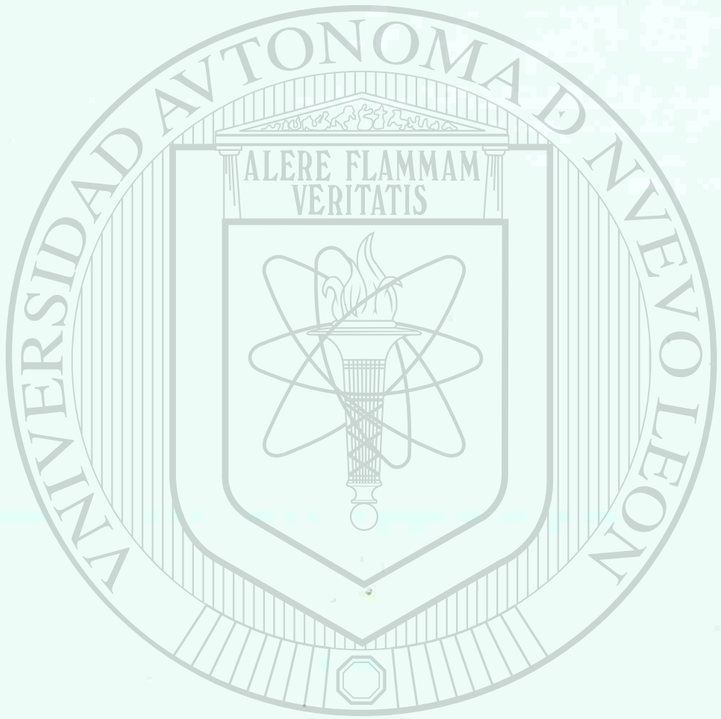
CAPILLA ALFONSINA

QA371
.P76
c.2

PROBLEMARIO DE ECUACIONES DIFERENCIALES

1020155424



UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

3119

1 FUNI

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

PROBLEMARIO DE ECUACIONES DIFERENCIALES

COORDINACION DE CIENCIAS BASICAS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

QA371
.P76
c.2

995666

FONDO UNIVERSITARIO

En este curso de ecuaciones diferenciales aplicaremos los conceptos estudiados anteriormente en cálculo diferencial y cálculo integral.

En otras cosas, el curso consiste en integrar las ecuaciones diferenciales, por lo tanto, se les recomienda repasar todo lo referente a integración, para que les sea más sencillo al identificar el método de integración a utilizar para resolver las integreales de la ecuación diferencial.

Esta curso se puede dividir en tres partes principales:

1.- Introducción a las ecuaciones diferenciales.

2.- Métodos para la obtención de la solución general y particular de una ecuación diferencial de primer orden y grado.

3.- Obtención de la solución de ecuaciones diferenciales de primer orden o mayor utilizando el operador D.

UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Espinoza 29/05/07

1.-INTRODUCCION A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES.

a) Obtención del orden y grado de una ecuación diferencial.

DEFINICION DE ECUACION DIFERENCIAL.- Una ecuación diferencial es una ecuación que contiene diferenciales o derivadas. Una ecuación diferencial ordinaria es aquella ecuación que contiene diferneciales totales, derivadas totales o ambas, pero no hay derivadas parciales.

DEFINICION DE ORDEN DE UNA ECUACION DIFERENCIAL.- El orden de una ecuación diferencial es el orden de la derivada de mayor orden que interviene en ella.

EJEMPLOS:

1) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 7x^5 - 8$

SOLUCION : Es una ecuación de PRIMER ORDEN dado que tiene una primera derivada.

2) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 5 \text{ sen } 3x$

SOLUCION : Es una ecuación diferencial de SEGUNDO ORDEN porque aparece una segunda derivada.

3) $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^2 - 5\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 = 3x^2 + 7$

SOLUCION : Es una ecuación diferencial de CUARTO ORDEN porque la cuarta derivada es la de mayor orden de las que aparecen en la ecuación diferencial.

4) $\frac{d^2y}{dx^2} + 7x\left(\frac{dy}{dx}\right)^6 = x^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3$

SOLUCION : Es una ecuación diferencial de SEGUNDO ORDEN dada que la segunda derivada es la de mayor orden en la ecuación.

Definición de grado de una ecuación diferencial : El grado de una ecuación diferencial, es el exponente al que está elevada la derivada de mayor orden que hay en la ecuación diferencial

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

R Espinoza 29/05/07

EJEMPLOS.

Determine el orden y el grado de las siguientes ecuaciones diferenciales.

1.- $\sqrt{\frac{dy}{dx}} = 7x^2 + 1$

SOLUCION.- Como la derivada se encuentra dentro de una raíz cuadrada, tendre- mos que eliminarla elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$\sqrt{\frac{dy}{dx}} = 7x^2 + 1$ Elevando al cuadrado.

$\frac{dy}{dx} = \left(7x^2 + 1\right)^2$ Primer orden y primer grado

2.- $\sqrt{\frac{d^2y}{dx^2} + x} = \sqrt[3]{\frac{dy}{dx}}$

SOLUCION.- Cuando las dos derivadas tienen radical, hay que elevar a la mínima potencia con la cual se eliminan los radicales, si los tipos de raíz son múlti- plos o submúltiplos uno de otro, entonces elevaremos ambos lados de la ecuación a la potencia con que se elimina el radical mayor, si no son múltiplos, entonces elevaremos ambos lados al producto de los números que denotan la raíz (si apareciera raíz cuadrada y raíz cúbica se elevarían a la sexta).

$\sqrt{\frac{d^2y}{dx^2} + x} = \sqrt[3]{\frac{dy}{dx}}$ Elevando a la sexta potencia

$\left(\frac{d^2y}{dx^2} + x\right)^3 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ Segundo orden y Tercer grado.

3.- $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{1/3} = k\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{5/2}$

SOLUCION.- Eliminaremos las potencias fraccionarias (raices) elevando a la sexta en ambos lados.

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{1/3} = k\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{5/2}$ Elevando a la sexta potencia

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = k^6\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{15}$ Segundo orden y Segundo grado.

4) $\left(\frac{dy}{dx} + 5y\right)^{1/4} = \sqrt{\frac{d^2y}{dx^2}}$

SOLUCION :Como los tipos de raíces son múltiplos (4 de 2) elevaremos ambos lados al múltiplo, es decir a la 4a.

$\left(\frac{dy}{dx} + 5y\right)^{1/4} = \sqrt{\frac{d^2y}{dx^2}}$ Elevando a la 4a

$\frac{dy}{dx} + 5y = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$ Segundo Orden y Segundo Grado

5) $(y'')^5 + 3(y')^7 = 5x^2 - 9$ Segundo orden y Quinto grado

SOLUCION: Como

$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$; $y' = \frac{dy}{dx}$

Entonces la ecuación es de segundo orden y quinto grado.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

PROBLEMAS PROPUESTOS PARA DETERMINAR EL ORDEN Y EL GRADO

1) $\frac{d^3y}{dx^3} = 3x\left(\frac{dy}{dx}\right) + 5y$

2) $\frac{d^2y}{dx^2} + 13\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + x^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^3$

3) $\frac{dy}{dx} + 16\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3 = 8x + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^5$

4) $\sqrt{\frac{d^3y}{dx^3}} - 5x = 8\left(\frac{dy}{dx}\right)$

5) $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{x-2}$

6) $\sqrt{\frac{d^2y}{dx^2} + 3x} = \sqrt[5]{\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3}$

7) $\sqrt{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 7x} = \left[81 + \frac{dy}{dx}\right]^{\frac{1}{4}}$

8) $\frac{d^3y}{dx^3} = \sqrt{\frac{dy}{dx}}$

9) $\left(\frac{d^5y}{dx^5}\right)^{\frac{1}{3}} = 8\left[1 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\right]^{\frac{5}{2}}$

10) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = 5 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^5$

SOLUCIONES:

1.- Tercer orden ; primer grado.
2.- Segundo orden ; primer grado.
3.- Tercer orden ; quinto grado.
4.- Tercer orden ; primer grado.
5.- Segundo orden ; primer grado.
6.- Tercer orden ; sexto grado.
7.- Segundo orden ; sexto grado.
8.- Tercer orden ; segundo grado.
9.- Quinto orden ; segundo grado.
10.- segundo orden ; tercer grado.

b) COMPROBACION DE LA SOLUCION DE UNA ECUACION DIFERENCIAL.

DEFINICION: Una solución de una ecuación diferencial ordinaria de dos variables es una relación sin derivadas,entre las variables que satisface a la ecuación. En este punto estudiaremos la forma en que podemos comprobar cuándo una ecuación es o no es solución de una ecuación diferencial dada.

METODO:

1.- Observando la ecuación diferencial, veremos que derivada o derivadas aparecen en está.
2.- Estas derivadas las encontramos al derivar la ecuación que se supone es la solución.
3.- La ecuación será solución cuando al sustituir el valor de las derivadas encontradas (paso 2), dentro de la ecuación diferencial, aparezca una identidad 0=0 al reducir la ecuación ya sustituida.

EJEMPLO : (En que sí es solución)
Comprobar que $y = x^2 + x + c$ es una solución de la ecuación diferencial, $\frac{dy}{dx} - 2x = 1$

SOLUCION:

1) Observando la ecuación diferencial vemos que aparece una primer derivada por lo tanto, encontramos su valor derivando la supuesta solución.

2) Derivando: $y = x^2 + x + c$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 1 \qquad (z)$$

3) Sustituyendo el valor de la derivada encontrada en la ecuación diferencial sustituyendo (z)

$\frac{dy}{dx} = 2x + 1$

reduciendo

$2x + 1 - 2x = 1 \qquad 0 = 0$

Conclusión: Por lo tanto $y = x^2 + x + c$ sí es solución de la ecuación diferencial.

$\frac{dy}{dx} - 2x = 1$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

EJEMPLO: (En que no es solución)

Comprobar que $y=x^2+c$ no es una solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} - 2x = 1$

1) Observando la ecuación diferencial vemos que aparece una primera derivada

2) Derivando:

$$y=x^2+c$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad (a)$$

3) Sustituyendo en (a) en la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x$$

$$2x \neq x$$

$$2 \neq 1$$

Como no quedó una identidad $0 = 0$

Conclusión:

$y = x^2+c$ No es solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = x$

NOTAS.-

1) Cuando en la ecuación diferencial aparezca la variable o función a que está igualada la supuesta solución, éste valor también lo sustituiremos al igual que el de las derivadas.

2) Cuando se tenga que aplicar derivación implícita para encontrar las derivadas, tenemos que tomar en cuenta que ninguna derivada encontrada deberá estar en función de otra derivada; si así fuera, hay que sustituir el valor de la derivada de menor orden.

PROBLEMAS RESUELTOS DE COMPROBACION DE LA SOLUCION DE UNA ECUACION DIFERENCIAL DADA

Determinar si cada ecuación es solución o no de la ecuación diferencial escrita en frente.

1) $y= A \operatorname{sen}(5x)+ B \cos(5x)$; $\frac{d^2y}{dx^2} + 25y=0$

SOLUCION:

a) Observación y obtención de las derivadas:

Como aparece la segunda derivada, la obtendremos de

$y= A \operatorname{sen}(5x) + B \cos(5x)$ Derivando

$$\frac{dy}{dx} = 5A\cos(5x) - 5B\operatorname{sen}(5x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -25A\operatorname{sen}(5x) - 25B\cos(5x)$$

(1) sustituyendo en la ecuación diferencial.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 25y = 0$$

(1) y y

tenemos:

$-25A\operatorname{sen}(5x) - 25B\cos(5x) + 25(A\operatorname{sen}5x\ B\cos5x) = 0$ reduciendo

$0=0$

b) CONCLUSION:

$y = A\operatorname{sen}(5x)+B\cos(5x)$ sí es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 25y = 0$$

2) $y=c(x-c)^2$; $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4xy\left(\frac{dy}{dx}\right) + 8y^2 = 0$

SOLUCION:

a) Observación, obtención de la derivadas y sustituciones:

como aparece la primera derivada

$y = c(x-c)^2$ derivando

$\frac{dy}{dx} = 2c(x-c)$ sustituyendo en la ecuación diferencial

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4xy\left(\frac{dy}{dx}\right) + 8y^2 = 0 \quad \text{sustituyendo} \quad \frac{dy}{dx} \quad y \quad y$$

$$\left[2c(x-c)\right]^3 - 4x\left[c(x-c)^2\right]\left[2c(x-c)\right] + 8\left[c(x-c)^2\right]^2 = 0 \quad \text{resolviendo y factorizando}$$

$$8c^3(x-c)^3 - 8c^2x(x-c)^3 + 8c^2(x-c)^4 = 0$$

$$8c^2(x-c)^3\left[c-x+(x-c)\right] = 0$$

como $c - x + x - c = 0$

entonces: $0=0$

b) CONCLUSION:

$y = c(x-c)^2$ sí es solución de la ecuación diferencial

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4xy\left(\frac{dy}{dx}\right) + 8y^2 = 0$$

3) $Ln(y)=c_1 e^x + c_2 e^{-x}$; $y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2 Ln(y)$

SOLUCION:

a)Observación, obtención de las derivadas y sustituciones:

Como la supuesta solución no esta igualada a y, obtendremos la primera y segunda derivada por derivación implícita.

$Ln(y) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ derivando

$\frac{dy}{dx} = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$ despejando $\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = (c_1 e^x - c_2 e^{-x})y$ derivando

$\frac{d^2y}{dx^2} = (c_1 e^x - c_2 e^{-x})\frac{dy}{dx} + y(c_1 e^x + c_2 e^{-x})$ sustituyendo $\frac{dy}{dx}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = (c_1 e^x - c_2 e^{-x})^2 y + y(c_1 e^x + c_2 e^{-x})$

sustituyendo $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$, $Ln(y)$ en la ecuación diferencial

$y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2 Ln(y)$ Sustituyendo.

$y\left[(c_1 e^x - c_2 e^{-x})y + y(c_1 e^x + c_2 e^{-x})\right] - \left[(c_1 e^x - c_2 e^{-x})y\right]^2$

$= y^2\left[(c_1 e^x + c_2 e^{-x})\right]$ Multiplicando.

$y^2(c_1 e^x - c_2 e^{-x})^2 + y^2(c_1 e^x + c_2 e^{-x})] - y^2(c_1 e^x - c_2 e^{-x})^2$

$= y^2(c_1 e^x + c_2 e^{-x})$ Reduciendo.

$y^2(c_1 e^x + c_2 e^{-x}) = y^2(c_1 e^x + c_2 e^{-x})$ Despejando

$0=0$

b) CONCLUSION:

$ln(y) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ sí es solución de la ecuación diferencial

$$y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2 ln(y)$$

4) $c(x^2 + y^2 - x^2y^2) = 1$; $(x - y^2x)\,dx + (1 - x^2)\,y\,dy = 0$

SOLUCION:

a) Formando la derivada: como la ecuación diferencial aparece con diferenciales la pasaremos a derivada dividiendo toda la ecuación entre dx y queda:

$$(x - y^2x) + (1 - x^2)\,y\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

b) Obtención de la derivada y sustitución: la supuesta solución se puede colocar $x^2 + y^2 - x^2y^2 = \frac{1}{c}$ para derivar implícitamente.

$2x + 2y\left(\frac{dy}{dx}\right) - 2x^2y\left(\frac{dy}{dx}\right) - 2xy^2 = 0$ Dividiendo entre 2 y agrupando.

$y(1 - x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right) = xy^2 - x$ Despejando $\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 - x}{y(1-x^2)}$ (1) Utilizando la ecuación diferencial

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$x - y^2x + (1-x^2)y\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ sustituyendo (1)

$x - y^2x + (1-x^2)y\left[\frac{xy^2 - x}{y(1-x^2)}\right] = 0$ reduciendo

$x - y^2x + xy^2 - x = 0$ realizando las restas

$0 = 0$

c) CONCLUSION:

$C(x^2 + y^2 - x^2y^2) = 1$ sí es solución de la ecuación diferencial

$(x - y^2x)dx + (1-x^2)ydy = 0$

PROBLEMAS PROPUESTOS PARA SER RESUELTOS

(1) $y = c^2 + cx^{-1}$; $y + xy' = x^4(y')^2$

(2) $e^{\cos x}(1 - \cos y) = c$; $\operatorname{sen} y\left(\frac{dy}{dx}\right) + \operatorname{sen} x \cos y = \operatorname{sen} x$

(3) $y = 8x^5 + 3x^2 + c$; $\frac{d^2y}{dx^2} - 6 = 160x^3$

(4) $y = c_1 \operatorname{sen} 3x + c_2 \cos 3x$; $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$

(5) $y = (x+c)e^{-x}$; $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$

(6) $y = ce^{5x}$; $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 300e^{5x}$

(7) $\operatorname{Ln} y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$; $y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2 \operatorname{Ln} y$

C) OBTENCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL A PARTIR DE LA SOLUCION GENERAL.

METODO:

1.- Observar el número de constantes de integración diferentes que aparecen en la solución general

2.- Derivar la solución general, tantas veces como constantes diferentes haya

3.-Tomando en cuenta el resultado de la última derivada se nos pueden presentar los siguientes casos:

a) Si en la última derivada ya no aparecen constantes de integración, esta serála ecuación diferencial de la solución general dada.

b) Si la última derivada contiene constantes de integración, habra que eliminarlas, utilizando las derivadas encontradas así como la solución general dada.

En la ecución diferencial no deben aparecer constantes de integración.

EJEMPLO DEL CASO a) .

Encuentre la ecuación diferencial cuya solución general es:

$y = x^2 + c$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

PROBLEMAS PROPUESTOS PARA SER RESUELTOS

(1) $y=c^2+cx^{-1}$; $y+xy'=x^4(y')^2$

(2) $e^{\cos x}(1-\cos y)=c$; $\operatorname{sen} y\left(\frac{dy}{dx}\right)+\operatorname{sen} x\cos y=\operatorname{sen} x$

(3) $y=8x^5+3x^2+c$; $\frac{d^2y}{dx^2}-6=160x^3$

(4) $y=c_1\operatorname{sen}3x+c_2\cos 3x$; $\frac{d^2y}{dx^2}+9y=0$

(5) $y=(x+c)e^{-x}$; $\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}$

(6) $y=ce^{5x}$; $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=300e^{5x}$

(7) $\operatorname{Ln} y=c_1\operatorname{sen}x+c_2\cos x$; $y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=y^2\operatorname{Ln} y$

SOLUCION:

a) Observación del número de constantes de integración diferentes:
Solo aparece una constante de integración por lo tanto, derivaremos una vez la solución general.

b) Derivadas:

$y=x^2+c_1$; $\frac{dy}{dx}=2x$

c) Conclusión:
Como en esta derivada no aparecen constantes de integración, esto quiere decir que $\frac{dy}{dx}=2x$ es la ecuación diferencial.

EJEMPLO DEL CASO b)

Encuentre la ecuación diferencial cuya solución general es $y=cx^2$

SOLUCION:

a)observación del número de constantes de integración:
Solo aparece una constante de integración por lo tanto

$y=cx^2$ (1)

$\frac{dy}{dx}=2cx$ (2)

b)Obtención de la ecuación diferencial:
Despejando c de (1) $c=\frac{y}{x^2}$ sustituyendo en (2)

$\frac{dy}{dx}=2\left(\frac{y}{x^2}\right)x$ simplificando y multiplicando por x, tenemos:

$x\left(\frac{dy}{dx}\right)=2y$

CONCLUSION:

$x\left(\frac{dy}{dx}\right)=2y$ es la ecuación diferencial dado que ya no aparecen constantes de integración.

NOTA: Existen soluciones generales en las cuales aparecen las constantes de integración en el ángulo de una función trigométrica, para este caso aplicaremos funciones trigométricas inversas antes de empezar el ejercicio con la finalidad de eliminar mas fácilmente la constante de integración.

EJEMPLO: Encuentre la ecuación diferencial cuya solución general es $y=\operatorname{tg}(x+c)$.

SOLUCION:

a)Observación: Como aparece c como ángulo entonces aplicaremos el concepto de la tangente inversa, es decir

$\tan^{-1}y=x+c$ esta será la ecuación con la que trabajaremos

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

b) Obtención de las derivadas:

$\tan^{-1} y = x + c$ (aplicando $D_x(\tan^{-1} u) = \frac{D_x u}{1+u^2}$

$\frac{y'}{1+y^2} = 1$ despejando

$y' = 1+y^2$

CONCLUSION:

Como no tiene constantes de integración por lo tanto $y' = 1+y^2$ es la ecuación diferencial.

PROBLEMAS RESUELTOS DE OBTENCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL

(A) Encontrar las ecuaciones diferenciales que tienen las siguientes soluciones generales.

1) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$

SOLUCION:

a) Observación y obtención de las derivadas:

Como aparecen dos constantes de integración diferentes c_1 y c_2 derivaremos la solución general dos veces.

$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$ (1)

$\frac{dy}{dx} = c_1 e^{x} - c_2 e^{-x}$ (2)

$\frac{d^2y}{dx^2} = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$ (3)

b) Obtención de la ecuación diferencial.

Para eliminar las constantes de integración podemos sustituir la (1) en (3) dado que es la misma relación de (3)

$\frac{d^2y}{dx^2} = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$ Sustituyendo

$\frac{d^2y}{dx^2} = y$

CONCLUSION:

$\frac{d^2y}{dx^2} = y$ es la ecuación diferencial de la solución general $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$

2) $y = e^{3x} + c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x$

SOLUCION:

a) Observación y obtención de las derivadas.

Como aparecen dos constantes por lo tanto derivaremos 2 veces

$y = e^{3x} + c_1 \operatorname{sen}(2x) + c_2 \cos(2x)$ (1)

$\frac{dy}{dx} = 3e^{3x} + 2c_1 \cos(2x) - 2c_2 \operatorname{sen}(2x)$ (2)

$\frac{d^2y}{dx^2} = 9e^{3x} - 4c_1 \operatorname{sen}(2x) - 4c_2 \cos(2x)$ (3)

b) OBTENCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL:

Podemos multiplicar la ecuación(1)por cuatro y hacerla simultánea con la(3) para eliminar las constantes.

(1) $4y = 4e^{3x} + 4c_1 \operatorname{sen}(2x) + 4c_2 \cos(2x)$

(3) $\frac{d^2y}{dx^2} = 9e^{3x} - 4c_1 \operatorname{sen}(2x) - 4c_2 \cos(2x)$

Por suma y resta.

$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 13e^{3x}$

CONCLUSION:

$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 13e^{3x}$ es la ecuación diferencial cuya solución general es

$y = e^{3x} + c_1 \operatorname{sen}(2x) + c_2 \cos(2x)$

3) $y = cx + 2c$

SOLUCION:

a) Observación y obtención de las derivadas: como es la misma c solo derivaremos una vez.

$y = cx + 2c$ (1) derivando ; $\frac{dy}{dx} = c$ (2)

b) Obtención de la ecuación diferencial. Sustituyendo la "c" de la ecuación (2) en la (1)

$y = cx + 2c$ sustituyendo (2) ; $y = x\left(\frac{dy}{dx}\right) + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)$ Agrupando ;

$y = (x+2)\left(\frac{dy}{dx}\right)$

UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

CONCLUSION:

$y = (x + 2)(dy/dx)$ es la ecuación diferencial.

