INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES II **LINEAS DE ESPERA**

TERMINOLOGIA

L = ESTADO DEL SISTEMA O EL NUMERO DE CLIENTES EN EL SISTEMA EN UN MOMENTO DADO.

Lq = NUMERO DE CLIENTES EN EL SISTEMA ESPERANDO POR SERVICIO.

W = TIEMPO TOTAL DEL CLIENTE EN EL SISTEMA DESDE QUE ENTRA HASTA QUE SALE.

Wq = TIEMPO TOTAL DE ESPERA POR SERVICIO DEL CLIENTE EN EL SISTEMA.

ρ = RAZÓN DE UTILIZACIÓN DEL SISTEMA.

M = MÁXIMO NUMERO DE CLIENTES POTENCIALES EN EL SISTEMA EN UN MOMENTO DADO.

S = NUMERO DE SERVIDORES EN EL SISTEMA.

n = NUMERO DE CLIENTES EN EL SISTEMA EN UN TIEMPO t.

Pn(t) = PROBABILIDAD DE QUE HAYA EXACTAMENTE n CLIENTES EN EL SISTEMA EN UN TIEMPO t.

λ = FRECUENCIA DE LLEGADAS POISSON = NUMERO DE CLIENTES QUE LLEGAN POR UNIDAD DE TIEMPO .

μ = FRECUENCIA DE SERVICIO EXPONENCIAL = NUMERO DE CLIENTES QUE SON ATENDIDOS POR UNIDAD DE TIEMPO.

1/λ = TIEMPO ENTRE LLEGADAS QUE TRANSCURRE ENTRE UNA LLEGADA Y LA SIGUIENTE.

1/μ = TIEMPO DE SERVICIO ALA MEDIA DE LA DISTRIBUCIÓN ESPERADA DE LOS TIEMPOS DE SERVICIO.

P{ W>t} = PROBABILIDAD DE QUE UN CLIENTE SE ESTE MAS DE UN TIEMPO t EN EL SISTEMA.

P{ Wq > t} = PROBABILIDAD DE QUE UN CLIENTE SE ESTE MAS DE UN TIEMPO t ESPERANDO POR SERVICIO EN EL SISTEMA.

1.-En el departamento de emergencia de un hospital los pacientes llegan con una distribución de probabilidad poisson a una media de 3 clientes por hora.El médico que esta en dicho departamento los atiende con una frecuencia de servicio exponencial a una tasa media de 4 clientes por hora. ¿ Contrataria o no a un segundo médico?

Nota: Este problema no tiene parámetro para tomar una desición, se realizó para fines de práctica para utilización de fórmulas.

Determine :

a) Razón de utilización del sistema (ρ).
b)Probabilidad de que no se encuentren pacientes en el sistema (P0).
c)Probabilidad de que exista un paciente en el sistema (P1).
d)Probabilidad de que existan 3 pacientes en el sistema (P3).
e)Tiempo total del cliente en el sistema (W).
f)Tiempo total de espera por servicio en el sistema (Wq).
g)El número de pacientes en el sistema en un momento dado (L).
h)El número de pacientes en el sistema esperando por servicio (Lq).
i)Probabilidad de que el cliente se espere más de 1 hora en el sistema.P {W > 1 }
j)Probabilidad de que el cliente espere más de media hora en el sistema esperando por servicio. P { Wq > 1 / 2 } .

SOLUCION : MODELO I

Poblacion = ∞ Tasa de llegadas = cte. (λ)

Línea de espera = ∞ Tasa de servicio = cte. (μ)

Datos:

