + \#9(3) + \#10(0)}{10} = 5.7$$

Ejemplo 2.-

Aun deposito central llaegan autobuses para su limpieza en grupos de 5 cada hora a la hora en punto. Se da servicio a los autobuses aleatoriamente y de uno en uno. Toma 11 minutos el dar servicio completo a cada autobus y estos abandonan el deposito en cuanto esten limpios. Determinese: a) El numero promedio de autobuses en el deposito (l); B) El autobus permanece en el deposito (W).

Este es un sistema D/D/1 que muestra que el tiempo de llegada y el tiempo de servicio es deterministico y tiene un solo servidor.

Se elabora una tabla donde muestra la historia del sistema durante un periodo de una hora, en los momentos de llegada y partida. Ya que el orden del servicio es aleatorio, la secuencia particular que se muestra es una de las diferentes posibles secuencias de atencion a los autobuses.

Reloj simulado	Clientes en servicio	linea de espera
0	#4	#3, #1, #2, #5
11	#1	#3, #2, #5
22	#5	#3, #2
33	#3	#2
44	#2	......
55	.....	.....

a) Hay 5 clientes en la instalacion del momento 0 al 11, 4 clientes de 11 a 22, 3 clientes de 22 a 33, 2 clientes de 33 a 44 y 1 cliente de 44 a 55, y cada intervalo es de 11 minutos. Ademas no hay clientes en la instalacion del momento 55 a 60, o sea 5 minutos. Entonces, el promedio de clientes en la instalacion es :

$$\frac{5(11) + 4(11) + 3(11) + 2(11) + 1(11) + 0(5)}{60} = 2.75 \text{ autobuses}$$

b) El numero promedio de clientes en la linea de espera, es decir aquellos autobuses en espera pero que aun no estan en el servicio :

$$\frac{4(11) + 3(11) + 2(11) - 1(11) + 0(16)}{60} = 1.83 \text{ autobuses}$$

c) Un autobus, el #4 de la tabla, permanece en el sistema durante 11 minutos, ya que se le proporciona el servicio cuando llega. El segundo autobus, el #1 de la tabla, espera 11 minutos antes de recibir el servicio, asi que permanece en el sistema durante 22 minutos. De manera similar, los otros 3 autobuses pasan respectivamente 33, 44, y 55 minutos en el sistema. Por lo tanto, el tiempo promedio que un autobus permanece en el sistema es:

$$W = \frac{11 + 22 + 33 + 44 + 55}{5} = 33 \text{ minutos}$$

d) $Wq = \frac{\#4(0) + \#3(11) + \#5(22) + \#3(33) + \#2(44)}{5} = 22$ minutos

"PROBLEMAS PROPUESTOS DE LINEAS DE ESPERA"

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.-Una mina de carbón opera su propio puerto de carga de barcazas, que consiste en un muelle con las instalaciones automáticas de descarga de vagones de ferrocarril.

a) Los registros pasados de llegadas de barcazas durante un intervalo de 200 días muestran lo siguiente:

Numero de llegadas diarias	0	1	2	3	4	5	6
Numero de días	18	61	60	37	16	4	4

Para que niveles de significación se aceptaría la hipótesis de llegadas o arribos es poissoniano?. Puede concluirse que la aproximación poissoniana es lo suficientemente buena?. Cual es la tasa promedio por día?.

b) Los registros pasados de tiempos de ocupación del muelle por las barcazas muestra las siguientes frecuencias acumuladas.

Fracción del día laboral	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
Número de tiempos menores de ocupación	24	42	53	63	75	85	90	94	98	100

El tiempo promedio de ocupación de muelles es de casi un tercio del día laboral. Para que niveles de justificación se aceptaría la hipótesis de que los tiempos de ocupación se distribuyen aproximadamente en forma exponencial con media de 1/3?.

2.- hora con los datos del problema anterior pero considerando una tasa promedio diario de llegada de 2 y unos tiempos de ocupación que pueden considerarse como los tiempos de servicio para cargar las barcazas con un tiempo promedio de 1/3 de día.

a) Determínese las posibilidades de estado estable para este sistema de líneas de espera.

b) Que fracción de tiempo esta desocupado el muelle?

c) Cual es el numero promedio de barcazas en la espera de ser cargadas?

d) Cual es el tiempo promedio de espera por llegada de barcaza?

3.-La gerencia de la mina del ejercicio anterior considera la instalación de nuevas instalaciones de descarga de vagones de ferrocarril lo que aceleraría el proceso de carga de las barcazas. Se consideran dos tipos de instalaciones: Una con un tiempo promedio de carga de barcazas o.5 día laboral y un costo diario de operación $800, y el otro con un tiempo promedio de carga de 0.2 día laboral y con un costo diario e operación de $1000. El sistema actual tiene un costo diario de operación de $700 y el costo del tiempo de espera y de servicio a una barcaza es de $500 diarios. Determínese las características de operación necesarias para calcularlos costos de operación para cada uno de los tres sistemas(lea actual y las dos nuevas posibilidades).

Que instalación tiene el menor costo diario total?

4.- Un servicio de lavado de automóviles en un centro comercial muy activo determina las siguientes frecuencias de horas de llegadas de automóviles que solicitan servicios. Pruébese si el factor de llegada es poissoniano.

Num de llagadas	0	1	22	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Frecuencia	1	3	5	14	20	41	68	73	77	65	52	29	20	18	6	5	3

5.- En un proceso de producción una pieza al salir de forja tiene que pasar por troquelado, niquelado y empaquetado> para cada proceso se cuenta con una máquina especial. El insumo de todo ese proceso es una barra de acero. Se reciben un promedio de 150 barras de acero cada hora.

Se tiene la siguiente información:

Actividad	Forja	Troquelado	Niquelado	Empaquetado
Tiempo promedio de una pieza en minutos	1/8	1/4	1/5	1/2

Cual es la probabilidad de que al entrara una barra de acero al sistema existan 2 piezas en forja, ninguna en troquelado, dos en niquelado y ninguna en empaquetado?

6.- Suponga que para perforar la información de censo industrial en tarjetas de computadora una perforista profesional tarda, en promedio 4.76 minutos. Sin embargo, se llegan a acumular 10 formas censales en el proceso (una en perforación y nueve en espera), las perforistas, bajo la presión de sus supervisores, aceleran el trabajo llegando a perforar dicha información en 3 minutos promedio por forma. Si se supone que las formas censales arriban con una distribución de poisson a razón de 11 formas por hora, describa al sistema bajo 1 y 2 perforistas. La distribución del tiempo de perforación es exponencial negativa.

7.- Las llegadas a un conmutador telefónico tienen una distribución de poissón con valor de 4 llamadas por hora . La duración de la respuesta a una llamada telefónica tiene una distribución exponencial con valor medio de 12 minutos. El costo de cada operador telefónico es de 509 pesos/ hora. El costo social de la espera se ha estimado en función al numero de clientes que se pierden por no contestarle la llamada y asciende a 500 pesos/hora por el primer cliente adicional Determínese el numero de operadores telefónicos que minimizan el costo total esperado
por hora al sistema.