4) $y = \text{sen}\,(8x + c)$

SOLUCION:

a) Observación: Como aparece c en el ángulo, aplicaremos el concepto de seno inverso y quedaría:

$\text{sen}^{-1}(y) = 8x + c$ con esta ecuación trabajaremos

b)Obtención de las derivadas. Como solo hay una constante derivaremos una vez:

$\text{sen}^{-1}(y) = 8x + c$ aplicando $D_x(\text{sen}^{-1}u) = \dfrac{D_x u}{\sqrt{(1-u^2)}}$

$\dfrac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1-y^2}} = 8$ despejando dy/dx

$\dfrac{dy}{dx} = 8\sqrt{1-y^2}$ elevando al cuadrado ambos lados nos queda:

$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 64(1-y^2)$

CONCLUSION:

$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 64(1-y^2)$ es la ecuación diferencial cuya solución general es $y = \text{sen}(8x + c)$

NOTA: Puede ser que se nos de un enunciado para encontrar con sus datos la ecuación de la solución general, en este caso los parámetros que tenga la ecuación que formaremos, serán tomados como las constantes de integración.

EJEMPLO: a) Encontrar la ecuación diferencial de cada uno de los sistemas de curvas siguientes.

1) Todas las rectas que pasan por el origen de coordenadas.

SOLUCION:

a) Obtención de la ecuación de la solución general. El dato es que son las rectas que pasan por el origen P(0,0) por lo tanto podemos utilizar la ecuación

$y - y_1 = m(x - x_1)$ sustituyendo el punto (x,y) por P(0,0)

$y - 0 = m(x - 0)$ reduciendo

$y = mx$ esta es la ecuación de la solución general

b) Observación y obtención de las derivadas : De $y = mx$, m es el parámetro, es decir , la constante de integración por lo tanto derivaremos una vez la ecuación.

$y = mx$ (1) derivando $\dfrac{dy}{dx} = m$ (2)

c) Obtención de la ecuación diferencial:

$y = mx$ sustituyendo m de (2) en (1)

$y = x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$

CONCLUSION: $y = x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ es la ecuación diferencial de todas las rectas que pasan por el origen.

2) Todas las circunferencias con centro (0, 0).

SOLUCION: a) Obtención de la ecuación del sistema solución general. El dato es que son las circunferencias con centro (0,0) su ecuación es :

$x^2 + y^2 = r^2$

b) Obtención de la derivada r es el parámetro, por lo tanto derivaremos una vez $x^2 + y^2 = r^2$ derivando

$2x + 2y\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = 0$ dividiendo entre 2

$x + y\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = 0$

CONCLUSION: $x + y\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = 0$ es la ecuación diferencial de todas las circunferencias con centro (0,0).

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

PROBLEMAS PROPUESTOS SOBRE OBTENCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL A PARTIR DE LA SOLUCION GENERAL

Obtenga la ecuación diferencial de las siguientes soluciones:

1) $y = 7x^2 + 8x + c$ 2) $y = c_1x^2 + c_2$ 3) $y = c_1 sen8x + c_2 cos8x$

4) $y = \tan(3x + c)$ 5) $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-5x}$ 6) $y = x \tan(x+c)$

7) $y = c_1 senh(x) + c_2 cosh(x)$ 8) $\frac{x^2}{c_1^2} = 1 - \frac{y^2}{c_2^2}$ 9) $y = x\, sen(x+c)$

10) $(x - c_1)^2 + y^2 = c_2^2$ 11) Todas las líneas rectas

12) Todas las circunferencias de radio = 1 y centro en el eje x

SOLUCIONES:

1) $\frac{dy}{dx} = 14x + 8$; 2) $x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{dy}{dx}$;

3) $\frac{d^2y}{dx^2} + 64y = 0$; 4) $\frac{dy}{dx} = 3(1 + y^2)$;

5) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right) - 15y = 0$; 6) $x\left(\frac{dy}{dx}\right) + y = x^2 + y^2$;

7) $\frac{d^2y}{dx^2} = y$; 8) $x\left[y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = y\left(\frac{dy}{dx}\right)$;

9) $x^2(y')^2 - 2xyy' + (1 + x^2)y^2 = x^4$; 10) $y(y'') + (y')^2 + 1 = 0$;

11) $y'' = 0$; 12) $y^2\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = 1$;

METODO PARA LA OBTENCION DE LA SOLUCION GENERAL DE LA ECUACION DIFERENCIAL

Como habíamos comentado anteriormente, la solución general de una ecuación diferencial es el resultado de integrar los términos de una ecuación diferencial.

Recordemos que para poder integrar debemos tener variables iguales a la vable del diferencial, al presentarsenos las ecuaciones diferenciales no siempre se cumple esta condición, es entonces cuando aplicaremos los " METODOS PARA LA OBTENCION DE LA SOLUCION GENERAL" con los cuales transformaremos la ecuación de tal forma que todos los términos contengan variables iguales a la variable del diferencial con lo cual ya podremos integrar. Antes de empezar con nuestro primer método veremos algunas reglas o identidades que utilizaremos en la mayoría de los métodos..

CONCEPTOS A UTILIZARSE EN LA OBTENCION DE LA SOLUCION GENERAL

1.- Procuraremos colocar la ecuación diferencial igualada a cero cuando ya vayamos a integrar, en donde haremos la $\int$ o igual a la constante de integración

2.- Como la constante de integración es un valor arbitrario aplicaremos las siguientes propiedades:

a) La constante de integración multiplicada por cualquier constante (IR) será igual a la constante de integración. Ejemplos:

(c)(3) = c ; (c)(-7) = c ; c(1/2) = c ; c(-3/4) = c

b) La constante de integración sumada o restada a cualquier constante (IR) será igual a la constante de integración. Ejemplos:

c+4 = c ; c-7 = c ; c+3/5 = c ; c - 2/7 = c ; c + 14/3 = c.

c) La constante de integración es igual a sí misma, también cuando aparezca $e^c = c$; $\ln(c) = c$; $c = \ln(c)$.

d) Se utilizarán las siguientes identidades y propiedades:

$e^{\ln(u)} = u$; $\ln(e^u) = u$; $e^{a+b} = e^a e^b$; $e^{a-b} = e^a/e^b$.

$\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$; $\ln(a) - \ln(b) = \ln(a/b)$; $(c)\ln(u) = \ln(u)^c$;

$\ln(a) + \ln(b) - \ln(c) - \ln(d) = \ln(ab/cd)$.

e) Ya que integramos, sí aparecen como resultado logaritmos naturales en la mayoría de los términos, aplicaremos sus propiedades para después exponenciar ambos lados de la solución para simplificar más - nuestra solución general.

OBJETIVO DE LOS "METODOS PARA LA OBTENCION DE LA SOLUCION GENERAL"

El objetivo será llegar a una ecuación diferencial en la que todos los términos se puedan integrar, es decir, tengan variables iguales a la variable de su diferencial.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

SOLUCION PARTICULAR

En ocasiones se nos darán valores para variables de la ecuación diferencial, esto quiere decir que se nos pide la solución particular de la ecuación diferencial.

Para encontrar la solución particular : Esta es igual a la solución general solo que en lugar que aparezca la constante de integración, sustituiremos ésta por su valor.

El valor de la constante de integración se encuentra sustituyendo los valores de las variables en la solución general y de ahí despejamos el valor de la constante de integración .

METODO DE SEPARACION DE VARIABLES

Este método se puede aplicar cuando en los factores que forman el coeficiente de cada diferencial, sólo aparece un tipo de variable en cada factor, es decir, que sólo tenga x o sólo y .

Ejemplo : $[\ f(x)\ g(y)\ ]\ dx + [\ h(x)\ k(y)\ ]\ dy = 0$

Una vez que identificamos que se pueden separar las variables, multiplicamos toda la ecuación por un factor, que será igual al inverso del producto de los factores que no permiten que se integren los términos.

En nuestro ejemplo el factor es : $\dfrac{1}{g(y)\ h(x)}$

Y tendremos :

$$\left\{[f(x)\ g(y)\ ]\ dx + [\ h(x)\ k(y)\ ]\ dy = 0\right\}\ \frac{1}{g(y)\ h(x)}$$

$$\frac{f(x)}{h(x)}\,dx + \frac{k(y)}{g(y)}\,dy = 0$$

Y ahora sí se pueden integrar todos los términos.

El resultado de dichas integrales será la solución general de nuestra ecuación. Procuremos que en la solución general no aparezcan fracciones, variables elevadas a potencias negativas y recordemos que si aparecen logaritmos naturales aplicaremos sus propiedades para después exponenciar.

PROBLEMAS RESUELTOS POR SEPARACION DE VARIABLES

Encuentre la solución de los siguientes ejercicios :

1) $2x\ (1 + y^2)\ dx - y\ (\ 1 + 2x^2)\ dy = 0$

Espinoza 29/05/07

SOLUCION:

a) Identificación: Checando los factores $2x$; $(1+y^2)$; y y $1+2x^2$ vemos que en cada uno de ellos sólo aparece un tipo de variable por lo tanto si se puede resolver por separación de variables.

b) Obtención del FACTOR: Observando los factores del dx, vemos que el factor $(1+y^2)$ no se puede integrar dado que tiene y , a si mismo los factores del dy vemos que $(1+2x^2)$ está en función de x por lo tanto no se puede integrar. entonces el FACTOR será el inverso del producto de esos factores.

$$\text{FACTOR} = \left[\frac{1}{(1+y^2)(1+2x^2)}\right]$$

c) Producto y obtención de la solución: Como ya tenemos el factor entonces lo multiplicamos por la ecuación.

$$\left[2x(1+y^2)dx - y(1+2x^2)dy=0\right]\left[\frac{1}{(1+y^2)(1+2x^2)}\right]$$

$$\frac{2xdx}{1+2x^2} - \frac{ydy}{1+y^2} = 0$$

Como son varariables iguales a la del diferencial, integramos

$$\int\frac{2xdx}{1+2x^2} - \int\frac{ydy}{1+y^2} = \int 0 \qquad (1)$$

d) Solución de integrales:

$$\int\frac{2xdx}{1+2x^2} \approx \int\frac{du}{u} = \text{Ln}|u|+c\ ;\ u=1+2x^2\ ;\ du=4xdx$$

Es completa multiplicando por 2

$$\int\frac{y\,dy}{1+y^2} \approx \int\frac{du}{u} = \text{Ln}|u|+c\ ;\ u=1+y^2\ ;\ du=2ydy$$

e) Obtención de la solución general: de (1)

$$1/2\int\frac{(2)2xdx}{1+2x^2} - 1/2\int\frac{(2)\,ydy}{1+y^2} = \int 0$$

integrando

$$\frac{1}{2}\text{Ln}|1+2x^2| - \frac{1}{2}\text{Ln}|1+y^2| = c$$

multiplicando por 2 y aplicando Lna-Lnb=Ln(a/b)

UANL UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$\text{Ln}\,\frac{1+2x^2}{1+y^2} = c$$ exponenciando

$$e^{\text{Ln}\frac{1+2x^2}{1+y^2}} = e^{c}$$ aplicando $e^{\text{Ln}\,u} = u$; $e^{c} = c$

$\frac{1+2x^2}{1+y^2} = c$ despejando $\boxed{1+2x^2 = c(1+y^2)}$ ESTA ES LA SOLUCUON GENERAL

2) $dr = r\,(ctg\theta)\,d\theta$

SOLUCION:

a) Identificación: checando los factores r y ctgø vemos que solo tienen un tipo de variable por lo tanto sí es de separación de variable.

b) Obtención del factor:

FACTOR = [1/r] Dado que la r es la que no se puede integrar con el dø

c) Producto y reducción:

[dr = r(ctgø)dø][1/r]

dr/r = ctgø dø igualando a cero ; dr/r - ctgø dø = 0 Ya podemos integrar.

$\int dr/r - \int ctg\theta\,d\theta = \int 0$. (1)

d) Solución de integrales:

$\int dr/r = \int du/u = \ln(u) + c$;

$\int ctg\theta\,d\theta = \int ctg\,u\,du = \ln|sen\theta| + c$;

e) Obtención de la solución general: De (1)

$\int dr/r - \int ctg\theta\,d\theta = \int 0$; $\ln|r| - \ln|sen\theta| = c$ Aplicando: $\ln(a) - \ln(b) = \ln(a/b)$

$\ln|\,r/sen\theta\,| = c$ (exponenciando) ; $e^{\ln(r/sen\theta)} = e^{c}$ Aplicando: $e^{\ln u} = u$; $e^{c} = c$.

$r/sen\theta = c$. (Despejando) ; $\underline{r = c\,sen\theta}$ Es la solución general

3) $4dy + ydx = x^2dy$

SOLUCION:

a) IDENTIFICACION: agrupando en base a los diferenciales $(4 - x^2)dy + y\,dx = 0$ como los factores sólo tienen un tipo de variable,si es de separación de variables.

b) OBTENCION DEL FACTOR:

$$\text{factor} = \frac{1}{(4 - x^2)y}$$

c) PRODUCTO:

$[(4 - x^2)dy + y\,dx = 0]\,[1/(4 - x^2)y]$ Multiplicando

$dy/y + dx/(4 - x^2) = 0$ Ya podemos integrar.

$\int dy/y + \int dx/(4 - x^2) = \int 0$ (1)

d) SOLUCION DE INTEGRALES:

$\int dy/y = \int du/u = \ln|u| + c$;

$\int dx/(4 - x^2) = \int du/a^2 - u^2 = 1/(2a)\ln(a+u/a-u) + c$

$u^2 = x^2$; $u=x$; $du=dx$; $a^2 = 4$; $a = 2$

e) OBTENCION DE LA SOLUCION GENERAL: de (1)

$\int dy/y + \int dx/(4 - x^2) = \int 0$

$\ln|y| + [1/2(2)]\,\ln(2+x/2-x) = c$ multiplicando por 4

$4\,\ln(y) + \ln(\,2+x\,/\,2-x\,) = c$ aplicando $c\,\ln(u) = \ln(u)^c$; $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$

$\ln[y^4(2+x)/2-x] = c$ exponenciando

$e^{\ln[y^4(2+x)/2-x]} = e^{c}$ aplicando $e^{\ln(u)} = u$; $e^{c} = c$

$y^4(2+x) = c(2-x)$ SOLUCION GENERAL

4) $d\theta/dr = 15 - 16\theta$

SOLUCION:

a) Identificación:
Pasaremos la ecuación diferencial en base a diferenciales multiplicando por el dr y queda la ecuación.
$d\theta = (15-16\theta)dr$; vemos que sí es de separación de variables

b) Obtención del factor:

$$\text{FACTOR} = \left[\frac{1}{15 - 16\theta}\right]$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

c) Producto:

$[d\phi = (15 - 16\phi)dr]\left[\frac{1}{15 - 16\phi}\right]$ Multiplicando e igualando a cero.

$\frac{d\phi}{15 - 16\phi} - dr = 0$ integramos

$\int\frac{d\phi}{15 - 16\phi} - \int dr = \int 0$ (1)

d) Solución de integrales:

$\int\frac{d\phi}{15-16\phi} = \int\frac{du}{u} = \ln|u| + c$

$u= 15-16\phi$; $du= -16\phi$ completamos. Multiplicando y dividiendo por (-16)

$\int dr = \int dx = x+c$; completa.

e) Obtención de la solución general: de (1)

$-\frac{1}{16}\int\frac{(-16)d\phi}{15-16\phi} - \int dr = \int 0$ Integrando.

$-\frac{1}{16}\ln|15-16\phi| - r = c$ Multiplicando por (-16) y despejando

$\ln(15-16\phi) = c - 16r.$ Exponenciando.

$e^{\ln(15-16\phi)} = e^{c-16r}$ Aplicando $e^{\ln(u)} = u$; $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$; $e^c = c$

$15 - 16\phi = \frac{c}{e^{16r}}$ Despejando c.

$\boxed{(15-16\phi)\, e^{16r} = c}$ SOLUCION GENERAL.

5) $2y\,dx + x^2dy = -\,dx$; $y = 7/2$ cuando $x = 1/\ln 2$

SOLUCION:

a) Identificación: como nos dan $y = \frac{7}{2}$; $x = \frac{1}{\ln(2)}$; nos piden solución particular.

Agrupando en base a los diferenciales

$(2y + 1)dx + x^2dy = 0$

b) Obtención del factor: $\text{FACTOR} = \left[\frac{1}{(2y+1)\,x^2}\right]$

c) Producto:

$\left[(2y + 1)dx + x^2dy = 0\right]\left[\frac{1}{(2y + 1)x^2}\right]$ Multiplicando y aplicando $\frac{dx}{x^2} = x^{-2}dx$

$x^{-2}dx + \frac{dy}{2y+1} = 0$ Integramos ; $\int x^{-2}dx + \int\frac{dy}{2y + 1} = \int 0$ (1)

d) Solución de integrales :

$\int x^{-2}dx \approx \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n + 1} + C$;

$\int\frac{dy}{2y + 1} \approx \int\frac{du}{u} = \ln|u| + C$; $u = 2y + 1$; $du = 2dy$; Completamos y multiplicando por 2

e) Obtención de la solución general: De (1)

$\int x^{-2}dx + \frac{1}{2}\int\frac{(2)\,dy}{2y + 1} = \int 0$

$-x^{-1} + \frac{1}{2}\ln|2y + 1| = C$; Multiplicando por 2 y despejando ln.

$\ln(2y + 1) = c + 2x^{-1}$; Exponenciando

$e^{\ln(2y+1)} = e^{c+2x^{-1}}$; aplicando $e^{\ln(u)} = u$; $e^{a+b} = e^a e^b$; $e^c = C$;

$2y + 1 = ce^{2/x}$; SOLUCION GENERAL

f) Obtención de la solución particular :

Sustituyendo $y = \frac{7}{2}$; $x = \frac{1}{\ln 2}$ en la solución general

$2y + 1 = ce^{2/x}$; Sustituyendo los valores de x y y

$2\left(\frac{7}{2}\right) + 1 = ce^{2\ln 2}$; Aplicando c ln u, $\ln u^c$, $e^{\ln u} = u$

$8 = c(4)$; $c = 2$; Sustituyendo c en la solución general;

$\boxed{2y + 1 = 2e^{2/x}}$ SOLUCION PARTICULAR

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

6) $x^3dy + xy\,dx = x^2dy + 2y\,dx$; $y = e$ cuando $x = 2$

SOLUCION:

a) Identificación: (nos piden la solución particular). Agrupando en base a los diferenciales y factorizando $x^2(x-1)dy + y(x-2)dx = 0$. Si es de separación de variable.

b) Obtención del factor: $\text{FACTOR} = \left[\frac{1}{x^2(x-1)(y)}\right]$

c) Producto de (1) por el factor:

$$\left[x^2(x-1)dy + y(x-2)dx = 0\right]\left[\frac{1}{x^2(x-1)(y)}\right]$$

$$\frac{dy}{y} + \frac{(x-2)\,dx}{x(x-1)} = 0 \; ; \quad \text{integramos}$$

$$\int\frac{dy}{y} + \int\frac{(x-2)\,dx}{x^2(x-1)} = \int 0 \; ; \quad (1)$$

d) Solución de integrales:

$\int\frac{dy}{y} \approx \int\frac{du}{u}$ Ln|u|+c; completa

$\int\frac{(x-2)dx}{x^2(x-1)}$ fracciones parciales

$\frac{x-2}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$ (a) Multiplicar por $x^2(x-1)$

$x - 2 = Ax(x-1) + B(x-1) + cx^2$ (2) Dando valores a x.

para x=0 en (2)

$0-2 = A(0)(0-1) + B(0-1) + c(0)^2$

$-2 = -B$; por lo tanto $B = 2$

para x=1 ; en (2)

$1-2 = A(1-1)+B(1)(1-1)+C(1)^2$

$-1 = C$

Si realizamos los productos en (2) aparecería A y C multiplicando a x^2 y aplicando la identidad con el coeficiente de x^2 del otro lado de la ecuación, tendríamos :

$A+C=0$; sustituyendo $C=-1$; $A-1=0$; $A=1$; sustituyendo A ; B ; C en (a)

$\frac{x-2}{x(x-1)} = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$ Integrando en ambos lados

$$\int\frac{(x-2)dx}{x^2(x-1)} = 2\int x^{-2}dx + \int\frac{dx}{x} - \int\frac{dx}{x-1} \qquad (3)$$

e) Obtención de la solución general: de (1)

$\int\frac{dy}{y} + \int\frac{(x-2)dx}{x^2(x-1)} = \int 0$ sustituyendo en (3)

$\int\frac{dy}{y} + 2\int x^{-2}dx + \int\frac{dx}{x} - \int\frac{dx}{x-1} = \int 0$

$Ln(y) - 2x^{-1} + Ln(x) - Ln(x-1) = c$; Aplicando $Lna+Lnb-Lnc = Ln(ab/c)$ y despejando.

$Ln\left[\frac{yx}{x-1}\right] = c + 2x^{-1}$ Exponenciando

$e^{Ln\left[\frac{yx}{x-1}\right]} = e^{c+2x^{-1}}$ Aplicando $e^{Lnu}=u$; $e^{a+b} = e^a e^b$; $e^c = c$

$\frac{yx}{x-1} = ce^{2x^{-1}}$ Despejando yx

$yx = ce^{2/x}(x-1)$ Solución general

f) Obtención de la solución particular:

Sustituyendo y=e; x=2 en la solución general

$yx = ce^{2/x}(x-1)$ sustituyendo y y X

$(e)(2) = ce^{2/2}(2-1)$ Como $e^{2/2} = e$ y despejando c

$c = 2$ sustituyendo este valor en la solución general

$\boxed{yx = 2e^{2/x}(x-1)}$ SOLUCION PARTICULAR

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

PROBLEMAS PROPUESTOS PARA RESOLVER POR SEPARACION DE VARIABLES

Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales

1) $5x^4dx + 20\,y^{19}dy = 0$

2) $2\,sen(2x)dx + 3e^{3y}dy = 2xdx$

3) $\frac{dr}{ds} = r$

4) $dx + dy + xdy = ydx$

5) $x\,sen\,(y)\,dx + (x^2+1)\cos(y)\,dy = 0$

6) $(xy + 2x + y + 2)dx + (x^2+2x+3)dy = 0$

7) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y^4+1}$

8) $xy^4dx + (y^2+2)e^{-3x}dy = 0$

9) $x\,sen\,(x)e^{-y}dx - ydy = 0$

10) $\frac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$

11) $\frac{dy}{dx} = \frac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$

12) $\frac{dy}{dx} = sen\,x\,(\cos 2y - \cos^2 y)$

13) $(x+1)dy + (y-1)dx = 0$; $y = 3$ cuando $x = 0$

14) $x^3\,dy + xydx = x^2\,dy + 2ydx$; $y = e$ cuando $x = 2$

SOLUCIONES

1) $x^5 + y^{20} = c$ 2) $e^{3y} = c + x^2 + \cos(2x)$ 3) $r = ce^s$ 4) $x + 1 = c(1-y)$

5) $(x^2+1)\,sen^2\,y = c$ 6) $(x^2+2x+3)(y+2)^2 = c$ 7) $5x(x+2) = c + 2y(y^4+5)$

8) $y^3\,e^{3x}(3x-1) = 9y^2 + 6 + cy^2$ 9) $e^y + sen x = ye^y + x\cos(x) + c$

10) $2e^{3x} + 3e^{-2y} = c$ 11) $(y+3)^5e^x = ce^y(x+4)^5$

12) $\cos(x) + ctg(y) = c$ 13) $(y-1)(x+1) = 2$

14) $xy = 2(x-1)e^{2/x}$

ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGENEAS

Primeramente estudiaremos la forma en que podemos identificar si una ecuación diferencial es homogénea o no homogénea.