λ = 3 Pacientes/ hora

μ = 4 Pacientes/hora

Para s = 1

a)$\rho = \lambda / s\mu = 3/(1)(4) = 3/4$

b)$P0 = 1 - \rho = 1 - 3/4 = 1/4$

c)$Pn = \rho^n P0$

c)$P1 = (3/4)^1 (1/4) = 3/16$

Para s = 2

a)$\rho = \lambda / s\mu = 3/(2)(4) = 3/8$

b)$$P0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \left\{\frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \left(\frac{1}{1-(\lambda/s\mu)}\right)\right\}}$$

b)$$P0 = \frac{1}{\left\{\frac{(3/4)^0}{0!} + \frac{(3/4)^1}{1!} + \left\{\frac{(3/4)^2}{2!} \cdot \frac{1}{1-3/(2)(4)}\right\}\right\}} = 5/11$$

c) $$Pn = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0$$

$d)P3= (3/4)^3 (1/4)=.1054$

$c)P1= \frac{(3/4)^1}{1!} (5/11) = .3409$

$e)W= \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{4-3} = 1$

$d)\ P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{s!\ s^{n-s}} P_0$

$f)Wq= \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{3}{4(4-3)} = 3/4$

$d)\ P3= \frac{(3/4)^3}{2!\ 2^{3-2}} .(5/11) = .0479 \quad (n>s)$

$g)L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{3}{4-3} = 3$

? sustituyendo:

$e)\ W= Wq + \frac{1}{\mu} =$

$h)\ Lq= \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{(3)^2}{4(4-3)} = 2.25$

$f)\ Wq= \frac{Lq}{\lambda}$?

$i)\{ P\{W>1\} = e^{-\mu(1-\rho)t}$
$= e^{-4(1-3/4)(1)}$
$= .3678$

$h)Lq= \frac{P_0 (\lambda/\mu)^s \rho}{s!\ (1-\rho)^2}$

$j)\{ P\{Wq>1/2\} = \rho\, e^{-\mu(1-\rho)t} \}$
$= (3/4)\, e^{-4(1-3/4)(1/2)}$
$= .4548$

$h)Lq= \frac{(5/11)(3/4)^2 (3/8)}{2!\ (1-3/8)^2} = .1227$

Continuación incisos i) y j) para cuando s=2:

$i)P\{W>1\} = e^{-\mu t}\{ 1+ \frac{P_0 (\lambda/\mu)^s\ (1 - e^{-\mu t(s-1-\lambda/\mu)})}{s!\ (1-\rho)\quad s-1-(\lambda/\mu)} \}$

$i)P\{W>1\} = e^{-4(1)}\{ 1+\frac{5/11)\ (3/4)^2\ (1 - e^{-4(1)(2-1-3/4)}}{2!\ (1-3/8)\quad 2-1-(3/4)} \}$

$i)P\{W>1\} = .027$

?

$j)\ P\{Wq>1/2\}= [\ 1- P\{ Wq=0 \}]\ e^{-s\mu(1-\rho)t}$

utilizando fórmula:

$P\{ Wq=0 \}= \sum_{n=0}^{s-1} Pn$

$P\{ Wq=0 \}= \sum_{n=0}^{2-1} Pn = P0+P1$

$= 5/11+15/44$
$= .7954$

sustituyendo en fórmula inciso j):

$j)P\{Wq>1/2\} = [\ 1- .7954]]\ e^{-2(4)(1-3/8)(1/2)}$

$=.01677$

TABLA DE VALORES FINALES:

	S = 1	S = 2
a) ρ	3/4	3/8
b) P0	1/4	5/11
c) P1	3/16	15/44
d) P3	.1054	.0479
e) W	1	.2908
f) Wq	3/4	.0409
g) L	3	.8727
h) Lq	2.25	.1227
i)P{W>1}	.3678	.027
j) P{Wq>1/2}	.454	.0167

2.-Durante un período de 8 horas, llegaron 96 carros a la estación de servicio de Joe. Suponiendo que el tiempo entre llegadas tiene una distribución exponencial, use los datos proporcionados para estimar:

a) El valor de la frecuencia de llegadas .

b) El tiempo medio entre llegadas.

c) La razón media de llegadas

SOLUCION: MODELO I

Poblacion = ∞ Tasa de llegadas = cte. (λ)

Línea de espera = ∞ Tasa de servicio = cte. (μ)

Por medio de una regla de tres simple obtenemos que:

96 carros ------ 8 horas

χ ------ 1 hora

$\chi = \lambda =$ 12 carros/hora a) $\lambda =$ 12 carr/hr.

b) El tiempo medio entre llegadas

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{12} = 0.083333 \text{ horas}$$ b) $\frac{1}{\lambda} =$ 0.083333 hr.

c) La razon media de llegadas:

$\lambda n = \lambda =$ 12 carros/hora c) λn = 12car/hr.