8.- Suponga que el sistema de transporte colectivo considera necesario pintar los carros del metro una vez al año. La primera alternativa acorde a la política de generación de empleo supone que los carros se pintan a mano por 2 grupos de pintores. El tiempo promedio de pintura de carro es de 8 horas, el costo anual total de esta alternativa es de 10 millones de pesos. La alternativa dos consiste en mecanizar el proceso de pintura por medio de una máquina especializada. El tiempo promedio de pintura es de 5 horas y el costo total anual es de 14.3 millones de pesos. La llegada de carros del metro al taller de pintura es una variable aleatoria con distribución poissón y el valor medio de un carro cada 12 horas. Los tiempos de pintura en ambas alternativas son variables aleatorias con distribución exponencial. El tiempo de costo de espera de un carro que no puede proporciona r servicio al publico, porque se encuentra en el taller de pintura se ha estimado de 7.50 pesos por hora. El taller de pintura, ambas alternativas trabaja las 24 horas de 365 días al año es decir 8760 horas por año. Que alternativa recomendaría para el sistema del transporte colectivo?

9.- ¿ A que tasa promedio debe de trabajar un empleado de un supermercado para asegurar con una probabilidad de 0.83 de que el cliente no tenga que esperar mas de 15 minutos en el sistema ?. Se supone que hay un solo servidor, que los clientes llegan siguiendo un proceso de entrada Poisson con una tasa media de 10 clientes por hora. El tiempo de servicio se supone tiene una distribución exponencial.

10.- Considere un sistema de colas de un servidor. Se ha observado que este servidor parece apresurarse conforme aumenta el número de cleintes en el sistema. Aún mas se estima que el tiempo esperado de servicio es 8 minutos cuando solo hay un solo cliente en el sistema. Determine el coeficiente de presión "c" para este modelo en los siguientes casos .-

a) Si se estima que el tiempo de servicio es de cuatro minutos cuando hay cuatro clientes en el sistema.
b) Si se estima que el tiempo de servicio es de cinco minutos cuando hay cuatro clientes en el sistema.

11.-Considere un taller de reparación de calzado con un zapatero. Los pares de zapatos llegan para reparación (sobre la base de primero en llegar, primero en salir) de acuerdo a un proceso Poisson con una tasa media de un par por hora. El tiempo necesario para reparar cada zapato individual tiene una distribución exponencial con media de 15 minutos.

a) Considere la formulación de este sistema de colas cuando se toma cada zapato individual (y no los pares) como un cliente.
b) Ahora considere la formulación de este sistema de colas cuando los pares de zapatos son los clientes, y encuentre el tiempo total de los zapatos en el sistema.

12.-Un restaurante de comida rápida tiene una ventanilla para dar servicio a automóviles. Se estima que los autos llegan de acuerdo a una distribución de Poisson a la tasa de 2 cada 5 minutos y que hay espacio suficiente para dar cabida a una fila de 10 automóviles. Otros autos que llegan pueden esperar fuera de este espacio, de ser necesario. Los empleados tardan 1.5 minutos en promedio en surtir un pedido, pero el tiempo de servicio varía en realidad según una distribución exponenecial. Determine lo siguiente .-

a) La probabilidad de que el establecimiento esté inactivo.
b) El número esperado de clientes en espera, pero que no se les atiende en ese momento.
c) El tiempo de espera calculado hasta que un cliente puede hacer su pedido en la ventanilla.
d) La probabilidad de que la línea de espera será mayor que la capacidad del espacio que conduce a la ventanilla de servicio a automóviles.

13.-Diez máquinas están siendo atendidas por una sola grúa. Cuando una máquina termina su carga se pide a la grúa que descargue la máquina y la provea de una nueva carga tomada de un área de almacenamiento adyacente. El tiempo de maquinado por carga se supone exponencial con media de 30 minutos. El tiempo desde el momento en que la grúa pone a trabajar a una máquina hasta que le trae una nueva carga, tambié es exponencial con media de 10 minutos.

a) Encuentre el porcentaje del tiempo que la grúa está ociosa.
b) ¿ Cuál es el número esperado de máquinas que esperan servicio de la grúa ?

14.- El concreto para ser vertido es transportado en una carretilla por obreros. Un obrero supervisa el vaciado y se asegura de que quede bien sentado y pulido. El costo de un supervisor es de $8 pesos por hora; los obreros cuestan $5 pesos la hora. Para efectos del calculo, se supone que una determinada carretilla se entrega cada 15 minutos y que la distribución de este tiempo es exponencial. el supervisor requiere de un promedio de 6 minutos para manipular una carga de cemento. Si este también tiene una distribución exponencial, ¿Cuantos obreros deben de emplearse ?.

15.- Un químico ensaya diversos productos de diferentes unidades de una refinería. este tiempo y el equipo tiene un costo de $18 pesos la hora . El puede realizar tres ensayos por hora, pero esta tasa varia y puede describirse mediante una distribución poisson. Una unidad en operación tiene un promedio medio entre requerimientos de ensayos de 2 horas con una distribución exponencial del equipo de ensayos cuestan $100. seis unidades funcionan continuamente . ¿cuantos químicos deben de emplearse?.

16.- Se reciben pagos con tarjeta de crédito a una tasa de 800 por día con una variación de aproximadamente es poisson. Una persona puede procesar aproximadamente 300 tarjetas en un día de 8 horas. Hacer una representación gráfica del tiempo medio entre llegadas y procesamiento completo, en función del numero de personas utilizadas.

17.- El afanador de un campo petrolero mide la cantidad de petróleo de un tanque y luego lo bombea por un oleoducto. Se requieren 30 minutos para efectuar el trabajo necesario incluyendo el tiempo de recorrido entre tanques. a causa de otras labores, el afanador solo dispone de 7 horas para este trabajo. Como aproximación se supone que de cada grupo de tanques requiere cerca de tres días después de quedar vacíos para ser llenados y volver a entrar en servicio. El numero esperado de grupos que esperan debe de ser aproximado igual a la tasa promedio de servicio (70,5 = 14 por día) ¿cuantos grupos de tanques se deben asignar al afanador?

18.- Un estudio muestra que el numero de clientes que esta en el momento ocupado la estación afecta la probabilidad de una nueva llegada. Si se supone que la probabilidad de servicio es de 0.6 formular este problema como una cadena de Markov estableciendo todas las suposiciones requeridas. Determinar el numero esperado en el sistema y la utilización del sistema.

