17.-.- Considere el modelo.

a) Suponga que sólo hay un servidor y que el tiempo esperado de servicio es exactamente un minuto. Compare *L* para los casos en que la tasa media de llegada es: 0.5, 0.9 y 0.99 clientes por minuto, respectivamente. Haga lo mismo para Lq, W, Wq y P{W>5}.

b) Ahora suponga que se cuenta con dos servidores y que el tiempo esperado de servicio es exactamente dos minutos. Haga las mismas comparaciones que en el inciso a.

SOLUCION : MODELO I

Poblacion = ∞ | Tasa de llegadas = cte. (λ)

Línea de espera = ∞ | Tasa de servicio = cte. (μ)

Datos:

s = 1, $1/\mu = 1$ min

a) Comparar *L* cuando
$\lambda = 0.5$ clientes/min.
$\lambda = 0.9$ clientes/min.
$\lambda = 0.99$ clientes/min.
Haga lo mismo para: Lq, W, Wq y P{W>5}

b) s = 2
$1/\mu = 2$ min
Haga las mismas comparaciones que en el inciso a.

Respuestas del inciso (a).

$1/\mu = 1$ min. =====> $\mu = 1/1$min.(60min./1hr.) = 60 clientes/hrs.

<u>Para $\lambda = 0.5$</u>

$\lambda = 0.5$ clientes/min.(60 min./1 hr.) = <u>30 Clientes/hr</u>.

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{30}{60 - 30} = 1 \text{ cliente.}$$

$$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{30^2}{60(60 - 30)} = 0.5 \text{ cliente.}$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{60 - 30} = 0.0333 \text{ hora.}$$

$$Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{30}{60(60 - 30)} = 0.016666 \text{ hora.}$$

$$P\{W>t\} = e^{-\mu(1-\rho)t} = e^{-60(1-(30/60))5} = \underline{7.175 \text{ X}10^{-66}}$$

<u>Para $\lambda = 0.9$</u>

$\lambda = 0.9$ clientes/min.(60 min./1 hr.) = <u>54 Clientes/hr</u>.

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{54}{60 - 54} = 9 \text{ cliente.}$$

$$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{54^2}{60(60-54)} = 8.1 \text{ cliente.}$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{60 - 54} = 0.16666 \text{ hora}$$

$$Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{54}{60(60-54)} = \underline{0.15 \text{ hora.}}$$

$$P\{W>t\} = e^{-\mu(1-\rho)t} = e^{-60(1-(54/60))5} = \underline{9.357 \text{ X}10^{-14}}$$

<u>Para $\lambda = 0.99$</u>

$\lambda = 0.99$ clientes/min.(60 min./1 hr.) = <u>59.4 Clientes/hr</u>.

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{59.4}{60 - 59.4} = 99 \text{ cliente.}$$

$$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{59.4^2}{60(60-59.4)} = 98.01 \text{ cliente.}$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{60-59.4} = 1.6666 \text{ hora.}$$

$$Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{59.4}{60(60-59.4)} = \underline{1.65 \text{ hora.}}$$

$$\mathbf{P\{W>t\} = e^{-\mu(1-\rho)t} = e^{-60(1-(59.4/60))5} = \underline{0.04978}}$$

Respuestas del inciso (b). $s = 2$

$1/\mu = 2$ min. =====> $\mu = 1/2$min.(60min./1hr.) = 30 clientes/hrs.

Para $\lambda = 0.5$

$\lambda = 0.5$ clientes/min.(60 min./1 hr.) = 30 Clientes/hr.

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \left\{ \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \left(\frac{1}{1-(\lambda/s\mu)} \right) \right\}}$$

$$P_0 = \frac{1}{\frac{(30/30)^0}{0!} + \frac{(30/30)^1}{1!} + \left\{ \frac{(30/30)^2}{2!} \cdot \left(\frac{1}{1-(30/2(30))} \right) \right\}} = \frac{1}{1 + 1 + (0.5 \text{ X } 2)}$$

$P_0 = 0.33333$

$$L_q = \frac{P_0 (\lambda/\mu)^s \rho}{s!\,(1-\rho)^2} = \frac{0.3333(30/30)^2\ (30/(30X2))}{2!\,(1-0.5)^2} = 0.3333 \text{ clientes.}$$

$L = L_q + \lambda/\mu = 0.3333 + 30/30 = $ 1.3333 clientes

$W_q = L_q/\lambda = 0.333/30 = $ 0.0111 hrs.