3.-Determine el número de máquinas a que puede dar servicio un Mecánico económicamente si cada maquina requiere servicio una vez en 10 horas , y se lleva una hora para dar servicio a una máquina. Suponga que los costos por máquina son de $30 por hora y la M.O es $ 5 por / hora para cada mecánico.

SOLUCION : MODELO III

Poblacion = finita Tasa de llegadas = cte. (λ)

Línea de espera = finita Tasa de servicio = cte. (μ)

Datos:

λ= 10 HORA

μ= 1/HORA

s= 1 SERVIDOR

L($ 30) + 5(# mecánicos)= TOTAL

M= 1 1 Máquina (1 máquina - 1 mecánico

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{M}\left[\frac{M!}{(M-n)!}(\lambda/\mu)^n\right]}$$

P_O= .9091

$$L = M - \frac{\mu}{\lambda}(1 - P_0)$$

A)L= .0909 L(30) + 5(Mecánico)= Total

.0909(30)+ 5(1)= 7.7270 (1 Máquina - 1 Mecánico)

7.7270 * 2= 15.45 (1 Máquina - 2 Mecánicos)

2 Máquinas (1 Mecánico)

M = 2

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{M}\left[\frac{M!}{(M-n)!}(\lambda/\mu)^n\right]} = .8197$$

$$L = M - \frac{\mu}{\lambda}(1 - P_0)$$

L= .1970

L(30) + 5(# Mecánicos)= Total

.1970(30) +5(1)= 10.91

4.-.-Dos Mecánicos atienden 5 máquinas en un taller. Cada máquina descompone con una media de 3/ hora . El tiempo de reparación por máquina es exponencial con una distribución poisson con una media de 15 minutos.

A) Encuentre la probabilidad de que los dos mecánicos estén ociosos y la de que uno de ellos este desocupado.

B) Cuál es el # esperado de máquinas inactivas que no se le está dando servicio

C) Cuál es el # total de máquinas inactivas

SOLUCION : MODELO III

Poblacion = finita

Linea de espera = finita

Tasa de llegadas = cte. (λ)

Tasa de servicio = cte. (μ)

Datos:

$1/\mu$= 15 minutos

λ= 3 / hora

μ= 4/HORA

s= 2 SERVIDORES

M= 5 Máquinas

$$P_{O=}\frac{I}{\sum_{n=0}^{S-1}\frac{M!}{(M-n)!n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}+\sum_{n=s}^{M}\frac{M!}{(M-n)!s!s^{n-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}}$$

$$P_{O=}\frac{1}{(5-0)!(0!)}\left(\frac{3}{4}\right)^{o}+\frac{5!}{(5-1)!}\left(\frac{3}{4}\right)^{1}+\left[\frac{5!}{(5-2)!2!2^{0}}\left(\frac{3}{4}\right)^{2}+\frac{5!}{(5-3)!2!2^{1}}\left(\frac{3}{4}\right)^{3}+\frac{5!}{(5-4)!2!2}\right.$$

$$+\frac{5!}{(5-5)!2!2^{3}}\left(\frac{3}{4}\right)^{5}$$

A)Po= 4.32%

$$P_n = Po\frac{M!}{(M-n)!n!}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$$

$$P_1 = .0432\frac{5!}{(5-1)!1!}\left(\frac{3}{4}\right)^{1}$$

A)P1= 16.14%

$$P3 = Po\frac{M!}{(M-n)!s!s^{n-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}$$

$$P3 = .0432\frac{5!}{(5-3)!2!2^{1}}\left(\frac{3}{4}\right)^{3} = 27.34\%$$

$$P4 = .0432\frac{5!}{(5-4)!2!2^{2}}\left(\frac{3}{4}\right)^{4} = 20.50\%$$

$$P5 = .0432\frac{5!}{(5-5)!2!2^{3}}\left(\frac{3}{4}\right)^{5} = 7.69\%$$

$$Lq = \sum_{n=s+1}^{M}(n-s)Pn$$

$$Lq = (3-2).2734 + (4-2).2050 + (5-2).0769$$

B)Lq=.9141

$$L = \sum_{n=o}^{S-1} nPn + Lq + s\left[1-\sum_{n=0}^{s=1} Pn\right]$$

$$L = \left[(0*.0432)+(1*.1614)\right]+.9141+2\left(1-\left((.0432+.1614)\right)\right)$$