Numero de estación	probabilidad de llegadas
0	0.4
1	0.3
2	0.2
3	0.05
4	0.0

19.- Un empleado atiende a los clientes que llegan a la estación de servicio. el tiempo de servicio esta distribuido exponencialmente con una media de 6 minutos. cuando hay mas de un automóvil en espera de servicio. otro mecánico llega a ayudar. si la tasa de llegada por clientes es de 6 por hora. ¿cuanta es la probabilidad de que se requiera un empleado adicional?.

20.- Un parque de recreación tiene una rampa para botes. Se requiere aproximadamente 7 minutos para lanzar o retirar del agua un bote, este tiempo se supone aleatorio y distribuido exponencialmente. Durante los periodos ocupados, los botes llegan para ser lanzados o retirados a una tasa de 5 por hora (con una distribución poisson). ¿Cual es el tiempo esperado del sistema?. ¿Cuantas rampas son necesarias para hacer este tiempo igual o menor que de 20 minutos?

21.-El administrador de una oficina desea determinar cuantas líneas telefónicas debe de tener. La llamada promedio requiere 3 minutos y tiene una distribución poisson. Sus primeros cálculos suponían una población infinita de clientes, pero ahora el se a dado de que cuando una persona esta hablando, disminuye la probabilidad de otra llamada. hay 10 personas que requieren servicio telefónico con un tiempo medio entre llegadas de una hora . Si la probabilidad de hallar todas las líneas ocupadas cuando se necesita una llamada es de es 0.10 o menos, ¿cuantas líneas telefónicas se necesitan?.

22.- El administrador de una sala de emergencia de un gran hospital encara el problema de ofrecer tratamiento a los pacientes que llegan a diferentes tasas durante el día. Hay cuatro médicos disponibles para tratar a los pacientes cuando se necesita si no se necesita , ellos pueden estar asignados a otras responsabilidades (por ejemplo, pruebas de laboratorio, reportes, diagnósticos de rayos X) o de otra forma reprogramados para trabajar a otras horas.
Es importante otorgar un tratamiento rápido responsable y el administrador siente ,que con promedio , los pacientes no deben estar sentados en el área de espera por mas de 5 minutos antes de ser vistos por un medico. los pacientes son tratados sobre al base de primera entrada, primer servicio, y consultar al primer medico disponible después de esperar en la cola. El patrón de llegada para un día típico es :

tiempo	**tasa de llegada**
9 A.M.- 3 P.M.	6 PACIENTES / HORA
3 P.M.- 8 P.M.	4 PACIENTES / HORA
8 P.M.- MEDIANOCHE	12 PACIENTES/ HORA

23.- Sam el veterinario maneja una clínica de vacunación de un centro antirrábico para perros , gatos pero su especialidad esta dada en los perros .Sam puede vacunar un perro cada tres minutos. Se estima que los perros llegaran independiente y aleatoriamente en el transcurso del día en un rango de un perro cada seis minutos de acuerdo can una distribución de poisson . También suponga que los tiempos de vacunación de sam esta distribuidos exponencialmente. Encuentre:

A) La probabilidad de que sam este ocioso.
B) La proporción de tiempo en que sam esta ocupado.
C) El numero promedio de perros que están siendo vacunados y que esperan ser vacunados.
D) El numero promedio de perros que esperan a ser vacunados.
E) El tiempo promedio que espera un perro antes de ser vacunado.
F) La cantidad promedio (media) de tiempo que un perro pasa entre esperar en la línea y ser vacunado.

24.- Antonio Flores administra un gran complejo de cines llamados Cinema I , II, III, IV en Alberta, Canadá. Cada uno de los cuatro auditorios proyecta una película diferente; el programa se estableció de tal forma que las horas de las funciones se encuentran escalonadas para evitar las multitudes que ocurrirían si los cuatro cines comenzaran a la misma hora. El cine tiene una sola taquilla y un cajero que puede mantener una tasa promedio de servicio de 280 clientes por hora . Se supone que los tiempos de servicio siguen una distribución exponencial. Las llegas en un día de actividad normal son distribuciones poisson y promedian 210 por hora .
Con el fin de determinar la eficiencia de su operación de boletos toño desea examinar varias características de operación de las colas .

A) Encontrar el numero promedio de cinefilos esperando en la línea para adquirir un boleto.
B) Que porcentaje de tiempo esta ocupado el cajero?
C) Cual es el tiempo promedio que pasa un cliente en el sistema?
D) Cual es tiempo promedio que pasa esperando en la línea para llegar a la taquilla.
E) Cual es la probabilidad de que haya mas de dos personas en el sistema? Mas de tres personas ? mas de cuatro? mas de siete?.

25. -Una tripulación de una línea de vuelo de la fuerza Aérea estima durante un periodo de alerta que puede prestar servicio aérea a la tasa de un interceptor por cada 6 minutos. Durante un periodo de alerta de 24 horas se estima que cada hora aterrizaran 7 interceptores. La tripulación opera como un equipo simultáneamente en cada interceptor. Suponga aterrizajes de poisson y una tasa de servicio exponencial. ENCUENTRE:

A) utilización de cada una de las tripulaciones de la línea de vuelo.
B) numero promedio de aviones que esperan servicio.
C) tiempo promedio que un avión esta esperando servicio.
D) el tiempo total que un avión gasta en el sistema.

"ANALISIS DE MARKOV"

CADENAS DE MARKOV

Una cadena de Markov es una forma de analizar el movimiento actual de una variable a fin de pronosticar el movimiento futuro de la misma.

Es un proceso estocástico que tiene las siguientes características:
1-Tiene un número finito de estados.
2-Tienen una propiedad Markoviana.

$$Po\ \{X_t+1 = 1\} \mid X_o=K_o,\ X_1=K_1,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ X_{t+1}=K_{t+1}$$

3- Las probabilidades de transición son constantes.
4- Existe un conjunto de probabilidades iniciales para todo valor de I.

PROCESO ESTOCÁSTICO.
Es un conjunto de variables al azar indexados que varían con el tiempo.

Ejemplo: **(Problema No. 1)**
Supongamos que describimos el estado de una máquina como una cadena de Markov, donde los estados posibles pueden ser:
a) La máquina está funcionando.
b) La máquina está recibiendo reparación.
c) La máquina está parada esperando recibir reparación.
De acuerdo a la siguiente matriz de transición.

Periodo actual

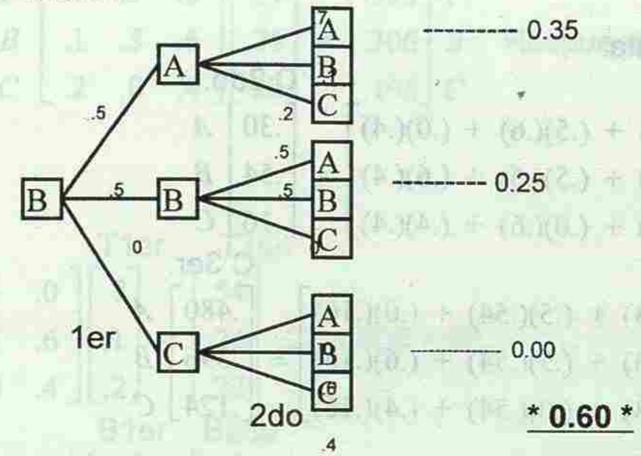
	A	B	C
A	.7	.5	0
B	.1	.5	.6
C	.2	0	.4

1-Encontrar la probabilidad de que estando en el estado b) llegue al estado a) en el segundo período.
2- Encontrar la probabilidad de que estando en el estado a) llegue al estado c) al tercer período.
3- Encontrar la probabilidad de que estando en el estado c) llegue al estado b) al cuarto período.