Supongamos que se nos pide determinar si la ecuación.

$(3x^2 - 5xy + \frac{x^3}{y})dx + \left(5\sqrt{y^3x} - 3x^2 + \frac{5y^4}{x^2}\right)dy = 0$ es homogénea o no.

METODO: Para saber si es homogénea vamos a hacer que en la ecuación solo aparezca un tipo de variable esto es, vamos a llamar t a cualquier variable en la ecuación.

Analizaremos término a término toda la ecuación (los signos de + ó - son los que separan un término de otro). Una ecuación será homogénea cuando todos y cada uno de los términos tengan la variable t elevada a la misma potencia, si al menos un término no tiene t elevada a la misma potencia entonces la ecuación no es homogénea. Las constantes no se cambian por t. Los diferenciales no intervienen para determinar si es homogénea o no. Las constantes pueden cambiar por t.

Checando el ejemplo tenemos como términos.

$3x^2$; $5xy$; $\frac{x^3}{y}$; $5\sqrt{y^3x}$; $3x^2$; $\frac{5y^4}{x^2}$ sustituyendo x como y por t

t^2; $(t)(t) = t^2$; $\frac{t^3}{t} = t^2$; $\sqrt{t^3t} = t^2$; t^2; $\frac{t^4}{t^2} = t^2$ si observamos

todos los términos tienen t^2 por lo tanto si es homogénea.

NOTA:

1) Para homogéneas solamente, si aparece $\sqrt{(x^2+y^2)}$ como término este sería t es decir, se analizaría como la raíz de cada uno. Solo se aplica esto para checar si es homogénea, ya que se checó la ecuación se trabajará con $\sqrt{(x^2+y^2)}$

$\sqrt{(x^2+y^2)} = \sqrt{(t^2x^2+t^2y^2)} = t\sqrt{(x^2+y^2)} = t$ de homogénea.

2) En caso de que aparezcan términos de funciones como: $e^{x/y}$; sen (x/y); cos(y/x), etc. estos no representarán ninguna t ya que variable sobre variable sería igual a 1 con lo cual quedaría el término como constante a la cual no le corresponde t $e^{x/y} = e^{t/t} = e^1 = cte$; sen(x/y)

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

sen (t/t) = sen(1) = cte ; cos h (y/x) = cos h(t/t) = cte.
Ejemplo en que no es homogénea.

(x+3y+2) dx + (8x+3y)dy = 0

Los términos son x , 3y , 2 , 8x , 3y sustituyendo t; t; t; t^0; t;t; como en el tercer término no contiene t como los demás a la primera potencia entonces la ecuación no es homogénea.

METODO PARA LLEGAR A LA SOLUCION GENERAL

1) Checar que la ecuación sea homogénea.

2) Utilizar la sustitución

y = vx	ó	x = vy
dy = vdx + xdv		dx = vdy + ydv

Si el coeficiente del dx es más sencillo que el del dy se utiliza la sustitución x = vy y si el coeficiente del dy es más sencillo que el del dx entonces utilizaremos y = vx.
Si ambos coeficientes son del mismo grado de dificultad, podemos utilizar cualquiera de las dos sustituciones.

3) Sustituiremos la variable y el diferencial en la ecuación diferencial y después realizaremos los productos.

4) Resolvemos la ecuación diferencial resultante.

5) Volvemos a las variables originales.

PROBLEMAS RESUELTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGENEAS

1) (3x + 2y) dx + 2x dy = 0

SOLUCION:

a) Identificación:

Los términos son 3x , 2y y 2x sustituyendo x e y por t quedan t , t , y t como los tres quedaron con t elevada a la misma potencia por lo tanto la ecuación si es homogénea.

b) Determinación de la variable y diferencial que saldrán y sustituciones: como el dy tiene el coeficiente con el menor número de términos, entonces la variable que sale es la de este diferencial es decir, saldrá la variable y y el dy aplicando el segundo paso.

y = vx ; dy = v dx + x dv — sustituyendo y y dy en 1

$(3x+2vx)dx + 2x(vdx+xdv) = 0$ — multiplicando

$3xdx + 2vxdx + 2xvdx + 2x^2dv = 0$ — agrupando y factorizando

$x(3+4v)dx + 2x^2dv = 0$ (a)

c) Resolviendo por separación de variable

$\text{Factor} = \left[\frac{1}{(3+4v)x^2}\right]$ — Multiplicando por (a)

$\left[x(3+4v)dx + 2x^2\,dv = 0\right]\left[\frac{1}{(3+4v)x^2}\right]$ — Realizando el producto

$\frac{dx}{x} + \frac{2dv}{3+4v} = 0$ — integramos.

$\int\frac{dx}{x} + \int\frac{2dv}{3+4v} = \int 0$ (b)

d) Solución de integrales:

$\int\frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

$\int\frac{2dv}{3+4v} \simeq \int\frac{du}{u} = \ln|u| + c$

$u = 3 + 4u$; $du = 4du$; Completamos multiplicando y dividiendo por 2

Obtención de la solución general: de (b)

$\int\frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int\frac{(2)2\,dv}{3+4v} = \int 0$ — Integrando.

$\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|3+4v| = c$ — Multiplicando por 2 y aplicando (c)ln(u) = ln$(u)^c$

$\ln(x)^2 + \ln|3+4v| = c$ — Aplicando ln(a) + ln(b) = ln(ab)

$\ln[x^2(3+4v)] = c$ — Exponenciando.

$e^{\ln[x^2(3+4v)]} = e^{\ln(u)}$ — Aplicando $e^{\ln(u)} = u$; $e^c = c$.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$x^2(3+4v) = c$ De (b) $y = vx$; $v = \frac{y}{x}$ Sustituyendo v .

$x^2(3 + \frac{4y}{x}) = c$ Multiplicando la x^2

$3x^2 + 4xy = c$ Factorizando.

$\boxed{x(3x+4y) = c}$ SOLUCION GENERAL.

2.- $[x+y\ sen(y/x)]\ dx - x\ sen\ (y/x)\ dy = 0$

SOLUCION:

a) Identificación:

Los términos son x ; y sen(y/x) y x sen(y/x) sustituyendo x e y por t quedan t; t sen(t/t) = t y t sen (t/t) = t como los tres términos quedaron con t elevada a la misma potencia , entonces la ecuación sí es homogénea.

b) Determinación de la variable y diferencial que saldrán, y sustituciones : como el dy tiene el coeficiente más sencillo entonces saldrá la variable y y el dy .

Aplicando el segundo paso del método $y = vx$; $dy = v\,dx + x\,dv$ sustituyendo y y dy en (2).

$\left[x + vx\ sen(\frac{vx}{x})\right]dx - \left[x\ sen(\frac{vx}{x})\right]\left[v\,dx + x\,dv\right] = 0$ Multiplicando

$x\,dx + vx\ sen(v)\,dx - xv\ sen\ (v)\,dx - x^2\,sen(v)\,dv = 0$ Reduciendo.

$x\,dx - x^2\,sen\ (v)\ dv = 0$ (1)

c) Resolviendo por separación de variables :

$FACTOR = \left[\frac{1}{x^2}\right]$ Multiplicando 1 por este factor

$\left[x\,dx - x\,sen(v)\,dv = 0\right]\left[\frac{1}{x^2}\right]$ Realizando el producto.

$\frac{dx}{x} - sen\ (v)\ dv = 0$ Integramos.

$\int\frac{dx}{x} - \int sen\ (v)\ dv = \int 0$ (2)

d) Solución de integrales:

$\int\frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

$\int sen\ (v)\ dv \approx \int sen(u)\ du = -\cos(u) + c$;

e) Obtención de la solución general de (2)

$\int\frac{dx}{x} - \int sen(v)\ dv = \int 0$ Integrando.

$\ln|x| + \cos\ (v) = c$ de (b) $y = vx$; $v = \frac{y}{x}$; sustituyendo v.

$\boxed{\ln|x| + \cos(\frac{y}{x}) = c}$ SOLUCION GENERAL.

3) $xdy - ydx = \sqrt{(x^2 + y^2)}\ dx$

SOLUCION :

a) Identificación :

Los términos son (para checar si es homogénea). Aplicando x ; y ; $\sqrt{x^2}$ y $\sqrt{y^2}$ sustituyendo x y y por t.

t ; t ; $\sqrt{t^2} = t$; $\sqrt{t^2} = t$ como los tres términos quedaron con t elevada a la misma potencia, sí es homogénea.

b) Determinación de la variable y diferencial, que saldrán ,y sustituyendo. Como el dy tiene el coeficiente más sencillo entonces, saldrá la variable y y el dy . Aplicando el segundo paso del método.

$y = vx$; $dy = vdx + xdv$ Sustituyendo en (3)

$x(vdx+xdv) - vxdx = \sqrt{x^2+v^2x^2}\ dx$ Multiplicando

$xvdx + x^2dv - vxdx = \sqrt{x^2\ (1+v^2)}\ dx$ Reduciendo

$x^2dv = x\sqrt{1+v^2}\ dx$ (I)

c) Resolviendo por separación de variables :

$Factor = \left[\frac{1}{x^2(\sqrt{1+v^2})}\right]$ Multiplicando I por este factor

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$\left[x^2\,dy = x\sqrt{1+v^2}\,dx\right]\left[\frac{1}{x^2(\sqrt{1+v^2})}\right]$ Realizando el producto e igualando a cero.

$\frac{dy}{\sqrt{1+v^2}} - \frac{dx}{x} = 0$ Integramos

$\int\frac{dy}{\sqrt{1+v^2}} - \int\frac{dx}{x} = \int 0$ (II)

d) Solución de integrales:

$\int\frac{dy}{\sqrt{1+v^2}} \approx \int\frac{dy}{\sqrt{1+u^2}} = \ln|u+\sqrt{1+u^2}|+c\,;\quad u^2=v^2 \Longrightarrow u=v$

$\int\frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

e) Obtención de la solución general: de (II)

$\int\frac{dy}{\sqrt{1+v^2}} - \int\frac{dx}{x} = \int 0$ Integrando

$\ln|v+\sqrt{1+v^2}| - \ln|x| = c$ Aplicando $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$

$\ln\left(\frac{v+\sqrt{1+v^2}}{x}\right)$ Exponenciando

$e^{\ln\left(\frac{v+\sqrt{1+v^2}}{x}\right)} = e^c$ Aplicando $e^{\ln u} = u;\ e^c = c$

$\frac{v+\sqrt{1+v^2}}{x} = c$ Despejando

$v+\sqrt{1+v^2} = cx$ de (b) $y=vx \Longrightarrow v=y/x$; Sustituyendo v

$\frac{y}{x} + \sqrt{1+(y^2/x^2)} = cx$ Reduciendo

$\frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} = cx$ Multiplicando por x

$\boxed{y+\sqrt{x^2+y^2} = cx^2}$ SOLUCION GENERAL

(4) $yx^2dx - (x^3+y^3)dy = 0$; $x=0$ cuando $y=1$

SOLUCION :

a) Identificación : (nos piden la solución particular)
Los términos son yx^2 ; x^3 y y^3 sustituyendo x e y por t; $(t)(t^2)=t^3$; t^3 y t^3 como todos los términos quedaron con t elevada al cubo, entonces la ecuación sí es homogénea.

b) Determinación de la variable y diferencial que saldrán, sustituciones :
Como el dx tiene el coeficiente más sencillo entonces saldrá la variable x y el dx. Aplicando el segundo paso del Método:

$x = vy$; $dx = vdy + ydv$ Sustituyendo en (4)

$y(v^2y^2)(vdy + ydv) - (v^3y^3+y^3)dy = 0$ Multiplicando

$v^3y^3dy + y^4v^2dv - v^3y^3dy - y^3dy = 0$ Reduciendo

$y^4v^2dv - y^3dy = 0$ (I)

c) Resolviendo por separación de variables:

FACTOR $= \left[\frac{1}{y^4}\right]$ Multiplicando I por este factor

$\left[y^4v^2dv - y^3dy = 0\right]\left[\frac{1}{y^4}\right]$ Realizando el producto

$v^2dv - \frac{dy}{y} = 0$ Integrando

$\int v^2dv - \int\frac{dy}{y} = \int 0$ Resolviendo

$\frac{v^3}{3} - \ln|y| = c$ Multiplicando por 3
Aplicando $c\ln u = \ln u^c$

$v^3 - 3\ln|y| = c$ despejando

$\ln(y)^3 = v^3 + c$ Exponenciando

$e^{\ln(y)^3} = e^{v^3+c}$ Aplicando $e^{\ln u} = u$;
$e^{(a+b)} = e^a e^b$; $e^c = c$

$y^3 = e^{v^3}c$ de b) $x=vy$ $v = x/y$;
sustituyendo v

$\boxed{y^3 = c\,e^{x^3/y^3}}$ Solución general

d) Obtención de la solución particular:
sustituyendo $x = 0$ y $y=1$ en la solución general

$(1)^3 = c\,e^0$ $c = 1$ sustituyendo en la solución general

$\boxed{y^3 = e^{x^3/y^3}}$ Solución particular

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

PROBLEMAS PROPUESTOS PARA RESOLVERSE POR HOMOGENEAS

Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales.

1) $(6x^2 - 7y^2)dx - 14xydy = 0$

2) $(2\sqrt{xy} - y)dx - xdy = 0$

3) $[y + x\,ctg(x/y)]dx - xdy = 0$

4) $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0$

5) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y^4 + x^4}{xy^3}$

6) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2e^{(x/y)^2} + 2x^2e^{(x/y)^2}}$

7) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$ (y/x)

8) $(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$

9) $y(x^2 + xy - 2y^2)dx + x(3y^2 - xy - x^2)dy = 0$

10) $(x^2y + y^3)dx - 2x^3dy = 0$ $y = 3$ cuando $x = 2$

11) $[x + ye^{(y/x)}]dx - xe^{(y/x)}dy = 0$; $y = 0$ cuando $x = 1$

12) $y^2dx + (x^2 + xy + y^2)dy = 0$; $y=1$ cuando $x=0$

SOLUCIONES

1) $2x^3 = c + 7xy^2$ 2) $\sqrt{xy} = c + x$ 3) $x\cos(y/x) = c$

4) $y + \sqrt{x^2 + y^2} = c\,x^2$ 5) $y^4 + x^4 = c\,x^8$

6) $y + c\left[1 + e^{(y/x)^2}\right]$ 7) $x^2 + y^2 = c\,y$ 8) $(x + y)^2 = c\,x^{(y/x)}$

9) $2y^2 \ln(y^3/x^2) + 2xy + x^2 = cy^2$ 10) $5xy^2 = 18(y^2 - x^2)$

11) $\ln(x) = e^{(y/x)} - 1$ 12) $(x + y)\ln|y| + x = 0$

METODO DE SIMPLE SUSTITUCION

Este método se aplica para ecuaciones que tengan la forma:

1) $(ax + by + c)dx \pm (ax + by + f)dy = 0$
2) $(ax + by + c)dx \pm (nax + mby + j)dy = 0$

} Coeficientes que representan rectas paralelas

3) $(ax^2 + by^2 + c)xdx \pm (ax^2 + by^2 + f)ydy = 0$
4) $(ax^2 + by^2 + c)xdx \pm (nax^2 + mby^2 + j)ydy = 0$

} Ecuaciones que tendrían la forma de los 2 casos anteriores al sustituir. $r=x^2, w=y^2$; $dr=2xdx$; $dw=2ydy$

5) $(ax + by + c)dx \pm cte.\,dy = 0$
6) $(ax^2 + by^2 + c)xdx \pm cte.\,dy = 0$

} Ecuaciones que solo un diferencial tenga como coeficiente la ecuación de una recta y el otro diferencial sólo tenga una constante como coeficiente. $r=x^2, w=y^2$; $dr=2xdx$; $dw=2ydy$

Método:

1.- Checar que la ecuación tenga la forma, esto es que los coeficientes de los diferenciales representen ecuaciones de rectas paralelas o bien que solo un diferencial tenga como coeficiente la ecuación de una recta mientras que el otro diferencial solo que tenga una constante como coeficiente.

2.- Haremos z igual a la relación ax + by y diferenciando esta ecuación encontraremos el valor de dz .

3.- Despejaremos de la ecuación de dz (paso 2) el diferencial que en la ecuación diferencial tenga el coeficiente con el menor número de términos. Si los 2 coeficientes tienen el mismo número de términos se despejará de la ecuación de dz cualquiera de los 2 diferenciales.

4.- Sustituiremos z y el diferencial que despejamos, en la ecuación diferencial.

5.- La ecuación resultante se resuelve por el método de separación de variables.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

6.- Una vez encontrado la solución, sustituiremos el valor de z por el que le asignamos en el paso 2. Esta será nuestra Solución General.

Nota:

En las ecuaciones de la forma 3, 4 y 6 primero se harán las sustituciones de $r=x^2$; $dr=2xdx$; $w=y^2$; $dw=2ydy$ y después ya seguiremos con todos los pasos.

(La relación será ar + bw).

PROBLEMAS RESUELTOS POR EL METODO DE SIMPLE SUSTITUCION

Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales.

1) $(3x + 2y - 3)dx + (6x + 4y)dy = 0$

SOLUCION :

a) Identificación:

Checaremos si son rectas paralelas o no.

Del coeficiente de dx ; $A=3$; $B=2$; $m=-A/B=-3/2=m$

Del coeficiente de dy ; $A=6$; $B=4$; $m=-A/B=-6/4=-3/2=m$

Como las pendientes (m) son iguales entonces la ecuación diferencial si tiene la forma (rectas paralelas).

b) Obtención de las ecuaciones de sustitución :

Haremos z igual a la relación que sea el submúltiplo, en este caso:

$z=3x + 2y \implies dz=3dx + 2dy$

Como el dy tiene el coeficiente más sencillo en la ecuación diferencial entonces será el que despejemos.

$$\boxed{dy=\frac{dz - 3dx}{2}}$$

c) Sustituciones de z y dy

$(3x + 2y - 3)dx + (6x + 4y)dy = 0$ Sustituyendo z y dy

$(z-3)dx + \frac{2z(dz - 3dx)}{2} = 0$ Multiplicando

$zdx - 3dx + zdz - 3zdx = 0$ Agrupando

$(z)dz - (2z + 3)dx = 0$ (I)

d) Aplicando el método de separación de variables:

$\text{Factor} = \left[\frac{1}{2z + 3}\right]$ Multiplicando I por el factor

$\left[zdz - (2z + 3)dx = 0\right]\left[\frac{1}{2z + 3}\right]$ Multiplicando

$\frac{zdz}{2z + 3} - dx = 0$ Integramos

$\int \frac{zdz}{2z + 3} - \int dx = \int 0$ (II)

e) Solución de integrales:

$\int dx = x + c$

$\int \frac{zdz}{2z + 3}$ función impropia por lo tanto hay que dividir.

$$\begin{array}{r} 1/2 \\ 2z + 3 \,\overline{)\, z \qquad} \\ \underline{-z - 3/2} \\ - 3/2 \end{array}$$

$\frac{z}{2z + 3} = \frac{1}{2} + \frac{-3/2}{2z + 3}$ Integrando ambos lados

$$\boxed{\int \frac{zdz}{2z + 3} = \frac{1}{2}\int dz - 3/2\int \frac{dz}{2z + 3}} \quad \text{(III)}$$

f) Obtención de la solución general: De II

$\int \frac{z\,dz}{2z + 3} - \int dx = \int 0$

$\frac{1}{2}\int dz - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\int \frac{(2)\,dz}{2z + 3} - \int dx = \int 0$ integrando

$\frac{1}{2}(z) - \frac{3}{4}\ln|2z + 3| - x = C$ multiplicando por 4, aplicando $c\ln u = \ln u^c$

$2z - \ln(2z + 3)^3 - 4x = C$ de b), $z = 3x + 2y$; sustituyendo

UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$2(3x+2y) - \ln[2(3x+2y) + 3]^3 - 4x = c$ desarrollando y reduciendo

$2x + 4y = c + \ln(6x + 4y + 3)^3$; $2(x+2y) = c + \ln(6x+4y+3)^3$

SOLUCION GENERAL.

2) $2(x-y)dx + dy = 0$

SOLUCION:

a) Identificación:
Como el dx tiene como coeficiente la ecuación de una recta x-y y el dy tiene 1 como coeficiente, sí es de simple sustitución del caso 5.

b) Obtención de las ecuaciones de sustitución:
Haremos z igual a la relación de variables, es decir

$z = x-y$ diferenciando
$dz = dx-dy$ despejando dy dado que tiene el coeficiente mas simple
$dy = dx - dz$

c) Sustituciones:
$2(x-y)dx + dy = 0$ (sustituyendo z y dy)
$2z\,dx + dx-dz = 0$ (agrupando)
$(2z+1)dx - dz = 0$ (1)

d) Aplicando el método de separación de variables.

$FACTOR = \left[\frac{1}{2z+1}\right]$ multiplicando (1) por el factor

$\left[(2z+1)dx - dz = 0\right]\left[\frac{1}{2z+1}\right]$

$dx - \frac{dz}{2z+1} = 0$ integramos

$\int dx - \int \frac{dz}{2z+1} = \int 0$ completamos la segunda integral

$\int dx - \frac{1}{2}\int \frac{2\,dz}{2z+1} = \int 0$ integrando

$x - \frac{1}{2}\ln|2z+1| = c$ multiplicando por 2 y sustituyendo $z = x-y$ y despejando x

$2x = c + Ln\,|2(x-y) + 1|$ SOLUCION GENERAL

3) $(2x^2 + y^2 + 6)x\,dx + (2x^2 + y^2)y\,dy = 0$

SOLUCION:

a) Transformación:
Como tiene la forma (3) haremos:
$r = x^2$; $dr = 2x\,dx$; $dr/2 = x\,dx$; $w = y^2$; $dw = 2y\,dy$; $dw/2 = y\,dy$.