$W = W_q + 1/\mu = 0.0111 + 1/30 = 0.0444$ hrs.

$$P\{W>t\} = e^{-\mu t}\left\{ 1 + \frac{P_0 (\lambda/\mu)^s}{s!\,(1-\rho)} \ \frac{(1 - e^{-\mu t\,(s-1-\lambda/\mu)})}{s-1-(\lambda/\mu)} \right\}$$

$$P\{W>5\} = e^{-(30 \text{ X } 5)}\left\{ 1 + \frac{0.3333\,(30/30)^2}{2!\,(1-0.5)} \ \frac{(1 - e^{-(30 \text{ X } 5)\,(2-1-30/30)})}{2-1-(30/30)} \right\}$$

$P\{W>5\} = 7.175 \text{ X } 10^{-66} (1 + (0.3333 \text{ X } 0)) = 7.175 \text{ X } 10^{-66}$

Para $\lambda = 0.9$

$\lambda = 0.9$ clientes/min.(60 min./1 hr.) = 54 Clientes/hr.

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \left\{ \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \left(\frac{1}{1-(\lambda/s\mu)} \right) \right\}}$$

$$P_0 = \frac{1}{\frac{(54/30)^0}{0!} + \frac{(54/30)^1}{1!} + \left\{ \frac{(54/30)^2}{2!} \cdot \left(\frac{1}{1-(54/2(30))} \right) \right\}} = \frac{1}{1 + 1.8 + (1.62X10)}$$

$P_0 = 0.05263$

$$L_q = \frac{P_0 (\lambda/\mu)^s \rho}{s!\,(1-\rho)^2} = \frac{0.05263(54/30)^2\ (54/(30X2))}{2!\,(1-0.9)^2} = 7.669 \text{ clientes.}$$

$L = L_q + \lambda/\mu = 7.669 + 54/30 = $ 9.46908 clientes

$W_q = L_q/\lambda = 7.669/54 = $ 0.1420 hrs.

$W = W_q + 1/\mu = 0.1420 + 1/30 = 0.1753$ hrs.

$$P\{W>t\} = e^{-\mu t}\left\{ 1 + \frac{P_0 (\lambda/\mu)^s}{s!\,(1-\rho)} \ \frac{(1 - e^{-\mu t\,(s-1-\lambda/\mu)})}{s-1-(\lambda/\mu)} \right\}$$

$$P\{W>5\} = e^{-(30 \text{ X } 5)}\left\{ 1 + \frac{0.05263\,(54/30)^2}{2!\,(1-0.99)} \ \frac{(1 - e^{-(30 \text{ X } 5)\,(2-1-54/30)})}{2-1-(54/30)} \right\}$$

$P\{W>5\} = 7.175 \text{ X } 10^{-66} (1 + (8.526 \text{ X } 1.630 \text{ X} 10^{52})) = 9.9713 \text{ X } 10^{-13}$

Para $\lambda = 0.99$

$\lambda = 0.99$ clientes/min.(60 min./1 hr.) = 59.4 Clientes/hr.

$$P_0 = \frac{1}{\frac{(59.4/30)^0}{0!} + \frac{(59.4/30)^1}{1!} + \left\{\frac{(59.4/30)^2}{2!} \cdot \left(\frac{1}{1-(59.4/2(30))}\right)\right\}} = \frac{1}{1 + 1.98 + (1.9 X 100)}$$

$P_0 = 5.025 X 10^{-3}$

$$L_q = \frac{P_0 (\lambda/\mu)^s \rho}{s!\,(1-\rho)^2} = \frac{5.025 X 10^{-3} (59.4/30)^2 (59.4/(30X2))}{2!\,(1-0.99)^2} = 97.515 \text{ clientes.}$$

$L = L_q + \lambda/\mu = 97.515 + 59.4/30 = \underline{99.495 \text{ clientes}}$

$W_q = L_q/\lambda = 97.515/59.4 = \underline{1.6416 \text{ hrs.}}$

$W = W_q + 1/\mu = 1.6416 + 1/30 = 1.6749 \text{ hrs.}$

$$P\{W>t\} = e^{-\mu t}\left\{1 + \frac{P_0 (\lambda/\mu)^s}{s!\,(1-\rho)} \cdot \frac{(1 - e^{-\mu t(s-1-\lambda/\mu)})}{s-1-(\lambda/\mu)}\right\}$$

$$P\{W>5\} = e^{-(30 X 5)}\left\{1 + \frac{5.025 X 10^{-3} (59.4/30)^2}{2!\,(1-0.99)} \cdot \frac{(1 - e^{-(30 X 5)(2-1-59.4/30)})}{2-1-(59.4/30)}\right\}$$