Período actual

	A	B	C
A	.7	.5	0
B	.1	.5	.6
C	.2	0	.4

Método clásico:



Método de Markov
respuesta a la primer pregunta:

$$\begin{bmatrix} .7 & .5 & .0 \\ .1 & .5 & .6 \\ .2 & .0 & .4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .5 \\ .5 \\ .0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (.5)(.7) + (.5)(.5) + (0)(0) \\ (.5)(.1) + (.5)(.5) + (0)(.6) \\ (.5)(.2) + (.5)(0) + (0)(.4) \end{bmatrix} = \overset{B\ 2do.}{\begin{bmatrix} .60 \\ .30 \\ .10 \end{bmatrix}} \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix}$$

Respuesta: 60%

Respuesta: 60%

respuesta a la segunda pregunta:

$$\begin{bmatrix} .7 & .5 & .0 \\ .1 & .5 & .6 \\ .2 & .0 & .4 \end{bmatrix} \overset{A\ 1er.}{\begin{bmatrix} .7 \\ .1 \\ .2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} (.7)(.7) + (.5)(.1) + (.0)(.2) \\ (.1)(.7) + (.5)(.1) + (.6)(.2) \\ (.2)(.7) + (.0)(.1) + (.4)(.2) \end{bmatrix} = \overset{A\ 2do.}{\begin{bmatrix} .54 \\ .24 \\ .22 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} .7 & .5 & .0 \\ .1 & .5 & .6 \\ .2 & .0 & .4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .54 \\ .24 \\ .22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (.7)(.54) + (.5)(.24) + (.0)(.22) \\ (.1)(.54) + (.5)(.24) + (.6)(.22) \\ (.2)(.54) + (.0)(.24) + (.4)(.22) \end{bmatrix} = \overset{A\ 3er.}{\begin{bmatrix} .54 \\ .24 \\ .22 \end{bmatrix}} \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix}$$

Respuesta: 19.6%

Respuesta a la tercer pregunta.

C 2do.

$$\begin{bmatrix} .7 & .5 & .0 \\ .1 & .5 & .6 \\ .2 & .0 & .4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} .0 \\ .6 \\ .4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (.7)(.0) + (.5)(.6) + (.0)(.4) \\ (.1)(.0) + (.5)(.6) + (.6)(.4) \\ (.2)(.0) + (.0)(.6) + (.4)(.4) \end{bmatrix} = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} .30 \\ .54 \\ .16 \end{bmatrix} & \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} \end{array}$$

C 3er.

$$\begin{bmatrix} .7 & .5 & .0 \\ .1 & .5 & .6 \\ .2 & .0 & .4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} .30 \\ .54 \\ .16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (.7)(.3) + (.5)(.54) + (.0)(.16) \\ (.1)(.3) + (.5)(.54) + (.6)(.16) \\ (.2)(.3) + (.0)(.54) + (.4)(.16) \end{bmatrix} = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} .480 \\ .396 \\ .124 \end{bmatrix} & \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} .7 & .5 & .0 \\ .1 & .5 & .6 \\ .2 & .0 & .4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} .480 \\ .396 \\ .124 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (.7)(.48) + (.5)(.396) + (.0)(.124) \\ (.1)(.48) + (.5)(.396) + (.6)(.124) \\ (.2)(.48) + (.0)(.396) + (.4)(.124) \end{bmatrix} = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} .534 \\ .3204 \\ .1456 \end{bmatrix} & \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} \end{array}$$

Respuesta: 32.04%

NOTA: No contestar cuarta pregunta.

(Problema No. 2)

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} T & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} T \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} .7 & .5 & .0 \\ .1 & .5 & .6 \\ .2 & .0 & .4 \end{bmatrix} \end{array}$$

1- ¿Que % de mercado le cede la tecate a la bohemia en el tercer período?
2- ¿Cuántos clientes tendrá la carta en el 2do. período?

$$\begin{bmatrix} .7 & .5 & .0 \\ .1 & .5 & .6 \\ .2 & .0 & .4 \end{bmatrix}$$ 1000 clientes; 400 tecate; 100 bohemia; 500 carta.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} T & B & C & T1er & & T2do \end{matrix} \\ \begin{matrix} T \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} .7 & .5 & .0 \\ .1 & .5 & .6 \\ .2 & .0 & .4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} .7 \\ .1 \\ .2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .54 \\ .21 \\ .22 \end{bmatrix} \\ & \begin{matrix} T & B & C & T2do & & T3er \end{matrix} \end{array}$$

$$\begin{matrix} T \\ B \\ C \end{matrix}\begin{bmatrix} .7 & .5 & .0 \\ .1 & .5 & .6 \\ .2 & .0 & .4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} .54 \\ .24 \\ .22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .493 \\ .306 \\ .196 \end{bmatrix}\begin{matrix} T \\ B \\ C \end{matrix}$$ Respuesta a la pregunta No. 1: 30.6%.

Clientes

T1er T2do

$$\begin{bmatrix} .7 & .5 & .0 \\ .1 & .5 & .6 \\ .2 & .0 & .4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} .7 \\ .1 \\ .2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .54 \\ .24 \\ .22 \end{bmatrix}$$ .22 x 400 = 88

B1er B2do

$$\begin{bmatrix} .7 & .5 & .0 \\ .1 & .5 & .6 \\ .2 & .0 & .4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} .5 \\ .5 \\ .0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .6 \\ .3 \\ .1 \end{bmatrix}$$ .10 x 100 = 10

$$\begin{bmatrix} .7 & .5 & .0 \\ .1 & .5 & .6 \\ .2 & .0 & .4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} .0 \\ .6 \\ .4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .3 \\ .54 \\ .16 \end{bmatrix}$$ .16 x 500 = 80

Respuesta a la 2da pregunta = 88 + 10 + 80 = <u>178</u>

METODOLOGÍA CORRECTA

2do. Período

*Mercado de la Tecate
.54 x 400 = 216
.24 x 400 = 96
.22 x 400 = 88

*Mercado de la carta blanca
.3 x 500 = 150
426
.54 x 500 = 270
.16 x 500 = 80

*Mercado de la Bohemia
.6 x 100 = 60
.3 x 100 = 30
.1 x 100 = 10

2do período: Totales
Tecate = 216 + 60 + 150 =
Bohemia = 96 + 30 +270 = 396
Carta = 88 + 10 + 80 = 178

3.- Cuántos clientes tendrá la tecate en el 3er. Período?