Sustituyendo estas relaciones:

$(2r+w+6)\frac{dr}{2} + (2r+w)\frac{dw}{2} = 0$ multiplicando por 2

(1) $(2r+w+6)dr + (2r+w)dw = 0$ la cual tiene la forma

de dr $A = 2$; $B = 1$; $m = -2/1 = -2$

de dw $A = 2$; $B = 1$; $m = -2/1 = -2$

b) Ecuaciones de sustitución:
Haremos z igual a la relación de variables.
$z = 2r + w$ diferenciando ; $dz = 2dr + dw$ despejando dw ;
$dw = dz-2dr$.

c) Sustituciones: de (1)

$(2r+w+6)dr + (2r+w)dw = 0$ sustituyendo z y dw
$(z+6)dr + z(dz-2dr) = 0$ multiplicando y agrupando
$(6-z)dr + z\,dz = 0$ (2)

d) Resolviendo por separación de variables:

$Factor = \left[\frac{1}{6-z}\right]$ multiplicando 2 por factor

$\left[(6-z)dr + z\,dz = 0\right]\left[\frac{1}{6-z}\right]$ multiplic

$dr + \frac{z\,dz}{6-z} = 0$ integramos

$\int dr + \int \frac{z\,dz}{6-z} = \int 0$ (4)

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

e) Solución de integrales:

$\int dr = r + c$;

$\int \frac{z\,dz}{6-z}$; como es una fracción impropia, dividiremos:

$$\begin{array}{r|l} -z+6 & -1 \\ \hline -z+6 & \\ \hline +6 & \end{array}$$

$\frac{z}{6-z} = -1 + \frac{6}{6-z}$ Integrando en ambos lados

$$\int \frac{z\,dz}{6-z} = -\int dz + 6\int \frac{dz}{6-z} \qquad (3)$$

f) Obtención de la solución general: de (4)

$\int dr + \int \frac{z\,dz}{6-z} = \int 0$ Sustituyendo (3) ; $\int dr - \int dz + 6(-1)\int \frac{(-1)dz}{6-z} = \int 0$

$r - z - 6\ln(6-z) = c$: Sustituyendo $z = (2r+w)$;

$r - (2r+w) - \ln(6-2r-w)^6 = c$ Reduciendo y multiplicando por -1

$r + w + \ln(6-2r-w)^6 = c$ Sustituyendo $r=x^2$; $w=y^2$

$x^2 + y^2 + \ln(6-2x^2-y^2)^6 = c$ Solución general

PROBLEMAS PROPUESTOS PARA RESOLVERSE POR SIMPLE SUSTITUCION

Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales.

(1) $(x+2y+3)dx + (2x+4y-1)dy=0$
(2) $(x+y-3)dx + (x+y+4)dy=0$
(3) $(2x-3y+2)dx + 3(4x-6y-1)dy=0$
(4) $(2x+y)dx - (4x+2y-1)dy=0$
(5) $(x-2y+5)dx - [2(x-2y)+9]dy=0$
(6) $2dx + (2x+3y)dy=0$
(7) $(x+y)dx + (x+y-2)=0$
(8) $(3x-y+4)dx + dy=0$
(9) $(2x+3y-1)dx = (5-2x-3y)dy$
(10) $(x^2+y^2+4)ydy + (x^2+y^2-3)xdx=0$
(11) $(12x^2-18y^2-3)ydy + (2x^2-3y^2+2)xdx=0$

SOLUCIONES

(1) $x^2+4xy+4y^2+6x=c+2y$
(2) $x^2+2xy+y^2+8y=c+6x$
(3) $x+6y+\ln(2x-3y)=c$
(4) $5x-10y+\ln(10x+5y-2)=c$
(5) $(x-2y)^2+10(x-2y)+2y=c$
(6) $(2x+3y-3)e^y=c$
(7) $(x+y)^2=4y+c$
(8) $3x+7=y+ce^x$
(9) $x+y+c=4\ln(2x+3y+7)$
(10) $x^4+2x^2y^2+y^4+8y^2=c+6x^2$
(11) $x^2+6y^2+\ln(2x^2-3y^2)=c$

UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

e) Solución de integrales:

$\int dr = r + c$;

$\int \frac{z\,dz}{6-z}$; como es una fracción impropia, dividiremos:

$$\begin{array}{r|l} -z+6 & -1 \\ \hline -z+6 & \\ \hline +6 & \end{array}$$

$\frac{z}{6-z} = -1 + \frac{6}{6-z}$ Integrando en ambos lados

$$\int \frac{z\,dz}{6-z} = -\int dz + 6\int \frac{dz}{6-z} \qquad (3)$$

f) Obtención de la solución general: de (4)

$\int dr + \int \frac{z\,dz}{6-z} = \int 0$ Sustituyendo (3) ; $\int dr - \int dz + 6(-1)\int \frac{(-1)dz}{6-z} = \int 0$

$r - z - 6\ln(6-z) = c$: Sustituyendo $z = (2r+w)$;

$r - (2r+w) - \ln(6-2r-w)^6 = c$ Reduciendo y multiplicando por -1

$r + w + \ln(6-2r-w)^6 = c$ Sustituyendo $r=x^2$; $w=y^2$

$x^2 + y^2 + \ln(6-2x^2-y^2)^6 = c$ Solución general

PROBLEMAS PROPUESTOS PARA RESOLVERSE POR SIMPLE SUSTITUCION

Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales.

(1) $(x+2y+3)dx + (2x+4y-1)dy=0$
(2) $(x+y-3)dx + (x+y+4)dy=0$
(3) $(2x-3y+2)dx + 3(4x-6y-1)dy=0$
(4) $(2x+y)dx - (4x+2y-1)dy=0$
(5) $(x-2y+5)dx - [2(x-2y)+9]dy=0$
(6) $2dx + (2x+3y)dy=0$
(7) $(x+y)dx + (x+y-2)=0$
(8) $(3x-y+4)dx + dy=0$
(9) $(2x+3y-1)dx = (5-2x-3y)dy$
(10) $(x^2+y^2+4)ydy + (x^2+y^2-3)xdx=0$
(11) $(12x^2-18y^2-3)ydy + (2x^2-3y^2+2)xdx=0$

SOLUCIONES

(1) $x^2+4xy+4y^2+6x=c+2y$
(2) $x^2+2xy+y^2+8y=c+6x$
(3) $x+6y+\ln(2x-3y)=c$
(4) $5x-10y+\ln(10x+5y-2)=c$
(5) $(x-2y)^2+10(x-2y)+2y=c$
(6) $(2x+3y-3)e^y=c$
(7) $(x+y)^2=4y+c$
(8) $3x+7=y+ce^x$
(9) $x+y+c=4\ln(2x+3y+7)$
(10) $x^4+2x^2y^2+y^4+8y^2=c+6x^2$
(11) $x^2+6y^2+\ln(2x^2-3y^2)=c$

UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

ECUACIONES DE LA FORMA

$(ax+by\ c)dx+(fx+gy+h)dy=0$ ó $(ax^2+by^2+c)xdx+(fx^2+gy^2+h)ydy=0$

EN LA QUE LOS COEFICIENTES REPRESENTAN RECTAS NO PARALELAS

METODO PARA LA OBTENCION DE LA SOLUCION GENERAL:

1.- Identificaremos que la ecuación es de este método y no el anterior cuando las pendientes sean diferentes.

2.- Sustituiremos $x=x'+h$; $y=y'+k$; $dx=dx'$; $dy=dy'$

3.- Tomaremos los términos de h ; k y la constante que aparezcan en el coeficiente de cada diferencial y los igualaremos a cero, con lo cual tendremos 2 ecuaciones que contengan h y k. A partir de estas ecuaciones encontraremos los valores de h y k.

4.- Sutituiremos los valores de h y k en la ecuación del paso 2 con lo cual solo nos deben quedar las variables primas en cada coeficiente de cada diferencial.

5.- Esta ecuación (paso 4) se resolverá por homogéneas.

6.- Obtenida la solución sustituiremos primero v la cual la utilizamos en la homogénea y después sustituiremos x Y y despejándolas de las ecuaciones con que iniciamos el método,es decir, de $x=x'+h$ despejando x', tenemos $\underline{x'=x-h}$; de $y=y'+k$ despejando y', tenemos $\underline{y'=y-k}$.

PROBLEMAS RESUELTOS

I) Determine la solución general de las siguientes ecuaciones.

1) $(2x+3y-1)dx-4(x+1)dy=0$

SOLUCION:

a) Identificación:

Del coeficiente de dx A=2; B=3; m=-2/3

Del coeficiente de dy A=1; B=0; m=-1/0 (Indefinido)

Como las pendientes son diferentes entonces la ecuación diferencial sí tiene la forma.

b) Sustituciones:

$x= x'+h$; $y= y'+k$

$dx=dx'$; $dy=dy'$ sustituyendo

$(2x+3y-1)dx - 4(x+1)dy = 0$ sustituyendo x, y, dx, dy

$(2x'+2h+3y'+3k-1)dx' - 4(x'+h+1)dy' = 0$ tomando h, k y la constante.

Del dx $2h+3k-1 = 0$ (1)

Del dy $h+1 = 0$; $h=-1$ sustituyendo h en (1)

$2(-1)+3k-1 = 0$; $k=1$. sustituyendo h y k en (1)

$[2x'+2(-1)+3y'+3(1)-1]dx' - 4(x'-1+1)dy' = 0$ reduciendo

$(2x'+3y')dx'- 4x'dy' = 0$ ①

c) Resolviendo por homogéneas:

Como el dy tiene el coeficiente más sencillo entonces sustituiremos la y.

$y' = vx'$; $dy' = vdx' + x'dv$ sustituyendo y y dy en ①

$(2x'+3vx')dx' - 4x'(vdx'+x'dv) = 0$ multiplicando

$2x'dx'+3vx'dx'-4x'vdx'-4x'^2dv = 0$ agrupando

$(2-v)x'dx'-4x'^2dv = 0$ ②

d) Resolviendo por separación de variables:

$FACTOR = \left[\frac{1}{(2-v)\,x'^2}\right]$ multiplicando ② por este factor

$\left[(2-v)x'dx'-4x'^2dv = 0\right]\left[\frac{1}{(2-v)\,x'^2}\right]$

$\frac{dx'}{x'} - \frac{4\,dv}{2-v} = 0$ integramos

$\int\frac{dx'}{x'} - 4\int\frac{dv}{2-v} = \int 0$ multiplicando y dividiendo por -1 completamos la segunda integral

$\int\frac{dx'}{x'} - 4(-1)\int\frac{(-1)dv}{2-v} = \int 0$ integrando

$\ln|x'| + 4\ln|2-v| = C$ exponenciando

$e^{\ln[x'(2-v)^4]} = e^{0}$ aplicando $e^{\ln(u)} = u$; $e^{0} = C$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$x'(2-v)^4 = C$ sustituyendo $v = y'/x'$

$x'(2-y'/x')^4 = C$ simplificando

$x'\left[\frac{(2x'-y')^4}{x'^4}\right] = C$ multiplicando por x'^3

$(2x'-y')^4 = cx'^3$ sustituyendo $x' = x-h$; $x' = x+1$
$y' = y-k$; $y' = y-1$

$(2x+2-y+1)^4 = C(x+1)^3$ reduciendo

$* \ (2x-y+3)^4 = C(x+1)^3$ **SOLUCION GENERAL**

2) $(x^2-2y^2+4)x\,dx + (2x^2-y^2+2)y\,dy = 0$; $y=0$ cuando $x=2$

SOLUCION: nos piden solución particular

a) Transformación:

Como tiene la segunda forma;

$r = x^2$; $dr = 2x\,dx$; $w = y^2$; $dw = 2y\,dy$; $dw/2 = y\,dy$; $dr/2 = x\,dx$.

Sustituyendo estas relaciones en 2)

$(r-2w+4)dr/2 + (2r-w+2)dw/2 = 0$ multiplicando por 2

① $(r-2w+4)dr + (2r-w+2)dw = 0$ checando la forma:

De dr $A=1$; $B=-2$; $m=-1/-2 = 1/2$

De dw $A=2$; $B=-1$; $m=-2/-1 = 2$

Como las pendientes son diferentes entonces si es ecuación de la forma.

b) Sustituciones: como no son x y y se pueden poner h y k en cualquier sustitución

$r = r'+h$; $w = w'+k$

$dr = dr'$; $dw = dw'$. sustituyendo en ①

② $(r'+h-2w'-2k+4)dr' + (2r'+2h-w'-k+2)dw' = 0$. Tomando h, k y la constante la sustitución

a) $h-2k+4 = 0$ Multiplicando a) por (-2)

b) $2h-k+2 = 0$ sumando b) y c)

c) $-2h+4k-8 = 0$

$3k-6 = 0$; $k=2$ sustituyendo en a) $h-(2)2+4 = 0$; $\underline{h=0}$

Sustituyendo h y k en ②

$[r'+0-2w'-2(2)+4]dr' + [2r'+2(0)-w'-2+2]dw' = 0$

$(r'-2w')dr' + (2r'-w')dw' = 0$ ③

c) Resolviendo por homogéneas:

Como los dos diferenciales están igual de complicados , o sea , los dos tienen dos términos, podemos sustituir cualquier variable arbitrariamente:

$w' = vr'$; $dw' = vdr' + r'dv$. sustituyendo w' y dw' en ③

$(r'-2vr')dr' + (2r'-vr')(vdr'+r'dv) = 0$ multiplicando.

$r'dr' = 2vr'dr' + 2vr'dr' + 2r'^2dv - v^2r'dr' - vr'^2dv = 0$ agrupando

$(1-v^2)r'dr' + (2-v)r'^2dv = 0$ ④

d) Resolviendo por separación de variables:

$FACTOR = \left[\frac{1}{(1-v)\,r'^2}\right]$ Multiplicando ④ por este factor

$\left[(1-v^2)r'dr' + (2-v)r'^2dv = 0\right]\left[\frac{1}{(1-v)\,r'^2}\right]$

$\frac{dr'}{r'} + \frac{(2-v)dv}{1-v^2} = 0$ separando la segunda integral

$\frac{dr'}{r'} + \frac{2dv}{1-v^2} - \frac{v\,dv}{1-v^2} = 0$ integramos

$\int\frac{dr'}{r'} + 2\int\frac{dv}{1-v^2} \int\frac{v\,dv}{1-v^2} = \int 0$ ⑤

e) Solución de integrales:

$\int\frac{dr'}{r'} = \ln|r'| + C$

$\int\frac{dv}{1-v^2} \approx \int\frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right) + c$; $v^2 = u^2$; $v=u$; $dv=du$

$\int\frac{vdv}{1-v^2} \approx \int\frac{du}{u} = \ln|u| + c$ $u = 1-v^2$; $du = -2vdv$ completamos multiplicando y dividiendo por (-2)

f) Obtención de la solución general: de ⑤

$\int\frac{dr'}{r'} + 2\int\frac{dv}{1-v^2} - \frac{1}{(-2)}\int\frac{(-2)\,vdv}{1-v^2} = \int 0$ integrando

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$\ln|r'| + 2(1/2)\ln\left(\frac{1+v'}{1-v}\right) + 1/2\ln(1-v^2) = C$$ Multiplicado por 2 y aplicando $C \ln u = \ln u^c$

$$\ln(r')^2 + \ln\left(\frac{1+v'}{1-v}\right)^2 + \ln(1-v^2) = C$$ Aplicando $\ln a + \ln b + \ln c = \ln(abc)$

$$\ln\left[\frac{r'^2(1+v)^2(1-v^2)}{(1-v)^2}\right] = C$$ Exponenciando

$$e^{\ln\left[\frac{r'^2(1+v)^2(1-v^2)}{(1-v)^2}\right]} = e^c$$ Aplicando $e^{\ln u} = u$; $e^c = c$ y $(1-v^2) = (1-v)(1+v)$

$$\frac{r'^2(1+v)^2\cancel{(1-v)}(1+v)}{\cancel{(1-v)^2}} = C$$ Reduciendo

$r'^2(1+v)^3 = c(1-v)$ Sustituyendo $v=w'/r'$

$r'^2(1+w'/r')^3 = c(1-w'/r')$ Reduciendo

$$r'^2\left(\frac{r'+w'}{r'}\right)^3 = c\left(\frac{r'-w'}{r'}\right)$$ Multiplicando por r'

$(r'+w')^3 = c(r'-w')$ Sustituyendo $r'=r-h$ $r'=r$; $w'=w-k$ $w'=w-2$

debido que $h=0; k=2$; $(r+w-2)^3 = c(r-w+2)$ Sustituyendo $r=x^2$; $w=y^2$

$(x^2+y^2-2)^3 = c(x^2-y^2+2)$ SOLUCION GENERAL

g) obtención de la solución particular:

Sustituyendo $y=0$; $x=2$ en la solución general por lo tanto

$(2^2+0-2)^3 = c(2^2-0+2)$ reduciendo;

$8=c(6)$ $c=8/6$ $c=4/3$ Sustituyendo c en solución general

$(x^2+y^2-2)^3 = (4/3)(x^2-y^2+2)$ multiplicando por 3

$3(x^2+y^2-2)^3 = 4(x^2-y^2+2)$ SOLUCION PARTICULAR

PROLEMAS PROPUESTOS PARA RESOLVERSE POR ECUACIONES DE LA FORMA

Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales

1) $(x-2y+4)dx+(2x-y+2)dy=0$
2) $(2x+3y)dx+(y+2)dy=0$
3) $(4x+3y-7)dx+(3x-7y+4)dy=0$
4) $(2x-2y)dx+(y-1)dy=0$
5) $(2x-3y-30)dx-(2y+3x)dy=0$
6) $(x-2y+1)dx+(4x-3y-6)dy=0$
7) $(5x+4y+4)dx+(4x+3y+1)dy=0$
8) $(x-2y)dx+(2x-y-3)dy=0$

$y=-1$ cuando $x=-1$

SOLUCIONES

1) $(x+y-2)^3 = c(x-y+2)$
2) $(y+2x-4)^2 = c(x+y-1)$
3) $4x^2+6xy-7y^2-14x+8y=c$
4) $\mathrm{Ln}[(y-x)^2+(x-1)^2]+2\,\mathrm{arctg}\left[\frac{y-x}{x-1}\right] = c$
5) $x^2-3xy-y^2-13x=c$
6) $(x+3y-9)^5 = c(y-x+1)$
7) $(2x+y-5)^2 = (3x+2y-2)^2+c$
8) $(x+y-3)^3 = 125(x-y-1)$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

ECUACIONES DIFERENCALES EXACTAS

Antes de empezar con este método, estudiaremos qué es una ecuación diferencial exacta para después, aprender el método para su solución.
La diferencial total de una función f(x,y) es:

$$d\left[f(x,y)\right] = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

A la parte de la derecha de la ecuación se le llama diferencial exacta y cuando se iguala ésta a cero, se le llama ECUACION DIFERENCIAL EXACTA, es decir:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$ Ecuación Diferencial Exacta

Ejemplo:

Determine la diferencial total de la función $f(x,y) = 3x^2 + 2x^3y - 7y^3$.

SOLUCION:
Como veíamos anteriormente, la diferencial total de la función es:

$$d\left[f(x,y)\right] = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$ Sustituyendo f(x,y)

$$d\left[f(x,y)\right] = \left[\frac{\partial(3x^2+2x^3y-7y^3)}{\partial x}\right]dx + \left[\frac{\partial(3x^2+2x^3y-7y^3)}{\partial y}\right]dy$$

$$d\left[f(x,y)\right] = (6x+6x^2y)dx + (2x^3-21y^2)dy$$

Como veíamos anteriormente la ecuación diferencial exacta sería:

$(6x+6x^2y)dx + (2x^3-21y^2)dy = 0$

Lo importante para nosotros es cómo saber que la ecuación diferencial que se nos da es ecuación diferencial exacta, para esto, podemos aplicar el siguiente método.

METODO PARA IDENTIFICAR UNA ECUACION DIFERENCIAL EXACTA

1) Llamaremos M al coeficiente del dx y N al coeficiente del dy, como ecuación quedaría:

   $Mdx + Ndy = 0$

2) Una ecuación diferencial será ecuación diferencial exacta, cuando sean iguales las derivadas parciales de los coeficientes de cada diferencial con respecto a la variable del otro diferencial, es decir, el coeficiente del dx (M) se derivará parcialmente con respecto a y y el coeficiente del dy (N) se derivará parcialmente con respecto a x, como ecuación; una ecuación diferencial es exacta si $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Del ejercicio anterior tenemos:

$$(6x+6x^2y)dx + (2x^3-21y^2)dy = 0$$

vamos a comprobar que es ecuación diferencial exacta.

SOLUCION:

a) Obtención de M, N y las derivadas parciales:

$M = 6x+6x^2y$; $N = 2x^3-21y^2$. Obteniendo las derivadas parciales

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(6x+6x^2y)}{\partial y} = 6x^2.$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(2x^3-21y^2)}{\partial x} = 6x^2.$$

Conclusión:

Como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ La ecuación diferencial Sí es exacta.

NOTAS:

1) Es importante resaltar que la forma de la ecuación diferencial que nos den, debe estar como; $Mdx+Ndy=0$ es decir, como una suma si no es así, tendremos que darle a la ecuación esa forma para poder checar si es exacta.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

2) Cuando las variables NO sean x y y, se denominarán M y N arbitrariamente, recordemos que la ecuación diferencial es EXACTA cuando las derivadas parciales de los coeficientes de cada diferencial con respecto a la variable del otro diferencial, SEAN IGUALES.

EJEMPLO:
Determine si la ecuación: [sen(a)+b]da + [a-2cos(b)]db = 0. es exacta.
SOLUCION:
Como NO son x y y las variables, entonces tomaremos M y N arbitrariamente, por ejemplo que la ecuación sea de la forma;

Mda + Ndb = 0 es decir,
M = sen(a)+b ; N=a-2cos(b)

para saber si es exacta tendremos que obtener $\frac{\partial M}{\partial b}$ y $\frac{\partial N}{\partial a}$ dado que

M está con da y N está con db en la ecuación original.

Obteniendo las derivadas: $\frac{\partial M}{\partial b} = \frac{\partial[sen(a)+b]}{\partial b} = 1$

$\frac{\partial N}{\partial a} = \frac{\partial[a - 2cos(b)]}{\partial a} = 1$

Como $\frac{\partial M}{\partial b} = \frac{\partial N}{\partial a}$ entonces la ecuación diferencial si es exacta.

Ahora bien, ya sabemos cuándo una ecuación es exacta, el método para obtener la solución general tiene una variante con respecto a los demás métodos debido a que la ecuación diferencial exacta proviene de derivadas parciales.
Existen varios métodos para encontrar la solución general de una ecuación diferencial exacta, aquí estudiaremos uno de ellos.

METODO PARA LA OBTENCION DE LA SOLUCION GENERAL

1) Ya que checamos que la ecuación sí es exacta pasaremos a integrar por separado cada parte de la ecuación, esto es, $\int Mdx$ se resolverá por un lado y $\int Ndy$ por otro.
IMPORTANTE: Sólo para este método, al integrar, las variables que no sean iguales a la variable del diferencial se tomarán como constantes en $\int Mdx$ las y serán constantes ,en $\int Ndy$ las x serán constantes.

2) Al realizar cada integral se debería sumar a cada resultado la constante total de integración C sólo que en nuestras integrales también son tomadas como constantes algún tipo de variable por lo tanto, la constante de integración se representará por ϕ[var], donde colocaremos la variable que se tomó como constante en dicha integral.

3) Encontraremos el valor de los ϕ[var], los cuales estarán formados por los términos que aparezcan en la solución de la otra integral pero que no aparezcan en la solución donde tenemos el ϕ[var] que estamos buscando. Por ejemplo, $\phi(y)$ estará formado por los términos de la solución de $\int Ndy$ que no sean términos de la solución de $\int Mdx$ (que es donde tendríamos el ϕ[y]).

NOTAS:

a) El $\phi(x)$ solo podrá estar formado por R y variables x , el $\phi(y)$ solo podrá estar formado por R y variables y , de no ser así tenemos algún error.

b) Si en la solución de alguna de las integrales, aparecen logaritmos, aplicamos sus propiedades para obtener realmente los términos que aparecerán o no en cada ϕ[var].

c) Los ϕ[var] no se toman como términos faltantes es decir, $\phi(x)$ no contendrá a $\phi(y)$ o viceversa.

4) Con el paso anterior las dos soluciones deben ser iguales y por lo tanto la solución general será cualquiera de las soluciones en donde ésta solución se igualará a C (constante de integración) para que ya sea la solución general.