$P\{W>5\} = 7.175 X 10^{-66} (1 + (0.98500 X 7.08048 X 10^{63})) = \underline{0.050040}$

18.- Un banco emplea cuatro cajeras para servir a sus clientes. Los clientes llegan de acuerdo con un proceso Poisson con una tasa media de 3 por minuto. Si un cliente encuentra todas las cajas ocupadas, se une a una cola a la que dan servicio todas las cajeras, es decir, no hay colas frente a cada cajera, si no que esperan en una cola la primera cajera que se desocupa. El tiempo para realizar las transacciones entre la cajera y el cliente tiene una distribución exponencial con media de un minuto.

a) Encuentre la distribución de probabilidad de estado estable para el número de clientes en el banco.

b) Encuentre: L_q, W_q, W y L.

Modelo I

Datos:

s = 4

$1/\mu = 1$ min =====> $\mu = 1/1$min.(60min./1hr.) = $\underline{60 \text{ clientes/hrs.}}$

$1/\lambda = 3$ min. =====> $\lambda = 1/3$ clientes/min.(60 min./1 hr.) = $\underline{20 \text{ Clientes/hr.}}$

a) P_0 = ?

b) L_q, W_q, W y L.

Solución del inciso (a):

$\underline{\rho = \lambda/(s\mu) = 20/(4X60) = 0.083333}$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \left\{\frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \left(\frac{1}{1-(\lambda/s\mu)}\right)\right\}}$$

$$P_0 = \frac{1}{\left\{\frac{(20/60)^0}{0!} + \frac{(20/60)^1}{1!} + \frac{(20/60)^2}{2!} + \frac{(20/60)^3}{3!}\right\} + \left\{\frac{(20/60)^4}{4!} \cdot \left(\frac{1}{1-(20/(4 X 60))}\right)\right\}}$$

$$P_0 = \frac{1}{(1 + 0.3333 + 0.0555 + 0.00617) + (1.0914)} = \frac{1}{1.3952}$$

$P_0 = 0.7167$

Solución del inciso (b):

$$L_q = \frac{P_0 (\lambda/\mu)^s \rho}{s!\,(1-\rho)^2} = \frac{0.7167(20/60)^4 (20/(4X60))}{2!\,(1-0.083333)^2} = 3.65 X 10^{-5} \text{ clientes.}$$

$L = L_q + \lambda/\mu = 3.65 X 10^{-5} + 20/60 = \underline{0.3333 \text{ clientes}}$

$W_q = L_q/\lambda = 3.65 X 10^{-5}/20 = \underline{1.825 X 10^{-6} \text{ hrs.}}$

$W = W_q + 1/\mu = 1.825 X 10^{-6} + 1/60 = 0.016666 \text{ hrs.}$

19.- Una oficina de boletos de una aerolínea tiene dos agentes que contestan las llamadas para hacer reservaciones. Además, una llamada sepuede poner en espera hasta que uno de los agentes se desocupa para tomarla. Si las tres líneas (las de ambos agentes y la de espera) están ocupadas, el cliente potencial obtiene tono de ocupado y se supone que hace llamada a otra oficina de boletos y que la venta se pierde. Las llamadas y los intentos de llamadas ocurren aleatoriamente (es decir, de acuerdo con un proceso poisson) a una tasa media de 15 por hora. La duración de una conversación telefónica tiene una distribución exponencial con media de 4 minutos.

a) Encuentre la probabilidad de estado estable de que:

1) Un cliente pueda hablar de inmediato con un agente.

2) El cliente quede en espera.

3) El cliente obtenga el tono de ocupado.

MODELO II

Datos:

$s = 2$

$M = 3$

$\lambda = 15$ clientes/hr.

$1/\mu = 4$ min =====> $\mu = 1/4$min.(60min./1hr.) = 15 clientes/hrs.

a) $P_0 = ?$

b) $P_2 = ?$

c) $P_3 = ?$

$\rho = \lambda/(s\mu) = 15/(4X15) = 0.25$

Solución al inciso (a):

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{s} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \left\{\frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \sum_{n=s+1}^{M} \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s}\right\}}$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \left\{\frac{(15/15)^1}{1!} + \frac{(15/15)^2}{2!}\right\} + \left\{\frac{(15/15)^2}{2!} \cdot \left(\frac{15}{15 X 2}\right)^{3-2}\right\}}$$

$$P_0 = \frac{1}{(1 + 1 + 0.5 +) + (0.5 X 0.5)}$$

$P_0 = 0.3636$

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 = \frac{(15/15)^1}{1!} (0.3636) = \underline{0.3636} = P_1$$