T 2do

$$\begin{bmatrix} .54 \\ .24 \\ .22 \end{bmatrix} * 400 = 216$$

T 3er

$$\begin{bmatrix} .498 \\ .306 \\ .196 \end{bmatrix} * 426 = 212.148$$

C 2do

$$\begin{bmatrix} .3 \\ .54 \\ .16 \end{bmatrix} * 500 = 150$$

C 3er

$$\begin{bmatrix} .48 \\ .396 \\ .124 \end{bmatrix} * 178 = 85.44$$

B 2do, B 3er, B 3er

$$\begin{bmatrix} .6 \\ .3 \\ .1 \end{bmatrix} * 100 = 60[.42 + .15 + 0] = \begin{bmatrix} .57 \\ .27 \\ .16 \end{bmatrix} * 396 = 225.72$$

RESPUESTA = 212.148 + 85.44 + 225.72
RESPUESTA = <u>523.308</u>

(Problema No. 3.)

$$\begin{array}{c} \\ F \\ C \\ V \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} F & C & V & N \end{array} \\ \begin{bmatrix} .3 & .2 & .1 & .4 \\ .5 & .1 & .3 & .1 \\ .4 & .5 & .0 & .1 \\ .1 & .2 & .1 & .6 \end{bmatrix} \end{array}$$

A)¿Cuantos clientes tendrá VW en 1999?
B)¿Que porcentaje de mercado le cederá la Ford a la Nissan en el 2000?
C)¿Que porcentaje de mercado tendrá la Chrysler en 1999?

Vector de participación en el año de 1996.

$$\begin{Bmatrix} F = 2{,}000 \\ C = 1{,}000 \\ V = 3{,}000 \\ N = 4{,}000 \end{Bmatrix}$$

IMPORTANTE : Como la matriz no suma 100% verticalmente, se ajusta horizontalmente ya que así se tiene la matriz correcta.

$$\begin{array}{c} \\ F \\ C \\ V \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} F & C & V & N \end{array} \\ \begin{bmatrix} .3 & .5 & .4 & .1 \\ .2 & .1 & .5 & .2 \\ .1 & .3 & .0 & .1 \\ .4 & .1 & .1 & .6 \end{bmatrix} \end{array}$$

FORD

$$\begin{array}{c} \\ F \\ C \\ V \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} F & C & V & N \end{array} \\ \begin{bmatrix} .3 & .2 & .1 & .4 \\ .5 & .1 & .3 & .1 \\ .4 & .5 & .0 & .1 \\ .1 & .2 & .1 & .6 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} F96 \\ \begin{bmatrix} .3 \\ .2 \\ .1 \\ .4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} F97 \\ \begin{bmatrix} .27 \\ .21 \\ .13 \\ .39 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} F98 \\ \begin{bmatrix} .227 \\ .218 \\ .129 \\ .376 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} F99 \\ \begin{bmatrix} .2813 \\ .2169 \\ .1307 \\ .3711 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} F2000 \\ \begin{bmatrix} .28233 \\ .21752 \\ .130310 \\ .36994 \end{bmatrix} \end{array}$$

CHRYSLER

$$\begin{array}{c} \\ F \\ C \\ V \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} F & C & V & N \end{array} \\ \begin{bmatrix} .3 & .2 & .1 & .4 \\ .5 & .1 & .3 & .1 \\ .4 & .5 & .0 & .1 \\ .1 & .2 & .1 & .6 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} C96 \\ \begin{bmatrix} .5 \\ .1 \\ .3 \\ .1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} C97 \\ \begin{bmatrix} .33 \\ .28 \\ .09 \\ .30 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} C98 \\ \begin{bmatrix} .305 \\ .199 \\ .147 \\ .349 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} C99 \\ \begin{bmatrix} .2847 \\ .2242 \\ .1251 \\ .3660 \end{bmatrix} \end{array}$$

VOLKSWAGEN

$$\begin{array}{c} F \\ C \\ V \\ N \end{array} \begin{bmatrix} .3 & .2 & .1 & .4 \\ .5 & .1 & .3 & .1 \\ .4 & .5 & .0 & .1 \\ .1 & .2 & .1 & .6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .4 \\ .5 \\ .0 \\ .1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .38 \\ .15 \\ .20 \\ .27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .296 \\ .245 \\ .110 \\ .349 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .2902 \\ .2085 \\ .1380 \\ .3633 \end{bmatrix}$$

NISSAN

$$\begin{array}{c} \\ F \\ C \\ V \\ N \end{array}\begin{array}{cccc} F & C & V & N \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc|c|c|c|c} & F & C & V & N & N96 & N97 & N98 & N99 \\ \hline F & .3 & .2 & .1 & .4 & .1 & .23 & .269 & .2797 \\ C & .5 & .1 & .3 & .1 & .2 & .21 & .218 & .2169 \\ V & .4 & .5 & .0 & .1 & .1 & .13 & .129 & .1307 \\ N & .1 & .2 & .1 & .6 & .6 & .43 & .384 & .3727 \end{array}$$

Respuesta al inciso A).

F97
$$\begin{array}{c} F \\ C \\ V \\ N \end{array}\begin{bmatrix} .27 \\ .21 \\ .13 \\ .39 \end{bmatrix}\begin{array}{l} x\,2000 = 500 \\ x\,2000 = 420 \\ x\,2000 = 260 \\ x\,2000 = 780 \end{array}$$

C97
$$\begin{array}{c} F \\ C \\ V \\ N \end{array}\begin{bmatrix} .33 \\ .28 \\ .09 \\ .30 \end{bmatrix}\begin{array}{l} x\,1000 = 330 \\ x\,1000 = 280 \\ x\,1000 = 90 \\ x\,1000 = 300 \end{array}$$

V97
$$\begin{array}{c} F \\ C \\ V \\ N \end{array}\begin{bmatrix} .38 \\ .15 \\ .20 \\ .27 \end{bmatrix}\begin{array}{l} x\,3000 = 1140 \\ x\,3000 = 450 \\ x\,3000 = 600 \\ x\,3000 = 810 \end{array}$$

N97
$$\begin{array}{c} F \\ C \\ V \\ N \end{array}\begin{bmatrix} .23 \\ .21 \\ .13 \\ .43 \end{bmatrix}\begin{array}{l} x\,4000 = 920 \\ x\,4000 = 840 \\ x\,4000 = 520 \\ x\,4000 = 1720 \end{array}$$

Clientes en:

	1997	1998	1999
F	2930	2824.77	2826.056
C	1990	2181.88	2174.025
V	1470	1297.89	1304.256
N	3610	3695.46	3695.6616

F98
$$\begin{array}{c} F \\ C \\ V \\ N \end{array}\begin{bmatrix} .277 \\ .218 \\ .129 \\ .376 \end{bmatrix}\begin{array}{l} x\,2930 = 811.95 \\ x\,2930 = 638.74 \\ x\,2930 = 377.97 \\ x\,2930 = 1101.68 \end{array}$$