C)L=2.6663

5.-Una cafeteria tiene una capacidad máxima de asientos para 50 personas. Los clientes llegan con una distribución Poisson a una tasa de 10 clientes/hr y son atendidos a una tasa de 12 clientes/hr.

a) ¿Cual es la probabilidad de que el siguiente cliente no comerá en la cafeteria en virtud de que ésta esta saturada?

b) Supóngase que tres clientes que llegan quieren sentarse juntos ¿cuál es la probabilidad de que no se puedan cumplir sus deseos (supóngase que pueden hacerse arreglos para sentarse juntos en tanto que haya 3 asiento desocupados en cualquier lugar de la cafeteria?

Datos:

$\lambda = 10$ clientes / hr

$\mu = 6$ clientes / hr

M = 50

Razon de utilizacion

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{12} = 0.83333$$

$$Pn = \left[\frac{1-\rho}{1-\rho^{M+1}}\right]\rho^{n}$$

$$P_{50} = \frac{1-0.8333}{1-0.8333^{50+1}}(0.8333)^{50}$$

$$\underline{P_{50} = 1.82\text{x}10^{-5}}$$

$$P_{48} = \frac{1-0.8333}{1-0.8333^{50+1}}(0.8333)^{48}$$

$$\underline{P_{48} = 2.65\text{x}10^{-5}}$$

6.- Dos mecánicos están atendiendo cinco máquinas en un taller. Cada máquina se descompone según una distribución Poisson con media de 3 por hora. El tiempo de reparacion por máquina es exponencial con media de 15 minutos.

a) Encuentre la probabilidad que los dos de ellos estén de ociosos y la de que uno de ellos esté desocupado.

b) ¿Cuál es el número esperado de máquinas inactivas a las que no se les da servicio?

SOLUCION : MODELO III

Poblacion = finita

Línea de espera = finita

Tasa de llegadas = cte. (λ)

Tasa de servicio = cte. (μ)

Datos:

S=2

M=5

λ=3ctes/hr

1/μ=15minutos(1hr/60minutos)=1/4hr

μ=4ctes/hr

a) P0=?, P1=?

b)Wq=?

$$po = \frac{1}{\left\{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\frac{M!}{(M-n)!n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}\right] + \sum_{n=s}^{M}\left[\frac{M!}{(M-n)!s!s^{n-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}\right]\right\}}$$

$$P0 = \frac{1}{\left\{\sum_{n=0}^{2-1=1}\left[\frac{5!}{(5-0)!0!}\left(\frac{3}{4}\right)^{0} + \frac{5!}{(5-1)!1!}\left(\frac{3}{4}\right)^{1}\right] + \sum_{n=2}^{5}\left[\begin{array}{c}\frac{5!}{(5-2)!2!2^{(2-2)}}\left(\frac{3}{4}\right)^{2} + \frac{5!}{(5-3)!2!2^{(3-2)}}\left(\frac{3}{4}\right)^{3} + \\ \frac{5!}{(5-4)!2!2^{(4-2)}}\left(\frac{3}{4}\right)^{4} + \frac{5!}{(5-5)!2!2^{(5-2)}}\left(\frac{3}{4}\right)^{5}\end{array}\right]\right\}}$$

a) $P0 = \dfrac{1}{1+3.75+5.625+6.3281+4.7461+1.7798} = 0.043$

$$Pn = Po\frac{M!}{(M-n)!n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n} \quad \text{si } 0<n<s \Rightarrow 0<1<2$$