$\underline{P_0 + P_1} = 0.3636 + 0.3636 = \underline{0.7272}$

Solución al inciso (b):

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 = \frac{(15/15)^2}{2!} (0.3636) = \underline{0.1818} = P_2$$

Solución al inciso ©:

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 = \frac{(15/15)^3}{3!} (0.3636) = \underline{0.0909} = P_3$$

20.- Se están haciendo planes para abrir un pequeño autolavado y el dueño debe decidir cuánto espacio conviene asignar a los autos que esperan. Se estima que los clientes llegarán de manera aleatoria (es decir, de acuerdo con un proceso poisson) con tasa media de uno cada 4 minutos, a menos que el área de espera esté llena, en cuyo caso los clientes que llegan llevarán su automovil a otra parte. el tiempo total que se puede atribuir al lavado de un carro tiene una distribución exponencial con media de 3 minutos. Compare la fracción de los clientes potenciales que se pierden por falta de espacio de espera si se proporcionan:

a) Cero espacios (sin incluir el lugar donde se lavan los carros).
b) Dos espacios.
c) Cuatro espacios.

Modelo II

Datos:

$s = 1$

$1/\mu = 3$ min =====> $\mu = 1/3$min.(60min./1hr.) = 20 Clientes/hrs.

$1/\lambda = 4$ min. =====> $\lambda = 1/4$ clientes/min.(60 min./1 hr.) = 15 Clientes/hr.

a) $P_1 = ?$
b) $P_3 = ?$
c) $P_5 = ?$

$\rho = \lambda/(s\mu) = 15/(1X20) = 0.75$

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-(\rho)^{M+1}} = \frac{1-0.75}{1-(0.75)^{1+1}} = 0.5714$$

Solución al inciso (a):

$$P_n = \left(\frac{1-\rho}{1-(\rho)^{M+1}}\right)\rho^n = \left(\frac{1-0.75}{1-(0.75)^{1+1}}\right)(0.75)^1 = 0.4285 = P_1$$

Solución al inciso (b):

$$P_n = \left(\frac{1-\rho}{1-(\rho)^{M+1}}\right)\rho^n = \left(\frac{1-0.75}{1-(0.75)^{3+1}}\right)(0.75)^3 = 0.1542 = P_3$$

Solución al inciso ©:

$$P_n = \left(\frac{1-\rho}{1-(\rho)^{M+1}}\right)\rho^n = \left(\frac{1-0.75}{1-(0.75)^{5+1}}\right)(0.75)^5 = 0.077 = P_5$$

21.-Un químico que ensaya diversos productos de diferentes unidades de una refinería. Este tiempo y el equipo tienen un costo de \$18 dls. la hora. El químico puede realizar 3 ensayos por hora. Una unidad de reparación tiene un tiempo medio entre requerimientos de ensayo de 2 hrs.

Cuando la muestra requiere más de 1 hora, la utilización adicional de equipo cuesta \$100 dls. ¿Cuántos químicos deben emplearse si 6 unidades funcionan continuamente?

Modelo III

Datos:

$\mu = 3$ Clientes/hrs.

$1/\lambda = 2$ hrs. =====> $\lambda = 1/2$ clientes/hrs.= 0.5 Clientes/hr.

\$/hora. = \$18

Si W>1hrs. entonces se cobra un costo adicional de \$100

M = 6

s = ?

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{M}\left\{\frac{M!}{(M-n)!}\cdot(\lambda/\mu)^n\right\}}$$

$$P_0 = \frac{1}{\left\{\frac{6!}{(6-0)!}.(.5/3)^0 + \frac{6!}{(6-1)!}.(.5/3)^1 + \frac{6!}{(6-2)!}.(.5/3)^2 + \frac{6!}{(6-3)!}.(.5/3)^3 + \frac{6!}{(6-4)!}.(.5/3)^4 + \frac{6!}{(6-5)!}.(.5/3)^5 + \frac{6!}{(6-6)!}.(.5/3)^6\right\}}$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + 1 + 0.83333 + 0.5555 + 0.27777 + .09259 + 0.01543}$$

$P_0 = 0.2649$

$L = M - \{(\mu/\lambda)(1 - P_0)\}$

$L = 6 - (3/0.5)(1 - .2649) = \underline{1.589}$

$\bar{\lambda} = \lambda(M - L) = 0.5(6 - 1.589) = 2.205$

$W = l/\bar{\lambda} = 1.589/2.205 = \underline{.7205}$