C98
$$\begin{array}{c} F \\ C \\ V \\ N \end{array}\begin{bmatrix} .305 \\ .199 \\ .147 \\ .349 \end{bmatrix}\begin{array}{l} x\,1990 = 606.95 \\ x\,1990 = 396.01 \\ x\,1990 = 292.53 \\ x\,1990 = 694.51 \end{array}$$

V98
$$\begin{array}{c} F \\ C \\ V \\ N \end{array}\begin{bmatrix} .296 \\ .245 \\ .110 \\ .349 \end{bmatrix}\begin{array}{l} x\,1470 = 435.12 \\ x\,1470 = 360.15 \\ x\,1470 = 161.7 \\ x\,1470 = 513.03 \end{array}$$

N98
$$\begin{array}{c} F \\ C \\ V \\ N \end{array}\begin{bmatrix} .269 \\ .218 \\ .129 \\ .384 \end{bmatrix}\begin{array}{l} x\,3610 = 971.09 \\ x\,3610 = 786.98 \\ x\,3610 = 465.69 \\ x\,3610 = 1389.24 \end{array}$$

F99
$$\begin{array}{c} F \\ C \\ V \\ N \end{array}\begin{bmatrix} .2813 \\ .2169 \\ .1307 \\ .3711 \end{bmatrix}\begin{array}{l} x\,2824.77 = 794.607801 \\ x\,2824.77 = 612.692613 \\ x\,2824.77 = 369.197439 \\ x\,2824.77 = 1048.272147 \end{array}$$

C99
$$\begin{array}{c} F \\ C \\ V \\ N \end{array}\begin{bmatrix} .2847 \\ .2242 \\ .1251 \\ .3660 \end{bmatrix}\begin{array}{l} x\,2181.88 = 621.181236 \\ x\,2181.88 = 489.177496 \\ x\,2181.88 = 272.953188 \\ x\,2181.88 = 798.56808 \end{array}$$

V99
$$\begin{array}{c} F \\ C \\ V \\ N \end{array}\begin{bmatrix} .2902 \\ .2085 \\ .1380 \\ .3633 \end{bmatrix}\begin{array}{l} x\,1297.89 = 376.647678 \\ x\,1297.89 = 270.610065 \\ x\,1297.89 = 179.10882 \\ x\,1297.89 = 471.523437 \end{array}$$

N99
$$\begin{array}{c} F \\ C \\ V \\ N \end{array}\begin{bmatrix} .2797 \\ .2169 \\ .1307 \\ .3727 \end{bmatrix}\begin{array}{l} x\,3695.46 = 1033.620162 \\ x\,3695.46 = 801.545274 \\ x\,3695.46 = 482.996622 \\ x\,3695.46 = 1377.297942 \end{array}$$

C) %C1999 = 2174.025/10000 = 21.74%

Respuestas:

A) VW tendrá 1304.256 clientes en 1999.
B) Ford cederá a Nissan el 36.994% de su mercado en 2000.
C) Crhysler tendrá el 21.74% del mercado en 1999.

Problema:

Dada la siguiente matriz determine:
A) ¿Que porcentaje tendrá Tigres en el año 2000?
B) ¿Que porcentaje le cede el América al Tigres en 1999?
C) ¿Cuantos aficionados tendrá el Guadalajara en 1998?

$$\begin{array}{c} \\ G \\ A \\ T \\ N \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} G & A & T & N \end{array} \\ \begin{bmatrix} .3 & .4 & .3 & .2 \\ .4 & .5 & .0 & .1 \\ .3 & .6 & .1 & .0 \\ .2 & .4 & .3 & .1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{Vector} \begin{bmatrix} G = 3000 \\ A = 2000 \\ T = 4000 \\ N = 800 \end{bmatrix}$$

Nota: La matriz no suma el 100%, por lo tanto se ajusta.

Guadalajara.

$$\begin{array}{c|cccc|c|c|c|c|c} & & & & & G96 & G97 & G98 & G99 & G2000 \\ \hline G & .3 & .4 & .3 & .2 & .3 & .28 & .320 & .3246 & .32108 \\ A & .4 & .5 & .0 & .1 & .2 & .38 & .414 & .3970 & .39322 \\ T & .3 & .6 & .1 & .0 & .1 & .16 & .098 & .0922 & .09754 \\ N & .2 & .4 & .3 & .1 & .4 & .18 & .168 & .1862 & .18816 \end{array}$$

América.

$$\begin{array}{c|cccc|c|c|c|c|c} & & & & & A96 & A97 & A98 & A99 & A2000 \\ \hline G & .3 & .4 & .3 & .2 & .4 & .34 & .315 & .3188 & .32129 \\ A & .4 & .5 & .0 & .1 & .5 & .37 & .383 & .3967 & .39605 \\ T & .3 & .6 & .1 & .0 & .0 & .07 & .107 & .1007 & .09704 \\ N & .2 & .4 & .3 & .1 & .1 & .22 & .195 & .1838 & .18557 \end{array}$$

Tigres. T96 T97 T98 T99 T2000

$$\begin{array}{c} G \\ A \\ T \\ N \end{array}\begin{bmatrix} .3 & .4 & .3 & .2 \\ .4 & .5 & .0 & .1 \\ .3 & .6 & .1 & .0 \\ .2 & .4 & .3 & .1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} .3 \\ .6 \\ .1 \\ .0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} .36 \\ .42 \\ .04 \\ .18 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} .324 \\ .378 \\ .094 \\ .204 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} .3174 \\ .3918 \\ .1030 \\ .1878 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} .32040 \\ .39630 \\ .09838 \\ .18492 \end{bmatrix}$$

Necaxa.

$$\begin{array}{c} G \\ A \\ T \\ N \end{array}\begin{bmatrix} .3 & .4 & .3 & .2 \\ .4 & .5 & .0 & .1 \\ .3 & .6 & .1 & .0 \\ .2 & .4 & .3 & .1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} .2 \\ .4 \\ .3 \\ .1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} .33 \\ .46 \\ .08 \\ .13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} .333 \\ .396 \\ .080 \\ .191 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} .3205 \\ .3890 \\ .0986 \\ .1919 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} .31971 \\ .39452 \\ .09948 \\ .18629 \end{bmatrix}$$

Cálculo de los aficionados por año.