155424

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

PROBLEMAS RESUELTOS

Determine si las siguientes ecuaciones diferenciales son exactas o no y en caso de serlo encuentre su solución general.

1) $(3x^2+3xy^2)dx + (3x^2y-3y^2+2y)dy=0$

SOLUCION:

a) Identificación: $M=3x^2+3xy^2$; $N=3x^2y-3y^2+2y$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(3x^2+3xy^2)}{\partial y} = 6xy \qquad Y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(3x^2y-3y^2+2y)}{\partial x} = 6xy$$

como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ la ecuación diferencial sí es EXACTA.

b) Solución de las integrales:

$$\int_{y=cte.} Mdx = \int(3x^2+3xy^2)dx = 3\int x^2dx + 3y^2\int xdx = x^3 + \frac{3y^2x^2}{2} + \phi[y]$$

$$\int_{x=cte.} Ndy = \int(3x^2y-3y^2+2y)dy = 3x^2\int ydy - 3\int y^2dy + 2\int ydy$$

$$= \frac{3x^2y^2}{2} - y^3+y^2+\phi[x]$$

c) Obtención de $\phi(x)$ y $\phi(y)$: Para determinar $\phi(y)$ checamos la solución de $\int Ndy$ es decir, la solución en que no está $\phi(y)$. Esta será igual a todos los términos de la solución de $\int Ndy$ y que no estén en la solución donde está $\phi(y)$. Para $\phi(x)$ es al contrario.

$\phi(y) = -y^3+y^2$; $\phi(x) = x^3$ Sustituir los ϕ en las integrales.

$$\int M\,dx = x^3+\frac{3x^2y^2}{2} - y^3+y^2$$

$$\int N\,dy = \frac{3x^2y^2}{2} - y^3+y^2+x^3$$

Como podemos ver las dos soluciones son iguales,por lo tanto la solución general es cualquiera de éstas igualándola a c .

d) Obtención de la solución general: Tomando arbitrariamente $\int M\,dx$

$$\boxed{x^3+\frac{3x^2y^2}{2} - y^3+y^2 = c}$$ SOLUCION GENERAL

2) $(x-1)^{-1}ydx + \left[Ln(2x-2)+\frac{1}{y}\right]dy=0$

SOLUCION:

a) Identificación: $M=(x-1)^{-1}y$; $N= Ln(2x-2)+\frac{1}{y}$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial[(x-1)^{-1}y]}{\partial y} = (x-1)^{-1}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial[Ln(2x-2)+1/y]}{\partial x} = \frac{2}{2x-2} = (x-1)^{-1}$$

como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ sí es EXACTA

b) Solución de las integrales:

$$\int_{y=cte.} Mdx = \int(x-1)^{-1}ydx = y\int\frac{dx}{x-1} = yLn(x-1)+\phi(y)$$ En este caso y=cte.

$$\int_{x=cte.} Ndy = \int[Ln(2x-2)+1/y]dy = Ln(2x-2)\int dy + \int\frac{dy}{y} = yLn(2x-2)+Lny+\phi(x)$$

En este caso x=cte.

como tiene logaritmos aplicaremos

$$Ln(2x-2) = Ln[2(x-1)] \approx Ln(ab) = Lna + Lnb$$

$$Ndy = yLn(2) + yLn(x-1) + Lny + \phi(x)$$

c) Obtención de los ϕ [var]

$\phi(y) = yLn(2) + Lny$ Sustituyendo los valores de ϕ en las integrales

$\phi(x) = 0$

$\int Mdx = yLn(x-1) + yLn(2) + Lny$ $\int Ndy = yLn(2) + yLn(x-1) + Lny$

d) Obtención de la solución general : de $\int Ndy$

$yLn(2) + yLn(x-1) + Lny = c$ Aplicando $cLna + cLnb = cLn(ab)$

$$\boxed{yLn(2x-2) + Lny = c}$$ SOLUCION GENERAL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

3).- $(x+3)^{-1}\cos(y)\,dx - [\operatorname{sen}(y)\,\operatorname{Ln}(5x+15) - 1/y\,]\,dy = 0$

SOLUCION

a) Identificación: Como aparece la resta (Mdx- Ndy) hay que colocarla como la suma (Mdx + Ndy) lo que se hace es colocar el positivo y multiplicar por menos 1 los términos que está afectando.

$$(x+3)^{-1}\cos(y)dx + [-\operatorname{sen}(y)\,\operatorname{Ln}(5x+15)+1/y]dy=0$$

con lo cual ya podemos determinar M y N.

$$M=(x+3)^{-1}\cos(y)\ ;\quad N=\frac{1}{y}-\operatorname{sen}(y)\,\operatorname{Ln}(5x+15)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial[(x+3)^{-1}\cos y]}{\partial y}=-(x+3)^{-1}\operatorname{sen}(y)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial[1/y-\operatorname{sen}(y)\ln(5x+15)]}{\partial x}=-\operatorname{sen}(y)\left[\frac{5}{5x+15}\right]=-\operatorname{sen}(y)\left[\frac{\cancel{5}}{\cancel{5}(x+3)}\right]$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=-\operatorname{sen} y\,(x+3)^{-1}\qquad \text{Como } \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\qquad \text{La ecuación si es exacta.}$$

b) Solución de las integrales:

$$\int Mdx=\int_{y=cte}(x+3)^{-1}\cos y\,dx=\cos y\int\frac{dx}{x+3}=\cos y\,\operatorname{Ln}(x+3)+\phi(y)$$

$$\int Ndy=\int_{x=cte}\left[\frac{1}{y}-\operatorname{seny}\,\operatorname{Ln}(5x+15)\right]dy=\int\frac{dy}{y}-\operatorname{Ln}(5x+15)\int\operatorname{seny}\,dy=$$

$$\int Ndy=\operatorname{Ln}(y)+\operatorname{Ln}(5x+15)\cos y+\phi(x)$$

Aplicando $\operatorname{Ln}(5x+15)=\operatorname{Ln}[5(x+3)]$, $\operatorname{Ln}(ab)=\operatorname{Ln}a+\operatorname{Ln}b$

$$\int Ndy=\operatorname{Ln}y+\operatorname{Ln}(5)\cos y+\operatorname{Ln}(x+3)\cos y+\phi(x)$$

c) Obtención de los ϕ [var]

$$\phi(y)=\operatorname{Ln}y+\operatorname{Ln}(5)\cos y$$

$$\phi(X)=0$$

d) Sustituyendo los ϕ [var]

$$\int Mdx=\cos y\,\operatorname{Ln}(x+3)+\operatorname{Ln}y+\operatorname{Ln}(5)\cos y$$

$$\int Ndy=\operatorname{Ln}y+\operatorname{Ln}(5)\cos y+\operatorname{Ln}(x+3)\cos y$$

e) Obtención de la solución general: de $\int Ndy$

$$\operatorname{Ln}y+\operatorname{Ln}(5)\cos y+\operatorname{Ln}(x+3)\cos y=C$$

Aplicando $c\operatorname{Ln}a+c\operatorname{Ln}b=c\operatorname{Ln}(ab)$

$$\boxed{\operatorname{Ln}y+\cos(y)\operatorname{Ln}(5x+15)=C}$$

SOLUCION GENERAL

PROBLEMAS PROPUESTOS PARA RESOLVERSE POR EXACTAS

Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales

1) $(2x\cos y+3x^2y)dx+(x^3-x^2\operatorname{seny}-y)dy=0$

2) $(x+\operatorname{seny})dx+(x\cos y-2y)dy=0$

3) $\frac{dy}{dx}=\frac{2+ye^{(xy)}}{2y-xe^{(xy)}}$

4) $\frac{dy}{dx}=\frac{3yx^2}{x^3+2y^4}$

5) $2xydx+(1+x^2)dy=0$

6) $(y\operatorname{sen}x+xy\cos x)dx+(x\operatorname{sen}x+1)dy=0$

7) $[e^{2y}-y\cos(xy)+2y]dx+[2xe^{2y}-x\cos(xy)+2y+2x]dy=0$

8) $y^3\operatorname{sen}(2x)dx-3y^2\cos^2xdy=0$

9) $\left(\frac{y^2-2x^2}{xy^2-x^3}\right)dx+\left(\frac{2y^2-x^2}{y^3-x^2y}\right)dy=0$

10) $\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}+\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy=0$

11) $\frac{3y^2dx}{x^2+3x}+\left[2y\operatorname{Ln}\left(\frac{5x}{x+3}\right)+3\operatorname{seny}\right]dy=0$

SOLUCIONES

1) $x^2\cos y+x^3y-y^2/2=C$

2) $\frac{1}{2}x^2+x\operatorname{sen}(y)-y^2=C$

3) $2x+e^{(xy)}-y^2=C$

4) $x^3y+\frac{2y^5}{5}=C$

5) $(x^2+1)y=C$

6) $xy\operatorname{sen}(x)+y=C$

7) $xe^{2y}-\operatorname{sen}(xy)+y^2+2yx=C$

8) $y^3(1+\cos 2x)=C$

9) $x^2y^2(x^2-y^2)=C$

10) $x+\sqrt{x^2+y^2}=C$

11) $y^2\operatorname{Ln}\left(\frac{5x}{x+3}\right)-3\cos y=c$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

FACTORES INTEGRANTES

Una ecuación diferencial

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

puede transformarse en una ecuación diferencial exacta, multiplicándola por una expresión apropiada.Esta expresión se denomina factor integrante o factor de integración.

Un método para encontrar la solución general, es multiplicar toda la ecuación diferencial por un factor integrante, el cual se obtiene de acuerdo a las caracteristicas de los términos que aparecen en la ecuación diferencial

Utilizaremos la siguiente tabla:

RELACION	FACTOR INTEGRANTE	DIFERENCIAL EXACTA
$xdy + ydx$	1	$d(xy)$
$xdy - ydx$	$1/x^2$	$d(y/x)$
$xdy - ydx$	$1/y^2$	$d(-x/y)$
$xdy - ydx$	$1/xy$	$d(\ln y/x)$
$xdy - ydx$	$1/(x^2+y^2)$	$d(\tan^{-1} y/x)$
$xdy + ydx$	$1/(xy)^n$	$d\left[\frac{-1}{(n-1)(xy)^{n-1}}\right]$ Si $n \neq 1$.
$xdy + ydx$	$1/(xy)^n$	$d[\ln(xy)]$ Si $n = 1$
$xdy + ydx$	$1/(x^2+y^2)^n$	$d\left[\frac{-1}{2(n-1)(x^2+y^2)^{n-1}}\right]$ Si $n \neq 1$
$xdy + ydx$	$1/(x^2+y^2)^n$	$d\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right]$ Si $n = 1$
$pydx + qxdy$	$x^{p-1}\,y^{q-1}$	$d(x^p\,y^q)$

Nota: Cuando en la ecuación diferencial aparezca la relación $pydx + qxdy$ donde p y q sean diferenciales de uno o menos uno y al multiplicar la ecuación por $x^{p-1}\,y^{q-1}$,el otro término de la ecuación NO se puede integrar, multiplicaremos toda la ecuación por $\frac{1}{(x^p\,y^q)^a}$ donde a es la potencia que hace que se elimine la variable que no permite que se integre el otro término de la ecuación.

PROBLEMAS RESUELTOS

Ejemplo: dada la ecuación

$xdy + ydx = 7x^6dx - 4y^7dy + sen(2x)dx$

determine su solución general.

SOLUCION

a) Identificación:

Como aparecen los términos xdy + ydx, es de FACTORES INTEGRANTES, sustituiremos $xdy + ydx = d(xy)$ en la ecuación diferencial.

b) Sustitución:

$xdy + ydx = 7x^6dx - 4y^7dy + sen(2x)dx$

$d(xy) = 7x^6dx - 4y^7dy + sen(2x)dx$ como los demás términos ya se pueden integrar igualaremos a 0.

$d(xy) - 7x^6dx + 4y^7dy - sen(2x)dx = 0$

$\int d(xy) - 7\int x^6dx + 4\int y^7dy - \int sen(2x)dx = 0$

$\int d(xy) - 7\int x^6dx + 4\int y^7dy - 1/2\int (2)\,sen(2x)dx = 0$ Integrando

$xy - x^7 + y^8/2 + 1/2\cos(2x) = c$ Multiplicando por dos.

$2xy - 2x^7 + y^8 + \cos(2x) = c$

$\boxed{y(2x + y^7) + \cos(2x) = c + 2x^7}$ SOLUCION GENERAL

Cuando los demás términos no se puedan integrar porque no nos lo permite alguna variable, entonces multiplicaremos toda la ecuación por $1/(xy)^a$, donde a será la potencia de la variable que no nos permite que se integren los otros términos.

EJEMPLO:

Dada la ecuación $xdy + ydx = 5x^3y^5dy$. Encontrar la solución general

SOLUCION

a) Identificación:

Como aparece en la relación xdy + ydx la sustituieremos por d(xy).

Como no se puede integrar (porque aparece x^3), multiplicaremos toda la ecuación por $\{1/(xy)^3\}$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

b) Sustituciones:

$\underline{xdy + ydx} = 5x^3y^5dy$ Sustituyendo $xdy + ydx = d(xy)$

$d(xy) = 5x^3y^5dy$ Multiplicando por $\{1/(xy)^3\}$

$\frac{d(xy)}{(xy)^3} = 5y^2dy$ Igualando a cero.

$(xy)^{-3}d(xy) - 5y^2dy = 0$ Integrando

$\int(xy)^{-3}d(xy) - 5\int y^2dy = 0$

$-\frac{(xy)^{-2}}{2} - \frac{5y^3}{3} = c$ Multiplicando por $(-6x^2y^2)$

$\underline{3 + 10y^5x^2 = c(x^2y^2)}$ SOLUCION GENERAL

EJEMPLO:

Dada la ecuación $xdy - ydx = 7x^8dx + 4x^2dx$, encontrar la solución general.

SOLUCION:

a) Identificación:

Como aparece la relación $xdy - ydx$

Utilizaremos el factor $\frac{1}{x^2}$

b) Productos y sustituciones:

$xdy - ydx = 7x^8dx + 4x^2dx$

Multiplicando por $[\frac{1}{x^2}]$

$\frac{xdy - ydx}{x^2} = 7x^6dx + 4dx$

Aplicando $\frac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$ e igualando a cero.

$d\left(\frac{y}{x}\right) - 7x^6dx - 4dx = 0$ Integramos

$\int d\left(\frac{y}{x}\right) - 7\int x^6dx - 4\int dx = \int 0$

$\frac{y}{x} - x^7 - 4x = c$ Multiplicando por x y agrupando

$\boxed{y = x(c + x^7 + 4x)}$ Solución General.

EJEMPLO:

Dada la ecuación. $xdy - ydx = 9y^2x^2dx + 5y^2x^4dx$.

Encuentre la solución general:

SOLUCION:

a) Identificación:

Como aparece la relación $xdy - ydx$, multiplicaremos entonces toda la ecuación por el factor $\frac{1}{y^2}$

b) Productos y Sustituciones:

$xdy - ydx = 9y^2x^2dx + 5y^2x^4dx$ Multiplicamos por $\left(\frac{1}{y^2}\right)$

$\frac{xdy - ydx}{y^2} = 9x^2dx + 5x^4dx$

$d\left(-\frac{x}{y}\right) - 9x^2dx - 5x^4dx = 0$ Integramos

$\int d\left(-\frac{x}{y}\right) - 9\int x^2dx - 5\int x^4dx = 0$ Aplicamos $\int d(-x/y) = -x/y + c$

$-\frac{x}{y} - 3x^3 - x^5 = c$ Multiplicamos por $(-y)$

$x + 3x^3y + x^5y = cy$ Agrupando

$\boxed{x + x^3y(3 + x^2) = cy}$ Solución General.

EJEMPLO: Dada la ecuación.

$xdy - ydx = 8xy^3dy$; Encuentre las solución general

SOLUCION:

a) Identificación:

Como aparece la relación $xdy - ydx$; multiplicaremos toda la ecuación por el factor $\frac{1}{xy}$

b) Productos y Sustituciones:

$xdy - ydx = 8xy^3dy$ Multiplicamos por $\left(\frac{1}{xy}\right)$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 8y^2dy$ Igualando a cero

$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} - 8y^2dy = 0$ Integrando

$\int\frac{dy}{y} - \int\frac{dx}{x} - 8\int y^2dy = \int 0$

$\ln|y| - \ln|x| - \frac{8y^3}{3} = c$ Multiplicando por 3 y aplicando $c\ln u = \ln u^c$, $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$

$\ln\left(\frac{y^3}{x^3}\right) = c + 8y^3$ Exponenciando

$e^{\ln(y^3/x^3)} = e^{c+8y^3}$ Aplicando $e^{\ln u} = u$; $e^{a+b} = e^a e^b$; $e^c = c$

$\frac{y^3}{x^3} = ce^{8y^3}$ Multiplicamos por x^3

$\boxed{y^3 = cx^3 e^{8y^3}}$ Solución General.

Cuando en los demás términos aparezca $(ax^2+bxy+cy^2)$ donde $a,b,c \Rightarrow R$, realizaremos los siguientes pasos.

1.- Multiplicaremos toda la ecuación por $(1/ax^2+bxy+cy^2)$.

2.- Al realizar el producto anterior, nos quedará $\frac{xdy-ydx}{ax^2+bxy+cy^2}$ ó $\frac{ydx-xdy}{ax^2+bxy+cy^2}$

En uno de los lados de la ecuación, multiplicaremos el numerador y el denominador por $[1/(var.)^2]$ que será la primer variable de nuestra relación es decir, si tenemos $xdy - ydx$ multiplicaremos por $(1/x^2)$ porque primero aparece x ; si tenemos $ydx - xdy$ multiplicaremos por $(1/y^2)$.

3.- Sustituiremos por la derivada del cociente que le corresponde al numerador y se realizarán las operaciones en el denominador.

4.- Llamaremos m a la relación de la derivada, para observar más fácilmente el tipo de integral e integramos.

EJEMPLO: Dada la ecuación.

$xdy-ydx=(y^2+6yx+9x^2)\,e^x dx$: Encuentre su solución general.

SOLUCION:

a) Identificación:

Como aparece la relación $xdy-ydx$ multiplicaremos toda la ecuación por $1/(y^2+6xy+9x^2)$.

b) Productos y Sustituciones:

$xdy-ydx = (y^2+6yx+9x^2)\,e^x dx$ Multiplicamos por $\frac{1}{y^2+6xy+9x^2}$

$\frac{xdy-ydx}{y^2+6yx+9x^2} = e^x dx$

Multiplicamos numerador y denominador por $\frac{1}{x^2}$

$\frac{\frac{xdy-ydx}{x^2}}{(\frac{y}{x})^2+6(\frac{y}{x})+9} = e^x dx$ sustituyendo $\frac{xdy-ydx}{x^2} = d(\frac{y}{x})$

$\frac{d(\frac{y}{x})}{(\frac{y}{x})^2+6(\frac{y}{x})+9} - e^x dx = 0$ Sustituyendo m por $\frac{y}{x}$ para visualizar más fácil la primera cantidad.

$\frac{dm}{m^2+6m+9} - e^x\,dx = 0$ Integramos, aplicando: $m^2+6m+9 = (m+3)^2$

$\int(m+3)^{-2}dm - \int e^x dx = 0$ Aplicando $\int(m+3)^{-2}dm \approx \int u^n du$

$-(m+3)^{-1} - e^x = c$ Multiplicando por $[-(m+3)]$

$1 + (m+3)\,e^x = c(m+3)$ Sustituyendo $m = \frac{y}{x}$

$1 + (\frac{y}{x}+3)\,e^x = c(\frac{y}{x}+3)$ Simplificando

$1 + \left[\frac{(y+3x)}{x}\right]e^x = c\frac{(y+3x)}{x}$ Multiplicando por x

$\boxed{x + (y+3x)\,e^x = c(y+3x)}$ SOLUCION GENERAL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

EJEMPLO: Dada la ecuación

$ydx - xdy = (9x^2 + 25y^2)^3 (9x\,dx + 25y\,dy)$

determine su solución general.

SOLUCION:

a) Identificación:

Como aparece la relación $ydx - xdy$ multiplicamos toda la ecuación por $\dfrac{1}{9x^2 + 25y^2}$

b) Productos y Sustituciones:

$ydx - xdy = (9x^2 + 25y^2)^3 (9x\,dx + 25y\,dy)$ Multiplicando por $\left[\dfrac{1}{9x^2 + 25y^2}\right]$

$\dfrac{ydx - xdy}{9x^2 + 25y^2} = (9x^2 + 25y^2)^2 (9x\,dx + 25y\,dy)$ Multiplicando por $\left[\dfrac{1}{y^2}\right]$ el numerador y el denominador de la izquierda

$$\frac{\dfrac{ydx - xdy}{y^2}}{\dfrac{9x^2 + 25y^2}{y^2}} = (9x^2 + 25y^2)^2 (9x\,dx + 25y\,dy) = 0$$ Aplicamos $d\left(\frac{x}{y}\right) = \dfrac{ydx - xdy}{y^2}$

$$\frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{9\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 25} = (9x^2 + 25y^2)^2 (9x\,dx + 25y\,dy) = 0$$ Sustituyendo $m = x/y$

$$\frac{dm}{9m^2 + 25} = (9x^2 + 25y^2)^2 (9x\,dx + 25y\,dy) = 0$$ Integramos

$$\int \frac{dm}{9m^2 + 25} - \int (9x^2 + 25y^2)^2 (9x\,dx + 25y\,dy) = \int 0 \qquad (1)$$

C) SOLUCION DE INTEGRALES

$\int \dfrac{dm}{9m^2 + 25} \approx \int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} tg^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C$; $u^2 = 9m^2$; $a^2 = 25$ Completamos

$u = 3m$; $a = 5$ Multiplicamos y dividimos por 3

$du = 3dm$

$\int (9x^2 + 25y^2)^2 (9x\,dx + 25y\,dy) \approx \int u\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C$ $u = 9x^2 + 25y^2$

$du = 18x\,dx + 50\,dy$

Completamos, multiplicamos y dividimos entre 2.

OBTENCION DE LA SOLUCION GENERAL

$$\frac{1}{3}\int \frac{(3)dm}{9m^2+25} - \frac{1}{2}\int (9x^2+25y^2)(18xdx+50ydy) = \int 0$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{5}\right) tg^{-1}\left(\frac{3m}{5}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(9x^2+25y^2)^3 = c$$ Multiplicando por 30 y sustituimos $m = \dfrac{x}{y}$

$$\boxed{2\,tg^{-1}\left(\frac{3x}{5y}\right) - 5(9x^2+25y^2)^3 = c}$$ Solución General.

Cuando la ecuación tenga la forma $\dfrac{xdy - ydx}{ydx - xdy} = axdx + bydy$;

a,b es IR.