$G\,(1997) = .28(3000)+.34(2000)+.36(4000)+.33(800) = 3224$

$A\,(1997) = .38(3000)+.37(2000)+.42(4000)+.46(800) = 3928$

$T\,(1997) = .16(3000)+.07(2000)+.04(4000)+.08(800) = 844$

$N\,(1997) = .18(3000)+.22(2000)+.18(4000)+.13(800) = 1804$

TOTAL = 9800

$G\,(1998) = .320(3224)+.315(3928)+.324(844)+.333(1804) = 3143.188$

$A\,(1998) = .414(3224)+.383(3928)+.378(844)+.396(1804) = 3872.576$

$T\,(1998) = .098(3224)+.107(3928)+.094(844)+.080(1804) = 959.904$

$N\,(1998) = .168(3224)+.195(3928)+.204(844)+.191(1804) = 1824.332$

TOTAL = 9800

$G\,(1998) =$

$A\,(1998) =$ (continua abajo ↓)

$T\,(1998) =$

$N\,(1998) =$

$.3246(3143.188)+.3188(3872.576)+.3174(959.904)+.3205(1824.332) = 3144.227984$

$.3970(3143.188)+.3967(3872.576)+.3918(959.904)+.3890(1824.332) = 3869.852070$

$.0922(3143.188)+.1007(3872.576)+.1030(959.904)+.0986(1824.332) = 958.519584$

$.1862(3143.188)+.1838(3872.576)+.1878(959.904)+.1919(1844.332) = 1827.400356$

T(2000) = .09754(3144.227984) + .09709(3869.852070) + .09838(958.519584) + .09948(1827.400356)

<u>T(2000) = 958.500879</u>

%T(2000) = 958.500879/9800 = <u>9.7806%</u>

Respuestas

inciso a) Tigres tendrá el 9.7806% de los aficionados en 2000

inciso b) América cederá a tigres el 10.07% de su afición en 1999

inciso c) Guadalajara tendrá 3143.188 aficionados en 1998

DECISIONES BAJO INCERTIDUMBRE

Y

TEORIA DE JUEGOS

Ejemplo : 1

Resuelva la siguiente matriz para costos y utilidades, por el criterio Laplace, minimax, Savage y Hurwics.

Nivel de inventario	A_n	I	II	III	IV
10,000	A_1	5	3	7	1
15,000	A_2	4	6	2	4
13,000	A_3	1	8	3	5
5,000	A_4	2	9	8	6

I 0-3,000
II 3,001-6,000
III 6,001 a 15,000
IV 15,001-20,000

a) Laplace (Costo y utilidad)
b) Minimax (Costo y utilidad)
c) Savage (Costo y utilidad)
d) Hurwics (Costo y utilidad)

a) Criterio de Laplace
Laplace(costo): Lo menos que pueda perder.

$$\begin{array}{cc} \text{costo} & \begin{array}{cccc} I & II & III & IV \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 3 & 5 \\ 2 & 9 & 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to 1/4\,(5+3+7+1) = 4 \to a_1 \\ \to 1/4\,(4+6+2+4) = 4 \to a_2 \\ \to 1/4\,(1+8+3+5) = 4.25 \\ \to 1/4\,(2+9+8+6) = 6.25 \to a_4 \end{array} \end{array}$$

*Tomar un nivel de inventario a_1 ó a_2 con un costo de $4.00

Laplace(utilidad): Lo más que pueda ganar.

$$\begin{array}{cc} \text{costo} & \begin{array}{cccc} I & II & III & IV \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 3 & 5 \\ 2 & 9 & 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to 1/4\,(5+3+7+1) = 4 \to a_1 \\ \to 1/4\,(4+6+2+4) = 4 \to a_2 \\ \to 1/4\,(1+8+3+5) = 4.25 \\ \to 1/4\,(2+9+8+6) = 6.25 \to a_4 \end{array} \end{array}$$

*Tomar un nivel de inventario a_4 con una utilidad de $6.25

b) Criterio minimax (costo únicamente).

$$\begin{array}{ccc} \text{costo} & \begin{array}{cccc} I & II & III & IV \end{array} & \text{minimax} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 3 & 5 \\ 2 & 9 & 8 & 6 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} 7 \\ 6 \to a_2 \\ 8 \\ 9 \end{array} \end{array}$$

Minimax: Se selecciona la mayor pérdida de cada nivel y luego se escoge la menor entre ellos.
*Tomar un nivel de inventario a_2 con un costo de $6.00

b) Criterio maximin (utilidad únicamente).

$$\begin{array}{ccc} \text{utilidad} & \begin{array}{cccc} I & II & III & IV \end{array} & \text{minimax} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 3 & 5 \\ 2 & 9 & 8 & 6 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} 1 \\ 2 \to a_2 \\ 1 \\ 2 \to a_4 \end{array} \end{array}$$

maximin: se selecciona la mínima utilidad de cada nivel y luego se escoge la mayor entre ellas.

*Tomar un nivel de inventario a_2 ó a_4 con una utilidad de $2.00

c)Criterio de Savage

$$\begin{array}{cccc} \text{costo} & \begin{array}{cccc} I & II & III & IV \end{array} & \text{matriz de deploración} & \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 3 & 5 \\ 2 & 9 & 8 & 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 6 & 5 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} 5 \\ 3 \to a_2 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array}$$

*Tomar un nivel de inventario a_2 con un costo de $3.00

$$\begin{array}{cccc} \text{utilidad} & \begin{array}{cccc} I & II & III & IV \end{array} & \text{matriz de deploración} & \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 3 & 5 \\ 2 & 9 & 8 & 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} 6 \\ 6 \\ 5 \\ 3 \to a_4 \end{array} \end{array}$$

*Tomar un nivel de inventario a_4 con una utilidad de $3.00

d) Criterio Harwics

α = Nivel de Confianza {0.1 ....0.9 }

Costo	I	II	III	IV	Min	Max
a_1	5	3	7	1	1	7
a_2	4	6	2	4	2	6
a_3	1	8	3	5	1	8
a_4	2	9	8	6	2	9

$\alpha = 0.3$

α = (min) + (1-α) max = resp.

.3 (1) + (1- .3)7 = 5.2

.3 (2) + (1- .3)6 = **4.8** a_2

.3 (1) + (1- .3)8 = 5.9

.3 (2) + (1- .3)9 = 6.9

*Tomar un nivel de inventario a_2 con un costo de $4.80

Utilidad	I	II	III	IV	Max	Min
a_1	5	3	7	1	7	1
a_2	4	6	2	4	6	2
a_3	1	8	3	5	8	1
a_4	2	9	8	6	9	2

$\alpha = 0.3$

α = (max) + (1-α) min = resp.

.3 (7) + (1- .3)1 = 2.8

.3 (6) + (1- .3)2 = 3.2

.3 (8) + (1- .3)1 = 3.1

.3 (9) + (1- .3)2 = **4.1** a_4

*Tomar un nivel de inventario a_4 con un costo de $4.10

EJEMPLO: Resolver la siguiente matriz de costo por todos los criterios

Costo

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 6 \\ 9 & 8 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 5 & 1 \\ 2 & 9 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

LAPLACE:		MINIMAX:	
1/4 (1+7+3+6) = 4.25		7	
1/4 (9+8+1+4) = 5.50		9	
1/4 (3+6+5+1) = **3.75**	a_3	**6**	a_3
1/4 (2+9+4+3) = 4.50		9	

SAVAGE:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 \\ 8 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

MINIMAX

5

8

4

3 $a4$

HURWICS: $\alpha = 0.8$

MIN	MAX	α (min) + (1-α) max	
1	7	0.8(1) + (1-.8) 7 = 2.2	
1	9	0.8(1) + (1-.8) 9 = 2.6	
1	6	0.8(1) + (1-.8) 6 = **2.0**	a_3
2	9	0.8(2) + (1-.8) 9 = 3.4	

EJEMPLO: Resolver la siguiente matriz de costo por todos los criterios

Utilidad

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 6 \\ 9 & 8 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 5 & 1 \\ 2 & 9 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

LAPLACE:		MAXIMIN	
1/4 (1+7+3+6) = 4.25		1	
1/4 (9+8+1+4) = **5.50**	a_2	1	
1/4 (3+6+5+1) = 3.75		1	
1/4 (2+9+4+3) = 4.50		**2**	a_4

SAVAGE:

	MINIMAX	
$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$	5 8 4 3	$a4$

HURWICS: $\alpha = 0.8$

MIN	MAX	α (min) + (1-α) max	
1	7	0.8(7) + (1-.8) 1 = 5.8	
1	9	0.8(9) + (1-.8) 1 = 7.4	
1	6	0.8(6) + (1-.8) 1 = 5.0	
2	9	0.8(9) + (1-.8) 2 = 7.6	<u>a4</u>

CRITERIO LAPLACE

Ejemplo: 10.3-1

Una instalación recreativa debe decidir acerca del nivel de abastecimientos que debe almacenar para satisfacer las necesidades de sus clientes durante uno de los días de fiesta. El número exacto de clientes no se conoce, pero se espera que esté en una de cuatro categorías: 20, 25, 300, 350 clientes. Se sugieren, por consiguiente, cuatro niveles de abastecimiento, siendo el nivel *i* el ideal (desde el punto de vista de costos) si el número de clientes cae en la categoría *i*. La desviación respecto de niveles ideales resulta en costos adicionales, ya sea porque tenga un abastecimiento extra sin necesidad o porque la demanda no pueda satisfacerse. La tabla que sigue proporciona estos costos en miles de unidades monetarias.

Categoría de clientes

		θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
Nivel de abastecimiento	a_1	5	10	18	25
	a_2	8	7	8	23
	a_3	21	18	12	21
	a_4	30	22	19	15

El principio de Laplace supone que θ_1, θ_2, θ_3, y θ_4 tienen la misma posibilidad de suceder. Por consiguiente, las probabilidades asociadas son $P\{\theta = \theta j\} = ¼$, j = 1,2,3,4 y los costos esperados para las acciones diferentes a_1, a_2, a_3 y a_4 son

E{a_1} = (1/4)(5+10+18+25) = 14.5
E{a_2} = 1/4)(8+7+8+23) $\boxed{11.5}$
E{a_3} = (1/4)(21+18+12+21) = 18.0
E{a_4} = (1/4)(30+22+19+15) = 21.5

Esto muestra que el mejor nivel de inventario de acuerdo con el criterio de Laplace está especificado por a_2.

CRITERIO MINIMAX (MAXIMIN)

Ejemplo: 10.3.2

Ya que $v(a_i, \theta_j)$ representa costo, en el ejemplo anterior, el criterio minimax es aplicable. Los cálculos se resumen en la matriz que sigue. La estrategia minimax es a_3.

$v(a_i, \theta_j)$ =

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	**$\max_{\theta_j}\{v(a_i, \theta_j)\}$**	
a_1	5	10	18	25	25	
a_2	8	7	8	23	23	
a_3	21	18	12	21	21	⟵ **valor minimax**
a_4	30	22	19	15	30	

21 mínimo de los máximos

CRITERIO DE DEPLORACION MINIMAX DE SAVAGE

Ejemplo: 10.3-3

Considere el ejemplo 10.3-1. La matriz dada representa costos. La correspondiente matriz de deploración se determina restando 5, 7, 8 y 15 de las columnas 1, 2, 3 y 4, respectivamente.

$r(a_i, \theta_j)$ =

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	**$\max\{r(a_i, \theta_j)\}$**	
a_1	0	3	10	10	10	
a_2	3	0	0	8	8	
a_3	16	11	4	6	16	**valor minimax**
a_4	25	15	11	0	25	

Aunque el mismo criterio minimax se utiliza para determinar la mejor acción (a_2 en este caso), el uso de $r(a_i, \theta_j)$ ha resultado en una solución diferente de la del ejemplo 10.3-2.

CRITERIO HURWICZ

Ejemplo 10.3-4

El principio Hurwicz se aplica al ejemplo 10.3-1. Se supone que a = 1/2. Los cálculos necesarios se muestran en seguida. La solución óptima dada por a_1 o a_2.

	$\min_{\theta j} v(a_i, \theta_j)$	$\max_{\theta j} v(a_i, \theta_j)$	$\min_{\theta j} v(a_i, \theta_j) + (1 - a)\, max_{\theta j}\, v(a_i, \theta_j)$
a_1	5	25	15
a_2	7	23	15
a_3	12	21	16.5
a_4	15	30	22.5

Ejemplo 10.4-1

Se considera un juego de emparejar dos monedas en el cual cada uno de 2 jugadores A y B elige cara (H) o cruz (T). Si los dos resultados son iguales (esto es, H y H o T y T,) el jugador A gana \$1.00 al jugador B. De otra manera, A pierde \$1.00 que paga a B.

En este juego cada jugador tiene dos estrategias (H o T) . Esto proporciona la siguiente matriz de juegos 2 x 2 expresada en términos del pago a A.

		Jugador B	
		H	T
Jugador A	H	1	-1
	T	-1	1

La solución "óptima" a tal juego pude requerir que cada jugador emplee una estrategia *pura* (por ejemplo, (H o T) o una mezcla de estrategias puras. El último caso se conoce como la selección de estrategia **mixta.**

SOLUCION OPTIMA DE JUEGOS DE DOS-PERSONAS Y SUMA CERO

Ejemplo 10.4-2

Considerar la matriz de pagos siguiente que representa la ganancia del jugador A. Los cálculos de los valores minimax y maximin se muestran en la matriz.

		Jugador B				
		1	2	3	4	Mínimo de renglón
Jugador A	1	8	2	9	5	2
	2	6	5	7	18	$\boxed{5}$
	3	7	3	-4	10	-4
Máximo de columna		8	$\boxed{5}$	9	18	
			minimax			

MINIMAX = MAXIMIN POR LO TANTO ES UN JUEGO ESTABLE CON PUNTO DE SILLA
$\upsilon = 5$ EL ASIENTO (2 , 2).