Aplicaremos el hecho de que $axdx + bydy$ es la derivada de $d\left(\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{2}y^2\right)$ y lo que haremos será multiplicar toda la ecuación por

$$\left(\frac{1}{\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{2}y^2}\right)$$

EJEMPLO: Dada la ecuación

$xdy - ydx = 8xdx - 200ydy$ Encontrar su solución general

SOLUCION:

a) Identificación:

como tiene la forma $xdy - ydx = axdx + bydy$ entonces

$8xdx - 200ydy = d(4x^2 - 100y^2)$

es decir, multiplicaremos toda la ecuación por $\left[\dfrac{1}{4x^2 - 100y^2}\right]$

b) Productos y Sustituciones:

$xdy - ydx = 8xdx - 200ydy$ Multiplicamos por $\left[\dfrac{1}{4x^2 - 100y^2}\right]$

$\dfrac{xdy - ydx}{4x^2 - 100y^2} = \dfrac{8xdx - 200ydy}{4x^2 - 100y^2}$ Multiplicamos por $\left[\dfrac{1}{x^2}\right]$ El numerador y el denominador de la izquierda.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$\frac{\frac{xdy - ydx}{x^2}}{4 - 100(\frac{y}{x})^2} - \frac{8xdx - 200ydy}{4x^2 - 100y^2} = 0 \quad \text{Aplicando} \quad d(y/x) = \frac{xdy - ydx}{x^2}$$

$$\frac{d(\frac{y}{x})}{4 - 100(\frac{y}{x})^2} - \frac{8xdx - 200ydy}{4x^2 - 100y^2} = 0 \quad \text{sustituimos} \quad m = \frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dm}{4 - 100m^2} - \int \frac{8xdx - 200ydy}{4x^2 - 100y^2} = \int 0 \quad \text{Integramos}$$

c) Solución de integrales:

$$\int \frac{dm}{4 - 100m^2} \approx \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a + u}{a - u} + C$$

$u^2 = 100m^2$; $a^2 = 4$
$u = 10m$; $a = 2$
$du = 10dm$

Completamos multiplicando y dividiendo por 10

$$\int \frac{8x\,dx - 200y\,dy}{4x^2 - 100y^2} \approx \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$u = 4x^2 - 100y^2$
$du = 8x\,dx - 200y\,dy$

d).- Obtención de la solución general:

$$\frac{1}{10}\int \frac{(10)\,dm}{4 - 100m^2} - \int \frac{8x\,dx - 200y\,dy}{4x^2 - 100y^2} = \int 0$$

Multiplicando por 40

$$(\frac{1}{10})(\frac{1}{4}) \ln (\frac{2+10m}{2-10m}) - \ln (4x^2 - 100y^2) = C$$

y Sustituyendo $m = \frac{y}{x}$

$$\ln \left(\frac{2 + \frac{10y}{x}}{2 - \frac{10y}{x}} \right) - 40 \ln (4x^2 - 100y^2) = C$$

Aplicando $2 + \frac{10y}{x} = \frac{2x + 10y}{x}$

$2 - \frac{10y}{x} = \frac{2x - 10y}{x}$

$$\ln \left[\frac{2x + 10y}{2x - 10y} \right] - \ln (4x^2 - 100y^2)^{40} = C \quad \text{Aplicando } \ln(\frac{a}{b}) - \ln c = \ln(\frac{a}{bc})$$

$$e^{\ln \left[\frac{2x + 10y}{(2x - 10y)(4x^2 - 100y^2)^{40}} \right]} = e^C \quad \text{Exponenciando}$$

Aplicando $e^{\ln u} = u$; $e^c = c$

$$\frac{2x + 10y}{(2x - 10y)(4x^2 - 100y^2)^{40}} = C \quad \text{Despejando.}$$

$$2x + 10y = C(2x - 10y)(4x^2 - 100y^2)^{40}$$

Aplicando
$4x^2 - 100y^2 = (2x - 10y)(2x + 10y)$
Dividiendo ÷ $(2x+10y)$
Simplificando.

$$2x + 10y = C(2x - 10y)(2x + 10y)^{40}(2x - 10y)^{40}$$

$$1 = C(2x - 10y)^{41}(2x + 10y)^{39}$$

$$\boxed{1 = C(4x - 100y)^{39}(2x - 10y)^2}$$

SOLUCION GENERAL

Cuando en la ecuación diferencial aparezca la relación $py\,dx + qx\,dy$, aplicaremos $(py\,dx + qx\,dy)(x^{p-1}y^{q-1}) = d(x^p y^q)$, es decir multiplicaremos toda la ecuación por el factor $x^{p-1}y^{q-1}$ y al hacer el producto, sustituiremos $(py\,dx + qx\,dy)(x^{p-1}y^{q-1})$ por la derivada que representa $d(x^p y^q)$.

Cuando los demás términos se pueden integrar (después de haber multiplicado por $x^{p-1}y^{q-1}$) integraremos y encontraremos la solución general

EJEMPLO: Dada la ecuación

$5ydx - 3xdy = y^4x^7dx$ Encontrar su solución general.

SOLUCION:

a) Identificación:
Como aparece la relación $py\,dx + qx\,dy$ donde $p = 5$; $q = -3$, el factor = x^4y^{-4}

b) Productos y Sustituciones:

$5ydx - 3xdy = y^4x^7dx$ Multiplicamos por x^4y^{-4}

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$(5ydx - 3xdy)(x^4y^4) = x^{11}dx$ Sustituimos $d(x^py^q)$

$d(x^5y^3) - x^{11}dx = 0$ Como $x^{11}dx$ se puede integrar, Integramos

$\int d(x^5y^3) - \int x^{11}dx = \int 0$

$x^5y^3 - \frac{x^{12}}{12} = c$ Multiplicamos por $12y^3$

$12x^5 - x^{12}y^3 = cy^3$ Agrupando

$\boxed{12x^5 = (c+x^{12})y^3}$ Solución General

Si después de multiplicar por $x^{p-1}y^{q-1}$, el otro término no se puede integrar, multiplicaremos toda la ecuación por $\frac{1}{(x^py^q)^a}$ donde esta realación puede quedar con la variable a la potencia con la cual elimine a lo que no permite que se integre el otro término

EJEMPLO: dada la ecuación

$7xdy + 3ydx = x^4y^9dy$ Encontrar su solución general

SOLUCION:

a) Identificación:

Como aparece la relación $3ydx + 7xdy$, $p = 3$; $q = 7$; Factor $= x^2y^6$

b) Productos y Sustituciones:

$7xdy + 3ydx = x^4y^9dy$ Multiplicamos por x^2y^6

$(7xdy + 3ydx)(x^2y^6) = x^6y^{15}dy$ Aplicamos $d(x^py^q)$

$d(x^3y^7) - x^6y\ dy = 0$ Como x^6 no permite que se integre el 2° término multiplicamos $\left[\frac{1}{(x^3y^7)^2}\right]$

$\frac{d(x^3y^7)}{(x^3y^7)^2} - \frac{x^6y\ dy}{(x^3y^7)^2} = 0$ Simplificando

$(x^3y^7)^{-2}d(x^3y^7) - ydy = 0$ Integramos

$\int (x^3y^7)^{-2}d(x^3y^7) - \int ydy = \int 0$ Aplicamos $\int (x^3y^7)^{-2}d(x^3y^7) \approx \int u^n du$

$-(x^3y^7)^{-1} - y^2/2$ Multiplicamos por $\left[-2(x^3y^7)\right]$

$\boxed{2 + y^9x^3 = c(x^3y^7)}$ Solución General.

NOTA:

No siempre van a aparecer nuestros términos $pydx + qxdy$ despejados, cuando esté la ecuación toda revuelta tendremos que darle la forma, es decir, colocar nuestros términos $pydx + qxdy$ de un lado y los demás del otro.

EJEMPLO: Resolver $(y - xy^2)dx + (x + x^2y^2)dy = 0$

SOLUCION:

a) Identificación:

Como podemos ver esta ecuación no tiene la forma de ningún método de los anteriores para checar si es de FACTORES INTEGRANTES realizaremos los productos y checaremos si podemos encontrar la relación $pydx + qxdy$.

Para este ejercicio:

$ydx - xy^2dx + xdy + x^2y^2dy = 0$ Acomodándola.

$ydx + xdy = xy^2dx - x^2y^2dy$ Como aparece $xdy + ydx$; la sustituimos

$d(xy) - xy^2dx + x^2y^2dy = 0$ Checando los otros términos vemos que uno no se puede integrar por la y^2 y el otro por x^2

$\left[d(xy) - xy^2dx + x^2y^2dy = 0\right]\left[\frac{1}{(xy)^2}\right]$ Multiplicaremos por $\left[\frac{1}{(xy)^2}\right]$

$(xy)^{-2}d(xy) - \frac{dx}{x} + dy = 0$ Integramos

$\int (xy)^{-2}d(xy) - \int \frac{dx}{x} + \int dy = \int 0$ Aplicando $\int (xy)^{-2}d(xy) \approx \int u^n du$

$-(xy)^{-1} - \ln|x| + y = c$ Multiplicando por $[-xy]$

$1 + xy\ln|x| - xy^2 = cxy$ Despejamos

$\boxed{1 + xy\ln|x| = xy(c + y)}$ Solución General.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

PROBLEMAS PROPUESTOS PARA RESOLVERSE POR FACTORES INTEGRANTES

Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales

1) $xdy + ydx = x^4y^8dy$

2) $3ydx = xy^3dy - 5xdy$

3) $xdy - ydx = xy^5dy$

4) $\frac{dy}{dx} = \frac{3yx^2}{x^3 + 2y^4}$

5) $(y - xy^2)dx + (x + x^2y^2)dy = 0$

6) $\frac{dy}{dx} = \frac{xy2 - y}{x}$

7) $(x^3y^2 + x)dy + (x^2y^3 - y)dx = 0$

8) $4ydx + xdy = xy^2dx$

9) $(y^2 - y)dx + xdy = 0$

10) $ydx - xdy = (x^2 + y^2)^2(xdx + ydx)$

11) $xdy - ydx = (x^2 + xy - 2y^2)dx$

12) $xdx + ydy = (x^2 + y^2)^3(xdy - ydx)$

13) $xdy - ydx = 32ydy + 98xdx$

SOLUCIONES

1) $5 = (c - 3y^5)(x^3y^3)$

2) $\ln(x^3y^5)^3 = y^3 + C$

3) $y^5 = Cx^5e^{y^5}$

4) $3x^3 = (2y^3 + C)y$

5) $y^2x = xy(\ln x + C) + 1$

6) $1 + xy\ln(x) = Cxy$

7) $\ln(y/x)^2 + (xy)^2 = C$

8) $3 = (x + cx^4)y$

9) $x = (x + C)y$

10) $4\text{arc tg}(x/y) = (x^2 + y^2)^2 + C$

11) $\ln\left(\frac{x + 2y}{x - y}\right) = 3x + C$

12) $6(x^2 + y^2)^3 \text{arc tg}(x/y) + 1 = C(x^2 + y^2)^3$

13) $\text{arc tg}(4y/7x) = \ln(49x^2 + 16y^2)^{28} + C$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Se dice que una ecuación diferencial de cualquier orden es lineal, cuando es de primer grado respecto de la variable dependiente y sus derivadas. En otras palabras, una ecuación diferencial es lineal cuando la variable del diferencial del numerador (de la derivada) aparece solo elevada a la primera potencia dentro de la ecuación diferencial. Tomando por ejemplo, la variable y como dependiente, su ecuación general para una ecuación diferencial lineal en y es:

$\frac{dy}{dx} + Py = Q$; donde P y Q Son funciones de x solamente

Para resolver este tipo de ecuaciones multiplicaremos toda la ecuación diferencial por el factor integrante:
FACTOR = $e^{\int Pdx}dx$; donde P = coeficiente de la variable lineal (con todo y el signo), los diferenciales son los de la parte del denominador de la derivada. Si la ecuación fuera lineal en x, tendrá la forma:
$\frac{dx}{dy} + Px = Q$; donde P y Q son funciones de y solamente y el factor = $e^{\int Pdy}dy$

Para este método aplicaremos el concepto:

$$\left(\frac{dy}{dx} + Py\right)e^{\int Pdx}dx = d\left(ye^{\int Pdx}\right)$$

De esto, vemos que multiplicando la parte lineal por el FACTOR $e^{\int Pdx}dx$ este producto será siempre igual a la derivada de un producto cuyos factores serán siempre la variable lineal multiplicada por el FACTOR $e^{\int Pdx}$ es la clave del método.

PASOS PARA LA OBTENCION DE LA SOLUCION GENERAL

1.- Colocar la ecuación en la forma lineal.
2.- Determinar el coeficiente de la variable lineal (con todo y signo) P.
3.- Encontrar el FACTOR $e^{\int Pd(var)}d(var)$
4.- Multiplicar toda la ecuación por el FACTOR.
5.- Aplicar la identidad $dy + Py\left(e^{\int Pdx}dx\right) = d\left(y\,e^{\int Pdx}\right)$
6.- Integrar, y la solución será la solución general.

NOTA: Puede ser que la ecuación diferencial no se nos de en forma de derivadas sino de diferenciales por lo tanto, para pasar de diferenciales a derivadas dividiremos toda la ecuación entre la diferencial que aparezca en un mayor número de términos por ejemplo:

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$x^2dy - \text{sen}(2x)\,dx + 3xydx = 0$

Dividiremos entre el dx dado que aparecen más términos con este diferencial. Dividiendo

$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right) - \text{sen}(2x) + 3xy = 0$ Como el coeficiente de la derivada debe ser 1 (uno) entonces dividiremos entre x^2 dandole la forma

$\frac{dy}{dx} - \frac{\text{sen}(2x)}{x^2} + \frac{3y}{x} = 0$

$\frac{dy}{dx} + \frac{3y}{x} = \frac{\text{sen}(2x)}{x^2}$ Donde vemos que es ecuación diferencial lineal en y

PROBLEMAS RESUELTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones

1) $dy\,(1+2x\,\text{ctg}\,y) = dx$

Solución:

a) Identificación:

Dividiremos entre dy para darle la forma a la ecuación y esta quedaría como

$1 + 2x\,\text{ctg}\,y = \frac{dx}{dy}$ Colocándola en la forma lineal

$\frac{dx}{dy} - 2x\,\text{ctg}\,y = 1$ Donde vemos que es lineal en x

b) Obtención del factor: $P = 2\text{ctg}(y)$

$\text{FACTOR} = e^{\int P dy}\,dy = e^{-2\int \text{ctg}(y)dy}\,dy = e^{-2\,Ln(\text{sen}\,y)}\,dy$

Aplicando $cLnu = Lnu^c$

$\text{FACTOR} = e^{Ln(\text{sen}\,y)^{-2}}\,dy = (\text{sen}\,y)^{-2}\,dy$ Aplicamos $\frac{1}{\text{sen}\,y} = \text{csc}\,y$

$\text{FACTOR} = \text{csc}^2 y\,dy$

c) Producto de la lineal por el FACTOR:

$\left[\frac{dx}{dy} - 2x\,\text{ctg}(y) = 1\right]\left[\text{csc}^2 y dy\right]$ Multiplicando

$\left(\frac{dx}{dy} - 2x\,\text{ctg}(y)\right)\left(\text{csc}^2 y dy\right) = \text{csc}^2 y dy$

Aplicamos $\left(\frac{dx}{dy} + Px\right)\left(e^{\int P dy}\,dy\right) = d\left(xe^{\int P dy}\right)$

$d\left(x\text{csc}^2 y\right) - \text{csc}^2 y dy = 0$ Integramos

$\int d(x\text{csc}^2 y) - \int \text{csc}^2 y dy = \int 0$

d) Solución de integrales:

$\int d(x\text{csc}^2 y) \approx du = u + c\,;\ u = x\text{csc}^2 y$

$\int \text{csc}^2 y dy \approx \text{csc}^2 u du = -\text{ctg}(u) + C$; completa

e) Obtencion de la solución general:

$\int d(x\text{csc}^2 y) - \text{csc}^2 y dy = \int 0$ Integrando

$\boxed{x\text{csc}^2 y + \text{ctg}(y) = C}$ SOLUCION GENERAL

2) $x\left(\frac{dy}{dx}\right) - 2y = x^2 + x$

SOLUCION .-

a) Identificación:

Para darle la forma dividiremos entre x la ecuación y esta quedará como:

$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = x + 1$; es lineal en y

b) Obtención del FACTOR:

Primeramente encontramos P y es $P = -\frac{2}{x}$

$\text{FACTOR} = e^{\int P dx}\,dx = e^{-2\int \frac{dx}{x}}\,dx = e^{-2Ln\,x}\,dx = e^{Ln\,x^{-2}}\,dx \Rightarrow$ Aplicamos $e^{Ln\,u} = u$

$\boxed{\text{FACTOR} = x^{-2}\,dx}$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

c) Producto e identidad:

$\left[\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = x + 1\right]\left[x^{-2}\,dx\right]$ Multiplicando

$\left[\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x}\right]\left[x^{-2}dx\right] = x^{-1}dx + x^{-2}\,dx$ Aplicando paso 5

$d(yx^{-2}) - \frac{dx}{x} - x^{-2}\,dx = 0$ Integramos

$yx^{-2} - Ln|x| + x^{-1} = C$ Multiplicando por x^2

$y - x^2 Ln|x| + x = Cx^2$ Despejando

$\boxed{y + x = x^2(C + Ln|x|)}$ SOLUCION GENERAL

3) $t\,ds = (3t + 1)sdt + t^3 e^{3t}\,dt$

SOLUCION:

a) Identificación:

Para checar si es lineal hay que pasarla a derivadas por lo tanto dividiremos entre dt dado que tiene el coeficiente con mayor número de términos, y quedaría:

$t\left(\frac{ds}{dt}\right) = (3t + 1)s + t^3 e^{3t}$ dividiendo entre t u dándole la forma a la ecuación tenemos

$\frac{ds}{dt} - (3 + \frac{1}{t})s = t^2 e^{3t}$ vemos que es lineal en s

b) Obtención del "FACTOR"

Primero encontramos P ; $P = -3 - \frac{1}{t}$

Factor $= e^{\int p dt}dt = e^{\int(-3-1/t)dt}dt = e^{-3\int dt - \int dt/t}\,dt$

$= e^{-3-\ln t}\,dt$ Aplicando $e^{-a-b} = e^{-a}e^{-b}$

Factor $= e^{-3t}e^{-\ln t}dt = e^{-3t}e^{\ln t^{-1}}\,dt = e^{-3t}(t^{-1})dt$

Factor $= e^{-3t}(t^{-1})dt$

c) Producto e identidad:

$\left[\frac{ds}{dt} - (3 + \frac{1}{t})s = t^2 e^{3t}\right]\left[e^{-3t}(t^{-1})dt\right]$ Multiplicando

$\left[\frac{ds}{dt} - (3 + \frac{1}{t})s\right]\left[e^{-3t}(t^{-1})dt\right] = tdt$ Aplicando paso 5

$d[se^{-3t}(t^{-1})] - tdt = 0$ Integrando

$\int d[se^{-3t}(t^{-1})] - \int tdt = \int 0$

$se^{-3t}(t^{-1}) - t^2/2 = C$ Multiplicando por $(2te^{3t})$

$2s - t^3 e^{3t} = cte^{3t}$ Despejando

$\boxed{2s = te^{3t}(c + t^2)}$ SOLUCION GENERAL

NOTA:

Cuando los dos diferenciales tienen coeficientes con igual número de términos, entonces checaremos cual varible pudiera ser la lineal (la que aparezca elevada solo a la primera potencia) para darle la forma lineal en esta variable.

EJEMPLO:

4) $(1+xy)dx = (1+x^2)dy$

SOLUCION:

a) Identificación:

Para darle la forma, vemos que los dos diferenciales tienen el mismo número de términos en su coeficiente, por lo tanto, para saber entre entre qué diferencial dividiremos observaremos qué variable aparece elevada a la primera potencia.

Vemos que y solo aparece a la primera potencia por lo tanto, colocaremos la ecuación lineal en y.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$(1 + xy)dx = (1 + x^2)dy$ Dividiendo entre dx

$(1 + xy) = (1 + x^2)\frac{dy}{dx}$ Dividiendo entre $(1 + x^2)$

$\frac{(1 + xy)}{1 + x^2} = \frac{dy}{dx}$ Aplicando $\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

$\frac{1}{1 + x^2} + \frac{xy}{1 + x^2} = \frac{dy}{dx}$ Dándole la forma

$\frac{dy}{dx} - \frac{xy}{1 + x^2} = \frac{1}{1 + x^2}$ Vemos que sí es lineal en y

b) Obtención del FACTOR

Primeramente $P = -\frac{x}{1+x^2}$

$$FACTOR = e^{\int P dx} dx = e^{-\frac{1}{2}\int \frac{(2)x dx}{1+x^2}} dx = e^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)} dx = e^{\ln(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}} dx$$

$$\boxed{FACTOR = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx}$$

c) Producto e identidad:

$\left[\frac{dy}{dx} - \frac{xy}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}\right]\left[(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx\right]$ Multiplicando

$\left[\frac{dy}{dx} - \frac{xy}{1+x^2}\right]\left[(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx\right] = \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$ Aplicando paso 5

$d\left[y(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right] - \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$ Integramos

$$\int d\left[y(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right] - \int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int 0$$

d) Solución de integrales:

$$\int d\left[y(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right] = \int du = u + c$$

$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \Longrightarrow$ Sustitución Trigonometrica

$$\times \int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{(1+\tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{(\sec^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^3\theta}$$

$\frac{x}{1} = \tan\theta;\ dx = \sec^2\theta\, d\theta$ $\qquad 1 + \tan\theta = \sec^2\theta$

$$\int \frac{d\theta}{\sec\theta} = \int \cos\theta\, d\theta = \sin\theta + c \quad \text{de}$$

$\sin\theta = \frac{op}{hip} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c$$

e) Obtención de la solución general:

$$\int d\left[y(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right] - \int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int 0$$ Integramos

$y(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = C$ Multiplicamos por $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$

$y - x = c\sqrt{1+x^2}$ Despejando

$\boxed{y = c\sqrt{1+x^2} + x}$ Solución General.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

5) $\frac{dx}{dy} + \left(\frac{3}{y}\right)x = 2y$; y=1 cuando x=2

SOLUCION:

a) Identificación :

Vemos que la ecuación es lineal en x .

b) Obtención del FACTOR:

P=3/y

$$\text{FACTOR} = e^{\int P\,dy} = e^{3\int \frac{dy}{y}} = e^{3\ln y} = e^{\ln y^3} = y^3 \quad \boxed{y^3 dy = \text{FACTOR}}$$

c) Producto e identidad:

$$\left[\frac{dx}{dy} + \left(\frac{3}{y}\right)x = 2y\right]\left[y^3 dy\right]$$ Multiplicando

$$\left[\frac{dx}{dy} + \left(\frac{3}{y}\right)x\right]\left[y^3 dy\right] = 2y^4 dy$$ Aplicando el paso 5.

$$d(xy^3) - 2y^4 dy = 0$$ Integramos

$$\int d(xy^3) - 2\int y^4 dy = \int 0$$ Aplicando $\int d(xy^3) \approx \int du = u + c$

$$xy^3 - \frac{2y^5}{5} = c$$ Multiplicamos por 5 y factorizando.

$$\boxed{y^3(5x - 2y^2) = c}$$ Solución General.

d) Obtención de la solución particular:

Sustituyendo x = 2 y y = 1 en la solución general.

$$(1)^3\,[5(2) - 2(1)^2] = c \;;\; \boxed{c = 8}$$ Sustituyendo C en la solución general.

$$\boxed{y^3(5x - 2y^2) = 8}$$ Solución Particular

PROBLEMAS PROPUESTOS PARA RESOLVER POR ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales

1) $\frac{dy}{dx} - 3y = 6$

2) $\frac{dy}{dx} + y = \text{sen } x$

3) $y' - 2xy = x$

4) $y' - 7y = \text{sen } (2x)$

5) $x\left(\frac{dy}{dx}\right) - 4y = x^6 e^x$

6) $(x^2 + 9)\frac{dy}{dx} + xy = 0$

7) $\cos(x)\frac{dy}{dx} + y \text{ sen } x = 1$

8) $\cos^2 x \text{ sen} x\, dy + (y\cos^3 x - 1)\, dx = 0$

9) $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1 - e^{-2x}}{e^x + e^{-x}}$

10) $\frac{dy}{dx} + y \text{ tg } x = \cos^2(x)$; y= - 1 Cuando x = 0

11) $(x + 1)\frac{dy}{dx} + y = \ln(x)$; y = 10 Cuando x = 1

SOLUCIONES:

1) $y + 2 = ce^{3x}$

2) $2y + \cos x = ce^{-x} + \text{sen } x$

3) $2y + 1 = ce^{x^2}$

4) $53y + 2\cos(2x) + 7\text{ sen }(2x) = ce^{7x}$

5) $y + x^4 e^x = x^4(xe^x + c)$

6) $y\sqrt{x^2 + 9} = c$

7) $y = \text{sen }(x) + [\cos(x)]\,c$

8) $y \text{ sen } x = \text{tg }(x) + c$

9) $ye^x = \ln(e^x + e^{-x}) + c$

10) $y = \text{sen }(x)\cos(x) - \cos(x)$

11) $(x + 1)\,y = x \ln(x) - x + 21$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

ECUACIONES DIFERENCIALES REDUCIBLES A LINEALES.

Una ecuación diferencial reducible a lineal es aquella que tiene la forma (para y).

(1) $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$ donde p ,q $\Rightarrow$ f(x)

Es decir parece lineal pero la variable aparece a la primera potencia (como en lineal), pero también aparece elevada a otra potencia en otro término. También puede ser que la variable este dentro de una función, con lo cual será reducible a la lineal. La ecuación (1) se denomina ecuación de Bernoulli.

Como vimos en lineales $e^{\int Pdx}\, dx \left\{\frac{dy}{dx} + Py\right\} = d\left\{ye^{\int Pdx}\right\}$ entonces, es reducible a lineal, lo que haremos será sustituir la relación $ye^{\int Pdx}$ por la nueva variable v.

$v = ye^{\int Pdx}$ despejando y ; $y = v\,e^{-\int Pdx}$

METODO:

Tomando como base la ecuación $\frac{dy}{dx} + Py = Q\,y^n$

1.- Sustituiremos la variable lineal (y) por el producto de la nueva variable v multiplicada por el factor de lineales pero con la potencia de signo contrario , o sea $y = ve^{-\int Pdx}$

2.- Diferenciando la ecuación anterior encontraremos el valor del diferencial el cual, también será sustituido.

3.- Las sustituciones de la variable y su diferencial se harán en la ecuación pero puesta en diferenciales, no en derivadas. Para pasar de derivadas a diferenciales, multiplicaremos por el diferencial del denominador.

4.- La ecuación resultante se resolverá por separación de variables.

5.- Ya encontrada la solución sustituiremos $v = ye^{\int Pdx}$ es decir, se despeja v de la ecuación del paso 1.

PROBLEMAS RESUELTOS

Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones.

1) $\frac{dy}{dx} + \left\{\frac{1}{(x-2)}\right\}y = 5(x-2)\sqrt{y}$

SOLUCION:

a) Identificación:
Como la variable del diferencial del numerador aparece elevada a la primera potencia pero también aparece elevada a la un medio (la raíz cuadrada) entonces es reducible a lineal.

b) Sustituciones:
Primeramente determinaremos P igual que en lineales. $P = \frac{1}{x-2}$ como y es la supuesta lineal entonces será la que sustituiremos.

$y = ve^{-\int Pdx} = ve^{-\int \frac{dx}{x-2}} = ve^{-\ln(x-2)} = ve^{\ln(x-2)^{-1}}$

$y = v(x-2)^{-1}$ diferenciando

$dy = -v(x-2)^{-2}dx + (x-2)^{-1}dv$

Como la ecuación nos la dan en derivadas, hay que pasarla a diferenciales multiplicando por dx y queda:

$dy + \left\{\frac{1}{x-2}\right\} y\,dx = 5(x-2)\sqrt{y}\,dx$ Sustituyendo y y dy

$-v(x-2)^{-2}dx + (x-2)^{-1}dv + \left\{\frac{1}{x-2}\right\}v(x-2)\,dx = 5(x-2)\sqrt{v(x-2)^{-1}}dx$ Simplificando

$(x-2)^{-1}dv = 5(x-2)^{1/2}\sqrt{u}\,dx$ (I)

c) Resolviendo por separación de variables:

$FACTOR = \left[\frac{1}{(x-2)^{-1}\sqrt{v}}\right]$ Multiplicando la ecuación (I) por el factor igualado a cero

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$\left[(x-2)^{-1}dv - 5(x-2)^{1/2}\sqrt{v}\,dx = 0\right]\left[\frac{1}{(x-2)^{-1}\sqrt{v}}\right]$ Multiplicando

$v^{-1/2}dv - 5(x-2)^{3/2}dx = 0$ Integramos

$\int v^{-1/2}dv - 5\int (x-2)^{3/2}dx = 0$ Aplicando $\int u\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$

$2v^{1/2} - 2(x-2)^{5/2} = C$ Dividiendo entre 2

$v^{1/2} - (x-2)^{5/2} = C$ de b) $v = y(x-2)$ Sustituyendo

$\left[y(x-2)\right]^{1/2} - (x-2)^{5/2} = C$ factorizando

$(x-2)^{1/2}\left[\sqrt{y} - (x-2)^2\right] = C$ desarrollando $(x-2)^2$

$\boxed{(x-2)^{1/2}(\sqrt{y} - x^2 + 4x - 4) = C}$ SOLUCION GENERAL

2) $dy - y\,sen(x)\,dx = y\ln(ye^{\cos x})\,dx$

a) Identificación:
Pasándola a derivadas dividiremos entre dx

$\frac{dy}{dx} - y\,sen(x) = y\ln(ye^{\cos x})$ como y la supuesta lineal, aparece a la primera potencia pero también dentro de una función, en este caso un logaritmo natural, entonces es reducible a lineal.

b) Sustituciones:

$P = -sen\,x$ Como y es la variable lineal

$y = v\,e^{-\int P dx} = ve^{\int sen\,x dx} =$ $y = v\,e^{-\cos x}$ Diferenciando

$dy = ve^{-\cos x}sen\,x\,dx + e^{-\cos x}dv$

$dy - y\,sen\,x\,dx = y\ln(y\,e^{-\cos x})dx$ Sustituyendo y y dy En la ecuación diferencial

$v\,e^{-\cos x}sen\,x\,dx + e^{-\cos x}dv - v\,e^{-\cos x}sen\,x\,dx = v\,e^{-\cos x}\ln[ve^{-\cos x}e^{\cos x}]\,dx$

$e^{\cos x}dv = v\,e^{\cos x}\ln(v)\,dx$ Dividiendo entre $e^{-\cos x}$ e igualando a cero

$dv - v\ln(v)\,dx = 0$

c) Resolviendo por separación de variables :

FACTOR = $\left[\frac{1}{v\ln(v)}\right]$ Multiplicamos la ecuación por este factor

$\left[dv - v\ln(v)\,dx = 0\right]\left[\frac{1}{v\ln(v)}\right]$

$\frac{dv}{v\ln(v)} - dx = 0$

$\int\frac{dv}{v\ln(v)} - \int dx = \int 0$

d) Solución de integrales

$\int\frac{dv}{v\ln(v)} \approx \int\frac{du}{u} = \ln|u| + c\ ;\ u = \ln|v|\ ;\ du = \frac{dv}{v}\ ;$

e) Obtención de la solución General:

$\int\frac{dv}{v\ln(v)} - \int dx = \int 0$ Integrando

$\ln[\ln(v)] - x = c$ Despejando

$\ln[\ln(v)] = c + x$ Exponenciando

$e^{\ln[\ln(v)]} = e^{c+x}$ Aplicando $e^{\ln u} = u\ ;\ e^{a+b} = e^a e^b\ ;\ e^c = c$

$\ln(v) = ce^x$ de b) $y = v\,e^{-\cos x}$ $v = y\,e^{\cos x}$ Sustituimos

$\boxed{\ln(y\,e^{\cos x}) = c\,e^x}$ Solución General.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

3.- $\frac{dx}{dy} + x\,ctg\,(y) = \frac{x \,sen\, y \cos y}{x^2 sen^2 y + 1}$

SOLUCION:

a) Identificación:

Es reducible a lineal en x porque aparece elevada a la primera potencia y también elevada a otra potencia.

b) Sustituciones:

$P = ctg\,(y)$ Como x es la supuesta lineal

$x = v\,e^{-\int P dy} = v\,e^{-\int ctg\,y\,dy} = ve^{-\ln(sen\,y)} = ve^{\ln(sen\,y)^{-1}}$

$x = v \csc y$ Se aplicó $(sen\,y)^{-1} = \csc y$

$dx = -v \csc y\, ctg\, y\, dy + \csc y\, dv$ Pasando la ecuación a diferenciales (multiplicamos por dy)

$dx + x\,ctg\,(y)\,dy = \frac{x \,sen\, y \cos y\, dy}{x^2 sen^2 y + 1}$ Sustituimos x y dx

$-v \csc y\, ctg\, y\, dy + \csc y\, dv + v \csc y\, ctg\, y\, dy = \frac{v \csc y \,sen\, y \cos y\, dy}{v^2 \csc^2 y\, sen^2 y + 1}$ Reduciendo

$\csc y\, dv = \frac{v \csc y \,sen\, y \cos y\, dy}{v^2 \csc^2 y\, sen^2 y + 1}$ Aplicando sen y csc y = 1

$\csc y\, dv = \frac{v \cos y\, dy}{v^2 + 1}$ Igualando a cero

$\csc y\, dv - \frac{v \cos y\, dy}{v^2 + 1} = 0 \quad (1)$

c) Resolviendo por separación de variables:

$FACTOR = \left[\frac{v^2+1}{v \csc y}\right]$ Multiplicamos la ecuación (1) por el factor

$\left[\csc y\, dv - \frac{v \cos y\, dy}{v^2+1} = 0\right]\left[\frac{v^2+1}{v \csc y}\right]$ Multiplicando

$\frac{(v^2+1)\,dv}{v} - \frac{\cos y\, dy}{\csc y} = 0$ Aplicando $\frac{1}{\csc y} = sen\,y$; $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

$v\,dv + \frac{dv}{v} - \cos y\, sen\, y\, dy = 0$ Integramos

$\int v\,dv + \int \frac{dv}{v} - \int \cos y\, sen\, y\, dy = \int 0$

d) Solución de integrales:

$\int \cos(y)\, sen(y)\, dy \approx \int u\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$; $u = sen(y)$; $du = \cos(y)\, dy$.

e) Obtención de la solución general:

$\int v\,dv + \int \frac{dv}{v} - \int \cos(y)\, sen(y)\, dy = \int 0$

$\frac{v^2}{2} + \ln|v| - \frac{sen^2(y)}{2} = C$ Multiplicando por 2

$v^2 + 2\ln|v| = C + sen^2(y)$ de b) $x = v\,\csc(y)$; $v = \frac{x}{\csc(y)}$

Aplicando $1/\csc(y) = sen(y)$ por lo tanto $v = x\,sen(y)$

$\boxed{x^2 sen^2(y) + \ln(x\,sen\,y)^2 = C + sen^2(y)}$ SOLUCION GENERAL

4) $(x+1)\,dy = y[y(x+1)\ln(x+1) - 1]dx$

SOLUCION:

a) Identificación:

Primero veremos si es reducible a lineal, dividiremos entre dx

$(x+1)\left(\frac{dy}{dx}\right) = y^2(x+1)\ln(x+1) - y$ dividiendo entre (x+1)

$\frac{dy}{dx} = y^2 \ln(x+1) - \frac{y}{x+1}$ colocándola en la forma

$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x+1} = y^2 \ln(x+1)$ vemos que es reducible a lineal porque aparece y^2

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

b) Sustituciones:

$P = \frac{1}{x+1}$ como y es la supuesta lineal

$y = ve^{-\int P dx} = ve^{-\int \frac{dx}{x+1}} = ve^{-\ln(x+1)} = ve^{\ln(x+1)^{-1}}$.

$y = v(x+1)^{-1}$.

$dy = -v(x+1)^{-2}dx + (x+1)^{-1}dv$ diferenciando la ecuación

$(x+1)dy = y^2(x+1)\ln(x+1)\,dx - y\,dx$ Sustituimos y y dy

$(x+1)[-v(x+1)^{-2}dx + (x+1)^{-1}dv] = v^2(x+1)^{-2}(x+1)\ln(x+1)\,dx - v(x+1)^{-1}dx$

$-v(x+1)^{-1}dx + dv = v^2(x+1)^{-1}\ln(x+1)dx - v(x+1)^{-1}dx$ Reduciendo e igualando a cero.

$dv - \frac{v^2\ln(x+1)\,dx}{(x+1)} = 0$ Dividiendo entre v^2.

$v^{-2}dv - \frac{\ln(x+1)\,dx}{(x+1)} = 0$ Integramos

$\int v^{-2}dv - \int \frac{\ln(x+1)\,dx}{(x+1)} = \int 0$

c) Solución de integrales:

$\int \frac{\ln(x+1)\,dx}{(x+1)} \approx \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c;\ u = \ln(x+1);\ du = \frac{dx}{x+1}$

d) Obtención de la solución general:

$\int v^{-2}dv - \int \frac{\ln(x+1)\,dx}{(x+1)} = \int 0$ Integrando

$-v^{-1} - \frac{\ln^2(x+1)}{2} = c$ Multiplicando por $-2v$

$2 + v\ln^2(x+1) = cv$ De b) $y = v(x+1)^{-1}$ $v = y(x+1)$

$\boxed{2 + y(x+1)\ln^2(x+1) = cy(x+1)}$ Solución General.

PROBLEMAS PROPUESTOS PARA RESOLVER POR ECUACIONES QUE SE PUEDEN REDUCIR A LA FORMA LINEAL

RESOLVER LAS SIGUIENTES ECUACIONES DIFERENCIALES :

1) $\frac{dy}{dx} + xy = xy^2$

2) $dx + \left(\frac{2x}{y}\right)dy = 2x^2y^2dy$

3) $dx - 2xy\,dy = 6x^3y^2e^{-2y^2}dy$

4) $(12e^{2x}y^2 - y)\,dx = dy$; $y = 1$ Cuando $x = 0$

5) $3y^2\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{y^3}{x+1} - 8(x+1) = 0$; $y = 0$ Cuando $x = 0$

6) $x\,dy = x^4dx + \frac{2x^6}{3y}dx + 2y\,dx$

SOLUCIONES

1) $y\left[ce^{\left(\frac{x^2}{2}\right)} + 1\right] = 1$

2) $1 + 2y^3x = cxy^2$

3) $e^{2y^2} = (c - 4y^3)x^2$

4) $y^{-1}e^{-x} = 13 - 12e^{x}$

5) $y^3(x+1) = \frac{8}{3}\left[(x+1)^3 - 1\right]$

6) $6yx^{-2} - \ln(3yx^{-2} + 2)^4 = 3x^2 + c$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

b) Sustituciones:

$P = \frac{1}{x+1}$ como y es la supuesta lineal

$y = ve^{-\int P dx} = ve^{-\int \frac{dx}{x+1}} = ve^{-\ln(x+1)} = ve^{\ln(x+1)^{-1}}$.

$y = v(x+1)^{-1}$.

$dy = -v(x+1)^{-2}dx + (x+1)^{-1}dv$ diferenciando la ecuación

$(x+1)dy = y^2(x+1)\ln(x+1)\,dx - y\,dx$ Sustituimos y y dy

$(x+1)[-v(x+1)^{-2}dx + (x+1)^{-1}dv] = v^2(x+1)^{-2}(x+1)\ln(x+1)\,dx - v(x+1)^{-1}dx$

$-v(x+1)^{-1}dx + dv = v^2(x+1)^{-1}\ln(x+1)dx - v(x+1)^{-1}dx$ Reduciendo e igualando a cero.

$dv - \frac{v^2\ln(x+1)\,dx}{(x+1)} = 0$ Dividiendo entre v^2.

$v^{-2}dv - \frac{\ln(x+1)\,dx}{(x+1)} = 0$ Integramos

$\int v^{-2}dv - \int \frac{\ln(x+1)\,dx}{(x+1)} = \int 0$

c) Solución de integrales:

$\int \frac{\ln(x+1)\,dx}{(x+1)} \approx \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c;\ u = \ln(x+1);\ du = \frac{dx}{x+1}$

d) Obtención de la solución general:

$\int v^{-2}dv - \int \frac{\ln(x+1)\,dx}{(x+1)} = \int 0$ Integrando

$-v^{-1} - \frac{\ln^2(x+1)}{2} = c$ Multiplicando por $-2v$

$2 + v\ln^2(x+1) = cv$ De b) $y = v(x+1)^{-1}$ $v = y(x+1)$

$\boxed{2 + y(x+1)\ln^2(x+1) = cy(x+1)}$ Solución General.

PROBLEMAS PROPUESTOS PARA RESOLVER POR ECUACIONES QUE SE PUEDEN REDUCIR A LA FORMA LINEAL

RESOLVER LAS SIGUIENTES ECUACIONES DIFERENCIALES :

1) $\frac{dy}{dx} + xy = xy^2$

2) $dx + \left(\frac{2x}{y}\right)dy = 2x^2y^2dy$

3) $dx - 2xy\,dy = 6x^3y^2e^{-2y^2}dy$

4) $(12e^{2x}y^2 - y)\,dx = dy$; $y = 1$ Cuando $x = 0$

5) $3y^2\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{y^3}{x+1} - 8(x+1) = 0$; $y = 0$ Cuando $x = 0$

6) $x\,dy = x^4dx + \frac{2x^6}{3y}dx + 2y\,dx$

SOLUCIONES

1) $y\left[ce^{\left(\frac{x^2}{2}\right)} + 1\right] = 1$

2) $1 + 2y^3x = cxy^2$

3) $e^{2y^2} = (c - 4y^3)x^2$

4) $y^{-1}e^{-x} = 13 - 12e^{x}$

5) $y^3(x+1) = \frac{8}{3}\left[(x+1)^3 - 1\right]$

6) $6yx^{-2} - \ln(3yx^{-2} + 2)^4 = 3x^2 + c$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

ECUACIONES DIFERENCIALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

OPERADORES:
Un operador es un símbolo que indica una operación que se debe de efectuar.
El operador D significa tomar la derivada con respecto a x de ...
En general:

$$Du \equiv \frac{du}{dx}$$

$$D^2u \equiv \frac{d^2u}{dx^2}$$

$$D^ku \equiv \frac{d^ku}{dx^k}$$

donde u es una función de x.
Los operadores elementales a D^k, donde a es constante , siguen las leyes fundamentales del álgebra.

$(a D^m + b D^n) u = (b D^n + a D^m) u$,

$(a D^m).(b D^n) u = (b D^m).(a D^n) u$

$[a D^m + (b D^n + c D^r) u = [(a D^m + b D^n) + c D^r] u$

Como los operadores a D^k, donde a es constante, siguen las leyes fundamentales del álgebra, se pueden obtener de los operadores algebraicos dados otros operadores algebraicos dados otros operadores iguales multiplican -- do, elevando a potencias, introduciendo o quitando paréntesis, exactamente como si los operadores fuesen expresiones algebraicas. Es indiferente el orden de términos en una suma o de factores en un producto.

Ejemplos:

$a^2D^2 + 2aD - 3 = (aD + 3)(aD - 1)$

$(2D^2 + 5D + 6) x^3 = 12x + 15x^2 + 6x^3$

$(D - a)(D - b) y = [D^2 - (a + b) D + ab] y$

ECUACION DIFERENCIAL LINEAL

Una ecuación diferencial lineal contiene la variable dependiente y todas sus derivadas solo en el primer grado.

Su forma general es:

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n) y = x$$

donde las a y x son funciones de x

Si x = 0 se dice que la ecuación es homogénea.

ECUACION DIFERENCIAL LINEAL HOMOGENEA CON COEFICIENTES CONSTANTES

Hallaremos un método para resolver las ecuaciones del tipo

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n) y = 0 \qquad (1)$$

donde las a son constantes.

Un caso especial es $D y + a y = 0$ y su solución es $y = ce^{-ax}$, lo que sugiere que una función de la forma.

$$y = ce^{mx}$$

Puede ser una solución de la ecuación (1).

Sustituyendo $y = ce^{mx}$, $\frac{dy}{dx} = mce^{mx}$ ...

$$\frac{d^ky}{dx^k} = cm^ke^{mx}$$

en la ecuación (1) obtenemos:

$$ce^{mx}(a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \ldots a_{n-1} m + a_n) = 0$$

Esta ecuación será satisfecha si m es una raíz de la ecuación:

$$a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \ldots a_{n-1} m + a_n = 0$$

Esta ecuación se llama ecuación característica ó ecuación auxiliar.
La ecuación característica es de grado n. Las raíces de esta ecuación serán . $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Si estas raices son todas reales y diferentes, entonces las n soluciones

$$y_1 = e^{m_1 x}, \quad y_2 = e^{m_2 x}, \quad \ldots \quad y_n = e^{m_n x}$$

son linealmente independientes, y la solución general de la ecuación (1) puede escribirse como :

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \ldots + c_n e^{m_n x}$$

en donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias.

Ejemplos:

Determine la solución general de las siguientes ecuaciones:

1) $(D^3+2D^2-3D)\,y = 0$

La ecuación caracteristica es:

$m^3 + 2m^2 - 3m = 0$

Factorizando tenemos

$m(m^2 + 2m - 3) = 0$

$m(m-1)(m+3) = 0$

Por lo tanto, las raíces de ésta ecuación son:

0,1,-3.

y la solución general de la ecuación es: $\boxed{y = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{-3x}}$

2) $(D^2 + 5D + 4)y = 0$

La ecuación caracteristica es:

$m^2 + 5m + 4 = 0$

Factorizando :

$(m + 4)(m + 1) = 0$

Resolviendo,las raíces son: -4,-1.

Por lo que la solución general es: $\boxed{y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-x}}$

3) $(D^2 + 6D + 5)(D^2 - 9D + 18)\,y = 0$

La ecuación caracteristica es:

$(m^2 + 6m + 5)(m^2 - 9m + 18) = 0$

Factorizando tenemos:

$(m + 5)(m + 1)(m - 6)(m - 3) = 0$

Resolviendo las raíces son: -5,-1,6,3

y la solución general será: $\boxed{y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x} + C_4 e^{6x}}$

4) $(D^3 - 21D + 20)y = 0$

La ecuación caracteristica es:

$m^3 - 21m + 20 = 0$

Para encontrar las raíces de ésta ecuación utilizamos la división sintética.

1	+ 0	-21 + 20	| 1
	+1	+1 -20	
1	+ 1	-20	+0

Con esto la ecuación se reduce a una cuadrática que será:

$m^2 + m - 20 = 0$

Factorizamos: $(m+5)(m-4) = 0$

Por lo que las raíces de la ecuación caracteristica son: 1,4,-5.

y su solución general es : $\boxed{y = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x} + C_3 e^{-5x}}$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

5) $(D^3 - 5D - 2)\,y = 0$

La ecuación característica es

$$m^3 - 5m - 2 = 0$$

Para encontrar las raíces de esta ecuación utilizamos la división sintética.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -5 & -2 \\ -2 & & -2 & +4 & +2 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & \underline{\pm 0} \end{array}$$

Se reduce la ecuación a una cuadrática

$$m^2 - 2m - 1 = 0$$

Utilizando la fórmula general

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$

Sustituyendo en la fórmula general, tendremos.

$$\frac{2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Las raíces de la ecuación son :

$$-2 \,,\; 1 \pm \sqrt{2}$$

Y la solución general es:

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{(1+\sqrt{2})x} + c_3 e^{(1-\sqrt{2})x}$$

ó

$$\boxed{y = c_1 e^{-2x} + e^{x}\left(c_2 e^{\sqrt{2}x} + c_3 e^{-\sqrt{2}x}\right)}$$

ECUACION CARACTERISTICA CON RAICES MULTIPLES

La parte de una solución correspondiente a una raíz a , múltiple de orden p , de la ecuación característica es

$$(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots + c x^{p-1})\, e^{ax}$$

Ejemplos :

1) $(D - 2)^3 (D + 3)^2 (D - 4)\, y = 0$

La ecuación característica es :

$$(m - 2)^3 (m + 3)^2 (m - 4) = 0$$

Las raíces de esta ecuación son :

$$2 \,,\; 2 \,,\; 2 \,,\; -3 \,,\; -3 \,,\; 4$$

y su solución general es :

$$\boxed{y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)\, e^{2x} + (c_4 + c_5 x)\, e^{3x} + c_6 e^{4x}}$$

2) $(D^5 - 2D^4 + D^3)\, y = 0$

La ecuación característica es:

$$m^5 - 2m^4 + m^3 = 0$$

Factorizando

$$m^3(m^2 - 2m + 1) = 0$$

$$m^3(m - 1)^2 = 0$$

Las raíces son : 0 , 0 , 0 , 1 , 1 y la solución general.

$$\boxed{y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + (c_4 + c_5 x)\, e^{x}}$$

3) $(D^2 + 7D + 12)(D^2 + 8D + 16)\, y = 0$

La ecuación característica es:

$$(m^2 + 7m + 12)(m^2 + 8m + 16) = 0$$

Factorizando :

$$(m + 4)(m + 3)(m + 4)(m + 4) = 0$$

Por lo que las raíces son :

$$-3 \,,\; -4 \,,\; -4 \,,\; -4$$

y la solución general

$$\boxed{y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)\, e^{-4x} + c_4 e^{-3x}}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

4) $(D^4 - 13D^2 + 36)^2 y = 0$

La ecuación característica es:

$[m^4 - 13m^2 + 36]^2 = 0$

Factorizando:

$(m^2 - 9)^2 (m^2 - 4)^2 = 0$

Como ambos factores son diferencias de cuadrados

$[(m + 3)(m - 3)]^2 [(m + 2)(m - 2)]^2 = 0$

Entonces las raíces son:

$-3, -3, 3, 3, -2, -2, 2, 2$.

Y la solución general

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-3x} + (C_3 + C_4x)e^{-2x} + (C_5 + C_6x)e^{2x} + (C_7 + C_8x)e^{3x}$$

5) $(D^3 + 5D^2 + 8D + 4) y = 0$

La ecuación característica es:

$m^3 + 5m^2 + 8m + 4 = 0$

Para encontrar las raíces utilizamos la división sintética.

1	+ 5	+ 8	+ 4	| -1
	-1	-4	-4	
1	+ 4	+ 4	| +0	

Reducimos la ecuación a una cuadrática

$m^2 + 4m + 4 = 0$

Cuya solución es: $(m + 2)^2 = 0$

Por lo que las raíces de la ecuación característica son: $-1, -2, -2$ y la solución general:

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-2x} + C_3e^{-x}$$

ECUACION CARACTERISTICA CON RAICES IMAGINARIAS

La parte de la solución correspondiente al par de raíces complejas conjugadas $a \pm bi$ de la ecuación característica, se puede escribir en la forma:

$$e^{ax} (C_1 \operatorname{sen} bx + C_2 \cos bx)$$

En el caso de un par doble de raíces complejas, los términos correspondientes de la solución general son:

$$e^{ax}[(C_1 + C_2x) \operatorname{sen} bx + (C_3 + C_4x) \cos bx]$$

Ejemplos:

1) $(D^2 + 2D + 2)(D^2 + 14D + 49) y = 0$

La ecuación característica es:

$(m^2 + 2m + 2)(m^2 + 14m + 49) = 0$

Resolvemos por fórmula general.

$m^2 + 2m + 2 = 0$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad a = 1,\ b = 2,\ c = 2$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

Factorizando $m^2 + 14m + 49 = 0$

$(m + 7)^2 = 0$

Entonces tenemos las raíces $-7, -7, -1 \pm i$

y la solución general es :

$$y = (c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x)\, e^{-x} + (c_3 + c_4x)\, e^{-7x}$$

2) $(D^2 + 100)(D + 7) y = 0$

La ecuación característica es:

$(m^2 + 100)(m + 7) = 0$

Las raíces son: $\pm 10i, -7$

Por lo que la solución general será:

$$c_1 \operatorname{sen} 10x + c_2 \cos 10x + c_3e^{-7x}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

3) $(D^4+2D^3+10D^2)y = 0$

La ecuación característica es:

$$m^4+2m^3+10m^2 = 0$$

Factorizando:

$$m^2(m^2+2m+10) = 0$$

Resolviendo por la fórmula general: $m^2+2m+10 = 0$

$a = 1$, $b = 2$, $c = 10$

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2\pm\sqrt{(2)^2-4(1)(10)}}{2(1)} = \frac{-2\pm\sqrt{-36}}{2}$$

$$= \frac{-2\pm 6i}{2} = -1\pm 3i$$

Por lo que las raíces son: 0 , 0 , $-1\pm 3i$ y la solución general.

$$\boxed{y = C_1 + C_2x + (C_3\text{sen}3x + C_4\cos 3x)\, e^{-x}}$$

4) $(D^2+36)^2 y = 0$

La ecuación característica es:

$(m^2+36)^2 = 0$ ó $(m^2+36)(m^2+36) = 0$

Resolviendo: $m^2 = -36$; $m = \pm 6i$.

Las raíces son $\pm 6i$, $\pm 6i$

Por lo que la solución general es:

$$\boxed{y = (C_1 + C_2x)\text{sen}6x + (C_3+C_4x)\cos 6x}$$

5) $(D^2-2D+2)^3 y = 0$

La ecuación característica es :

$$(m^2-2m+2)^3 = 0$$

Resolviendo por fórmula general : $m^2-2m+2 = 0$

$a = 1$, $b = -2$, $c = 2$

$$= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}$$

$$= \frac{2\pm 2i}{2} = 1\pm i$$

Pero este par de raíces se repite 3 veces por lo que la solución general es:

$$\boxed{y = [(c_1 + c_2x + c_3x^2)\cos x + (c_4+c_5x+c_6x^2)\,\text{sen}\,x]e^x}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS PARA RESOLVERSE POR OPERADORES

Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones:

1) $(D^2+9D+18)\,y = 0$

2) $(D^2-3D-10)\,y = 0$

3) $(D^2+4D-21)\,y = 0$

4) $D^2y = Dy$

5) $(D^3-7D+6)\,y = 0$

6) $(D^4-D^3-7D^2+3D)\,y = 0$

7) $(D^3-D^2-D+1)\,y = 0$

8) $(D^6-8D^4+16D^2)\,y = 0$

9) $(D^5-12D^3+16D^2)\,y = 0$

10) $(D^2-6D+9)^3 y = 0$

11) $(D^3-4D^2+5D)y = 0$

12) $(D^2+2D+10)(D^2-2D+2)y = 0$

13) $(D^4+8D^2+16)y = 0$

14) $(D^6+6D^4+9D^2)\,y = 0$

15) $(D^2+16)^2\,y = 0$

16) $(D^2-4D+5)^2 y = 0$

17) $(D^4-8D^3+32D^2-64D+64)y = 0$

18) $(D^5-D^4-2D^3+2D^2+D-1)y = 0$

19) $(D^4+8D^3+24D^2+32D+16)y = 0$

20) $(D^3-6D^2+2D+36)y = 0$

21) $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0$

22) $\frac{dy}{dx} - 7y = 0$

23) $\frac{d^3y}{dx^3} + 7\frac{d^2y}{dx^2} + 12\frac{dy}{dx} = 0$

24) $3\left(\frac{dy}{dx}\right) + 11y = 0$

25) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

SOLUCIONES

1) $y = c_1 e^{6x} + c_2 e^{-3x}$

2) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{5x}$

3) $y = c_1 e^{7x} + c_2 e^{3x}$

4) $y = c_1 + c_2 e^{x}$

5) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$

6) $y = c_1 + c_2 e^{3x} + e^{x}(c_3 e^{\sqrt{2}x} + c_4 e^{-\sqrt{2}x})$

7) $y = (c_1 + c_2 x)\, e^{x} + c_3 e^{x}$

8) $y = c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x)\, e^{2x} + (c_5 + c_6 x)\, e^{2x}$

9) $y = c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x)\, e^{2x} + c_5 e$

10) $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 x^4 + c_6 x^5)\, e^{3x}$

11) $y = c_1 + (c_2 \operatorname{sen} x + c_3 \cos x)\, e^{2x}$

12) $y = (c_1 \operatorname{sen} 3x + c_2 \cos 3x)\, e^{x} + (c_3 \operatorname{sen} x + c_4 \cos x)\, e^{x}$

13) $y = (c_1 + c_2 x) \operatorname{sen} 2x + (c_3 + c_4 x) \cos 2x$

14) $y = c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x) \operatorname{sen} \sqrt{3}\, x + (c_5 + c_6 x) \cos \sqrt{3}\, x$

15) $y = (c_1 + c_2 x) \operatorname{sen} 4x + (c_3 + c_4 x) \cos 4x$

16) $y = [(c_1 + c_2 x) \operatorname{sen} x + (c_3 + c_4 x) \cos x]\, e^{2x}$

17) $y = [(c_1 + c_2 x) \cos 2x + (c_3 + c_4 x) \operatorname{sen} 2x]\, e^{2x}$

18) $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)\, e^{x} + (c_4 + c\ x)\, e^{x}$

19) $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3)\, e^{2x}$

20) $y = c_1 e^{2x} + (c_2 \cos \sqrt{2}\, x + c_3 \operatorname{sen} \sqrt{2}\, x)\, e^{4x}$

21) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x}$

22) $y = c_1 e^{7x}$

23) $y = c_1 + c_2 e^{4x} + c_3 e^{3x}$

24) $y = c_1 e^{(-\frac{11}{3})x}$

25) $y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{2x}$

DEDUCCION DE LAS CONSTANTES DE INTEGRACION SEGUN LAS CONDICIONES INICIALES (SOLUCION PARTICULAR).

Cuando aparte de la ecuación de operadores nos dan los valores de **x**, y **y** el de algunas derivadas, quiere decir que nos piden la solución particular. Recordemos que la solución particular es la misma que la solución general solo que en lugar de las constantes de integración, colocamos sus valores.
Nos darán valores de algunas derivadas las cuales encontraremos derivando la solución general.
Sustituyendo los valores dados en las ecuaciones, encontraremos los valores de las constantes.

EJEMPLO:

$(D^2 - 2D + 1)y = 0$; $y = 5$; $Dy = -9$ Cuando $x = 0$

SOLUCION :

a) Obtención de la solución general:
Ecuación caracteristica: $m^2 - 2m + 1 = 0$
$(m - 1)^2 = 0$ Factorizando.
$\boxed{y = (C_1 + C_2 x)\, e^{x}}$ SOLUCION GENERAL

b) Obtención de la solución particular:
Como nos dan el valor de la primera derivada (Dy) la obtendremos de la solución general.

(1) $y = (C_1 + C_2 x)\, e^{x}$ Derivando.
(2) $Dy = (C_1 + C_2 x)\, e^{x} + C_2 e^{x}$

Sustituyendo primeramente en (1)

$y = (C_1 + C_2 x)e^{x}$ Sustituimos $y = 5$, $x = 0$
$5 = [C_1 + C_2(0)]e^{0}$ Aplicando $e^{0} = 1$
$\boxed{5 = C_1}$

Sustituyendo en (2)

$Dy = (C_1 + C_2 x)e^{x} + C_2 e^{x}$ Sustituimos Dy , x
$-9 = [C_1 + C_2(0)]e^{x} + C_2 e^{0}$ Aplicando $e^{0} = 1$
$-9 = C_1 + C_2$ Sustituimos C_1
$-9 = 5 + C_2$ Despejando
$\boxed{C_2 = -14}$ Sustituimos en la solución general.

$\boxed{y = (5 - 14x)e^{x}}$ SOLUCION PARTICULAR

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

PROBLEMAS PROPUESTOS PARA DETERMINAR SU SOLUCION PARTICULAR

1) $(D^2 + 2D + 1)y = 0$; $y = 1, Dy = -1$ Cuando $x = 0$

2) $D^2(D-1)y = 0$; $y = 2, Dy = 3, D^2y = 2$ Cuando $x = 0$

3) $(D^3-4D^2+4D)y = 0$; $y = 1, Dy = 2, D^2y = 8$ Cuando $x = 0$

4) $(D^3 - D^2 - D + 1)y = 0$; $y = 0, Dy = 0, D^2y = 4$ Cuando $x = 0$

5) $(D^2 + 1)y = 0$; $y = 1, Dy = -1$ Cuando $x = \pi$

6) $(D^2 + 9)y = 0$; $y = 2, Dy = 0$ Cuando $x = \frac{\pi}{6}$

7) $(D^2 + 2D + 2)y = 0$; $y = 0, Dy = 1$ Cuando $x = 0$

SOLUCIONES

1) $y = e^{-x}$

2) $y = x + 2e^x$

3) $y = 1 + 2xe^{2x}$

4) $y = e^{-x} + (2x - 1)e^x$

5) $y = \text{sen}(x) - \cos(x)$

6) $y = 2\,\text{sen}(3x)$

7) $y = e^{-x}\,\text{sen}(x)$

ECUACION LINEAL NO HOMOGENEA

(METODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS)

Para resolver la ecuación :

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots + a_{n-1}D + a_n)\,y = x \qquad (1)$$

Donde las **a** son constantes y **x** es una función de **x**, escribiremos la solución general como :

$$y_G = y_c + y_p$$

donde y_c es la solución general de (1) cuando **x** lo sustituimos por cero, y y_p es una solución particular de (1)

y_c se denomina función complementaria y se puede hallar como estudiamos anteriormente.

y_p se puede hallar por diversos métodos, uno de ellos es el de los coeficientes indeterminados.

Para encontrar y_p utilizaremos la siguiente tabla :

Función de **x**	y_p correspondiente
constante	A
e^{ax}	Ae^{ax}
xe^{ax}	$Axe^{ax} + Be^{ax}$
x	Ax + B
x^2	$Ax^2 + Bx + E$
x^3	$Ax^3 + Bx^2 + Ex + F$
sen ax , cos ax ó ambos	A sen x + B cos x

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Para encontrar la solución general de una ecuación lineal no homogénea:

1) Resolver como si fuera homogénea para obtener y_c

2) Escoger un y_p adecuado según el tipo de función **x** que tengamos

3) Sustituir en la ecuación diferencial y por y_p y encontrar los valores desconocidos.

4) Sumar $y_c + y_p$ para obtener la solución general.

PROBLEMAS RESUELTOS

Determine la solución general de las siguientes ecuaciones:

1) $(D^2 - 4)\, y = 12$

SOLUCION:
Como si esta igualada a algo en este caso 12 $y = y_c + y_p$

a) Determinación de y_c:

Con la ecuación característica, factorizamos
$(m^2 - 4) = 0$; $(m + 2)(m - 2) = 0$ Las raíces son -2, $+2$ por lo que
$y_c = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-2x}$

b) Obtención del y_p:
De la tabla $y_p = A$, sustituyendo en lugar de y en la ecuación original.

$(D^2 - 4)(A) = 12$	Multiplicando
$D^2(A) - 4A = 12$	Como A = cte; $D^2A = 0$
$0 - 4A = 12$	Despejando
$A = -3$	
$y_p = A$ $\quad y_p = -3$	Sustituyendo en y

c) Obtención de la solución general;
Como $y_G = y_c + y_p$; Sustituyendo los valores

$\boxed{y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} - 3}$ SOLUCION GENERAL

2) $(D^2 - D - 2)\, y = 6e^x$

SOLUCION:
$y_G = y_c + y_p$

a) Obtención del y_c: con la ecuación característica, factorizamos
$(m^2 - m - 2) = 0$; $(m - 2)(m + 1) = 0$ y las raíces son 2, 1
por lo que $y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$

b) Obtención del y_p:
De la tabla $y_p = Ae^x$, Sustituyendo en y

$(D^2 - D - 2)(Ae^x) = 6e^x$	Multiplicando
$D^2(Ae^x) - D(Ae^x) - 2Ae^x = 6e^x$	$D(Ae^x) = Ae^x$
$Ae^x - Ae^x - 2Ae^x = 6e^x$	$D^2(Ae^x) = Ae^x$
$-2Ae^x = 6e^x$	Despejando
$\underline{A = -3}$	
$y_p = Ae^x$ $\quad y_p = -3e^x$	Sustituyendo en y_p

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

c) Obtención de la solución general:

$y_G = y_c + y_p$ Sustituyendo y_c, y_p

$\boxed{y_G = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} - 3e^{x}}$

CASO ESPECIAL EN LA RESOLUCION DE UNA ECUACION DIFERENCIAL LINEAL NO HOMOGENEA.

Una vez que determinamos el valor del y_p de la tabla tenemos que checar que no haya términos semejantes en y_c, en caso de que esto ocurra entonces el y_p se multiplicará por x^n donde n es el menor entero que hace que los términos no sean semejantes.

PROBLEMAS RESUELTOS

Determine la solución.

1) $(D^2 + D)y = 8x$

SOLUCION: $y_G = y_c + y_p$

a) Determinación del y_c:

La ecuación caracteristica es:

$(m^2 + m) = 0 \Rightarrow m(m+1) = 0$

$\boxed{y_c = C_1 + C_2 e^{-x}}$

b) Obtención del y_p:

De la tabla de $y_p = Ax + B$ donde B es una constante por lo que es semejante con el y_C ya que ahi aparece C que también es una constante por lo que el y_p lo que multiplicaremos por x .

$y_p = (Ax + B)\,x = \boxed{Ax^2 + Bx = y}$ Sustituimos en y

$(D^2 + D)(Ax^2 + Bx) = 8x$ Multiplicando

$D^2(Ax^2) + D^2(Bx) + D(Ax^2) + D(Bx) = 8x$

$D(Ax^2) = 2Ax \qquad D(Bx) = B$

$D^2(Ax^2) = 2A \qquad D^2(Bx) = 0$

$2A + 0 + 2Ax + B = 8x$

Agrupando

$2Ax + 2A + B = 8x$

Igualando términos semejantes

$2A = 8 \Rightarrow \boxed{A = 4}$

$2A + B = 0$ Sustituimos

$2(4) + B = 0 \Rightarrow \boxed{B = -8}$

Sustituimos A y B en y_P

$\boxed{y_P = 4x^2 - 8x}$

c) Obtención de la solución

$y = y_C + y_P$

$\boxed{y_G = c_1 + c_2 e^{x} + 4x^2 - 8x}$ SOLUCION GENERAL

2) $(D^2 - 1)\,y = 5e^{x}$

SOLUCION

$y_G = y_c + y_p$

a) Obtención del y_c:

Con la ecuación caracteristica.

$(m^2 - 1) = 0 \;;\; (m+1)(m-1) = 0$

$\boxed{y_c = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}}$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

b) Obtención del y_p:

De la tabla $y_p = Ae^x$ como podemos checar el y_p está en el y_c $Ae^x \approx C_2 e^x$ por lo que son términos semejantes, entonces multiplicamos el y_p por x.

$y_p = Axe^x$ Sustituyendolo en y

$(D^2 - 1)(Axe^x) = 5e^x$ Multiplicando

$D^2(Axe^x) - Axe^x = 5e^x$ $\quad D(Axe^x) = Axe^x + Ae^x$

$Axe^x + 2Ae^x - Axe^x = 5e^x$ $\quad D^2(Axe^x) = Axe^x + Ae^x + Ae^x$

$D^2(Axe^x) = Axe + 2Ae^x$

$2Ae^x = 5e^x$

$2A = 5$, por lo tanto $A = 5/2$ Sustituimos en y_p

$$\boxed{y_p = \frac{5xe^x}{2}}$$

c) Obtención de la solución:

$y_G = y_c + y_p$

$$\boxed{y_G = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + \frac{5xe}{2}}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS DE NO HOMOGENEAS

Resolver las siguientes ecuaciones

1) $(D^2 - D - 2)\, y = e^{3x}$

2) $(D^2 - D - 2)\, y = \text{sen}\,(2x)$

3) $(D^3 - 6D^2 + 11D - 6)\, y = 2xe^x$

4) $D^2 y = 9x^2 + 2x - 1$

5) $(D - 5)\, y = 2e^{5x}$

6) $(D - 5)\, y = (x - 1)\,\text{sen}\,(x) + (x + 1)\cos(x)$

7) $(D - 5)\, y = 3e^x - 2x + 1$

8) $(D - 5)\, y = x^2 e^x - xe^{5x}$

9) $(D - 1)\, y = \text{sen}\,(x) + \cos(2x)$

10) $(D^3 - 3D^2 + 3D - 1)\, y = e^x + 1$

11) $(D^3 - 2D^2 + 5D)\, y = 10 + 15\cos(2x)$

12) $(D^2 - 2D + 2)\, y = e^x \text{sen}\,(x)$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

SOLUCIONES

1) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{4} e^{3x}$

2) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - \frac{3}{20} \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{20} \cos(2x)$

3) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} - \frac{1}{12} x e^{-x} - \frac{13}{144} e^{-x}$

4) $y = c_1 + c_2 x + \frac{3}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2$

5) $y = (c_1 + 2x) e^{2x}$

6) $y = c_1 e^{5x} + (-\frac{2}{13} x + \frac{71}{338}) \operatorname{sen}(x) - (\frac{3}{13} x + \frac{69}{338}) \cos(x)$

7) $y = c_1 e^{5x} - \frac{3}{4} e^{x} + \frac{2}{5} x - \frac{3}{25}$

8) $y = c_1 e^{} - (\frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32}) e^{x} - \frac{1}{2} x^2 e^{5x}$

9) $y = c_1 e^{x} - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(x) - \frac{1}{2} \cos(x) + \frac{2}{5} \operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{5} \cos(2x)$

10) $y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 x^2 e^{x} + \frac{1}{6} x e^{x} - 1$

11) $y = 2x + (1/34)(15 \operatorname{sen} 2x + 60 \cos 2x)$

12) $y = -(1/2) x e^{x} \cos(x)$

UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS