sen (t/t) = sen(1) = cte ; cos h (y/x) = cos h(t/t) = cte.

Ejemplo en que no es homogénea.

$(x+3y+2)\,dx + (8x+3y)dy = 0$

Los términos son x , 3y , 2 , 8x , 3y sustituyendo t; t; t; t^{o} ; t;t; como en el tercer término no contiene t como los demás a la primera potencia entonces la ecuación no es homogénea.

METODO PARA LLEGAR A LA SOLUCION GENERAL

1) Checar que la ecuación sea homogénea.

2) Utilizar la sustitución

$y = vx$ ó $x = vy$

$dy = vdx + xdv$ $\quad dx = vdy + ydv$

Si el coeficiente del dx es más sencillo que el del dy se utiliza la sustitución x = vy y si el coeficiente del dy es más sencillo que el del dx entonces utilizaremos y = vx.

Si ambos coeficientes son del mismo grado de dificultad, podemos utilizar cualquiera de las dos sustituciones.

3) Sustituiremos la variable y el diferencial en la ecuación diferencial y después realizaremos los productos.

4) Resolvemos la ecuación diferencial resultante.

5) Volvemos a las variables originales.

PROBLEMAS RESUELTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGENEAS

1) $(3x + 2y)\,dx + 2x\,dy = 0$

SOLUCION:

a) Identificación:

Los términos son 3x , 2y y 2x sustituyendo x e y por t quedan t , t , y t como los tres quedaron con t elevada a la misma potencia por lo tanto la ecuación si es homogénea.

b) Determinación de la variable y diferencial que saldrán y sustituciones: como el dy tiene el coeficiente con el menor número de términos, entonces la variable que sale es la de este diferencial es decir, saldrá la variable y y el dy aplicando el segundo paso.

R Espinoza 27/05/07

$y = vx$; $dy = v\,dx + x\,dv$ — sustituyendo y y dy en 1

$(3x+2vx)dx + 2x(vdx+xdv) = 0$ — multiplicando

$3xdx + 2vxdx + 2xvdx + 2x^2dv = 0$ — agrupando y factorizando

$x(3+4v)dx + 2x^2dv = 0$ (a)

c) Resolviendo por separación de variable

$\text{Factor} = \left[\dfrac{1}{(3+4v)x^2}\right]$ Multiplicando por (a)

$\left[x(3+4v)dx + 2x^2\,dv = 0\right]\left[\dfrac{1}{(3+4v)x^2}\right]$ Realizando el producto

$\dfrac{dx}{x} + \dfrac{2dv}{3+4v} = 0$ integramos.

$\displaystyle\int\frac{dx}{x} + \int\frac{2dv}{3+4v} = \int 0$ (b)

d) Solución de integrales:

$\displaystyle\int\frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

$\displaystyle\int\frac{2dv}{3+4v} \approx \int\frac{du}{u} = \ln|u| + c$

$u = 3+4u;$ $\quad du = 4du;$ Completamos multiplicando y dividiendo por 2

Obtención de la solución general: de (b)

$\displaystyle\int\frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int\frac{(2)2\,dv}{3+4v} = \int 0$ Integrando.

$\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|3+4v| = c$ Multiplicando por 2 y aplicando $(c)\ln(u) = \ln(u)^c$

$\ln(x)^2 + \ln|3+4v| = c$ Aplicando $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$

$\ln[x^2(3+4v)] = c$ Exponenciando.

$e^{\ln[x^2(3+4v)]} = e^c$ Aplicando $e^{\ln(u)} = u$; $e^c = C$.

$x^2(3+4v) = c$ De (b) $y = vx$; $v = \frac{y}{x}$ Sustituyendo v.

$x^2(3 + \frac{4y}{x}) = c$ Multiplicando la x^2

$3x^2 + 4xy = c$ Factorizando.

$\boxed{x(3x+4y) = c}$ SOLUCION GENERAL.

2.- $[x+y\,\text{sen}(y/x)]\,dx - x\,\text{sen}\,(y/x)\,dy = 0$

SOLUCION:

a) Identificación:

Los términos son x ; y sen(y/x) y x sen(y/x) sustituyendo x e y por t quedan t; t sen(t/t) = t y t sen (t/t) = t como los tres términos quedaron con t elevada a la misma potencia, entonces la ecuación sí es homogénea.

b) Determinación de la variable y diferencial que saldrán, y sustituciones: como el dy tiene el coeficiente más sencillo entonces saldrá la variable y y el dy

Aplicando el segundo paso del método y = vx ; dy = v dx + x dv sustituyendo y y dy en (2).

$[x + vx\,\text{sen}(\frac{vx}{x})]dx - [x\,\text{sen}(\frac{vx}{x})][v\,dx + x\,dv] = 0$ Multiplicando

$x\,dx + vx\,\text{sen}(v)\,dx - xv\,\text{sen}\,(v)\,dx - x^2\,\text{sen}(v)\,dv = 0$ Reduciendo.

$x\,dx - x^2\,\text{sen}\,(v)\,dv = 0$ (1)

c) Resolviendo por separación de variables:

FACTOR = $\left[\frac{1}{x^2}\right]$ Multiplicando 1 por este factor

$[x\,dx - x\,\text{sen}(v)\,dv = 0]\left[\frac{1}{x^2}\right]$ Realizando el producto.

$\frac{dx}{x} - \text{sen}\,(v)\,dv = 0$ Integramos.

$\int\frac{dx}{x} - \int \text{sen}\,(v)\,dv = \int 0$ (2)

d) Solución de integrales:

$\int\frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

$\int \text{sen}\,(v)\,dv \approx \int \text{sen}(u)\,du = -\cos(u) + c$;

e) Obtención de la solución general de (2)

$\int\frac{dx}{x} - \int \text{sen}(v)\,dv = \int 0$ Integrando.

$\ln|x| + \cos\,(v) = c$ de (b) $y = vx$; $v = \frac{y}{x}$; sustituyendo v.

$\boxed{\ln|x| + \cos(\frac{y}{x}) = c}$ SOLUCION GENERAL.

3) $x\,dy - y\,dx = \sqrt{(x^2+y^2)}\,dx$

SOLUCION:

a) Identificación:

Los términos son (para checar si es homogénea). Aplicando x ; y ; $\sqrt{x^2}$ y $\sqrt{y^2}$ sustituyendo x y y por t.

t ; t ; $\sqrt{t^2} = t$; $\sqrt{t^2} = t$ como los tres términos quedaron con t elevada a la misma potencia, sí es homogénea.

b) Determinación de la variable y diferencial, que saldrán, y sustituyendo. Como el dy tiene el coeficiente más sencillo entonces, saldrá la variable y y el dy. Aplicando el segundo paso del método.

$y = vx$; $dy = vdx + xdv$ Sustituyendo en (3)

$x(vdx+xdv) - vxdx = \sqrt{x^2+v^2x^2}\,dx$ Multiplicando

$xvdx + x^2dv - vxdx = \sqrt{x^2(1+v^2)}\,dx$ Reduciendo

$x^2dv = x\sqrt{1+v^2}\,dx$ (I)

c) Resolviendo por separación de variables:

Factor = $\left[\frac{1}{x^2(\sqrt{1+v^2})}\right]$ Multiplicando I por este factor

$$\left[x^2\,dv = x\sqrt{1+v^2}\,dx\right]\left[\frac{1}{x^2(\sqrt{1+v^2})}\right]$$ Realizando el producto e igualando a cero.

$$\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} - \frac{dx}{x} = 0$$ Integramos

$$\int\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} - \int\frac{dx}{x} = \int 0 \qquad (\text{II})$$

d) Solución de integrales:

$$\int\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} \approx \int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \ln|u+\sqrt{1+u^2}|+c\ ; \quad u^2=v^2 \Longrightarrow u=v$$

$$\int\frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

e) Obtención de la solución general: de (II)

$$\int\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} - \int\frac{dx}{x} = \int 0$$ Integrando

$$\ln|v+\sqrt{1+v^2}| - \ln|x| = c$$ Aplicando $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$

$$\ln\left(\frac{v+\sqrt{1+v^2}}{x}\right)$$ Exponenciando

$$e^{\ln}\left(\frac{v+\sqrt{1+v^2}}{x}\right) = e^c$$ Aplicando $e^{\ln u} = u$; $e^c = c$

$$\frac{v+\sqrt{1+v^2}}{x} = c$$ Despejando

$$v+\sqrt{1+v^2} = cx$$ de (b) $y=vx \Longrightarrow v=y/x$; Sustituyendo v

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+(y^2/x^2)} = cx$$ Reduciendo

$$\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} = cx$$ Multiplicando por x

$$\boxed{y+\sqrt{x^2+y^2} = cx^2}$$ SOLUCION GENERAL

(4) $yx^2dx - (x^3+y^3)dy = 0$; $x=0$ cuando $y=1$

SOLUCION :

a) Identificación : (nos piden la solución particular)
Los términos son yx^2 ; x^3 y y^3 sustituyendo x e y por t;$(t)(t^2)=t^3$; t^3 y t^3 como todos los términos quedaron con t elevada al cubo, entonces la ecuación sí es homogénea.

b) Determinación de la variable y diferencial que saldrán, sustituciones :
Como el dx tiene el coeficiente más sencillo entonces saldrá la variable x y el dx. Aplicando el segundo paso del Método:

$x = vy$; $dx = vdy + ydv$ Sustituyendo en (4)

$$y(v^2y^2)(vdy+ydv) - (v^3y^3+y^3)dy = 0$$ Multiplicando

$$v^3y^3dy + y^4v^2dv - v^3y^3dy - y^3dy = 0$$ Reduciendo

$$y^4v^2dv - y^3dy = 0 \qquad (\text{I})$$

c) Resolviendo por separación de variables:

$$\text{FACTOR} = \left[\frac{1}{y^4}\right]$$ Multiplicando I por este factor

$$\left[y^4v^2dv - y^3dy = 0\right]\left[\frac{1}{y^4}\right]$$ Realizando el producto

$$v^2dv - \frac{dy}{y} = 0$$ Integrando

$$\int v^2dv - \int\frac{dy}{y} = \int 0$$ Resolviendo

$$\frac{v^3}{3} - \ln|y| = c$$ Multiplicando por 3
Aplicando $c\ln u = \ln u^c$

$$v^3 - 3\ln|y| = c$$ despejando

$$\ln(y)^3 = v^3 + c$$ Exponenciando

$$e^{\ln(y)^3} = e^{v^3+c}$$ Aplicando $e^{\ln u} = u$;
$e^{(a+b)} = e^a e^b$; $e^c = c$

$$y^3 = e^{v^3}c$$ de b) $x = vy$ $v = x/y$;
sustituyendo v

$$\boxed{y^3 = c\,e^{x^3/y^3}}$$ Solución general

d) Obtención de la solución particular:
sustituyendo $x = 0$ y $y=1$ en la solución general

$(1)^3 = c\,e^0$ $c = 1$ sustituyendo en la solución general

$$\boxed{y^3 = e^{x^3/y^3}}$$ Solución particular

PROBLEMAS PROPUESTOS PARA RESOLVERSE POR HOMOGENEAS

Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales.

1) $(6x^2 - 7y^2)dx - 14xydy = 0$

2) $(2\sqrt{xy} - y)dx - xdy = 0$

3) $[y + x\,\text{ctg}(x/y)]dx - xdy = 0$

4) $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0$

5) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y^4 + x^4}{xy^3}$

6) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2e^{(x/y)^2} + 2x^2e^{(x/y)^2}}$

7) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$ $\qquad (y/x)$

8) $(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$

9) $y(x^2 + xy - 2y^2)dx + x(3y^2 - xy - x^2)dy = 0$

10) $(x^2y + y^3)dx - 2x^3dy = 0$ $\quad y = 3$ cuando $x = 2$

11) $[x + ye^{(y/x)}]dx - xe^{(y/x)}dy = 0$; $\quad y = 0$ cuando $x = 1$

12) $y^2dx + (x^2 + xy + y^2)dy = 0$; $y=1$ cuando $x=0$

SOLUCIONES

1) $2x^3 = c + 7xy^2$ $\quad$ 2) $\sqrt{xy} = c + x$ $\quad$ 3) $x\cos(y/x) = c$

4) $y + \sqrt{x^2 + y^2} = cx^2$ $\quad$ 5) $y^4 + x^4 = cx^8$

6) $y + c\left[1 + e^{(y/x)^2}\right]$ $\quad$ 7) $x^2 + y^2 = cy$ $\quad$ 8) $(x + y)^2 = cx^{(y/x)}$

9) $2y^2\ln(y^3/x^2) + 2xy + x^2 = cy^2$ $\quad$ 10) $5xy^2 = 18(y^2 - x^2)$

11) $\ln(x) = e^{(y/x)} - 1$ $\quad$ 12) $(x + y)\ln|y| + x = 0$

METODO DE SIMPLE SUSTITUCION

Este método se aplica para ecuaciones que tengan la forma:

1) $(ax + by + c)dx \pm (ax + by + f)dy = 0$

2) $(ax + by + c)dx \pm (nax + mby + j)dy = 0$

Coeficientes que representan rectas paralelas

3) $(ax^2 + by^2 + c)xdx \pm (ax^2 + by^2 + f)ydy = 0$

4) $(ax^2 + by^2 + c)xdx \pm (nax^2 + mby^2 + j)ydy = 0$

Ecuaciones que tendrían la forma de los 2 casos anteriores al sustituir.
$r = x^2; w = y^2;\ dr = 2xdx;\ dw = 2ydy$

5) $(ax + by + c)dx \pm \text{cte.}\,dy = 0$

6) $(ax^2 + by^2 + c)xdx \pm \text{cte.}\,dy = 0$

Ecuaciones que solo un diferencial tenga como coeficiente la ecuación de una recta y el otro diferencial sólo tenga una constante como coeficiente.
$r = x^2, w = y^2,\ dr = 2xdx;\ dw = 2ydy$

Método:

1.- Checar que la ecuación tenga la forma, esto es que los coeficientes de los diferenciales representen ecuaciones de rectas paralelas o bien que solo un diferencial tenga como coeficiente la ecuación de una recta mientras que el otro diferencial solo que tenga una constante como coeficiente.

2.- Haremos z igual a la relación $ax + by$ y diferenciando esta ecuación encontraremos el valor de dz.

3.- Despejaremos de la ecuación de dz (paso 2) el diferencial que en la ecuación diferencial tenga el coeficiente con el menor número de términos. Si los 2 coeficientes tienen el mismo número de términos se despejará de la ecuación de dz cualquiera de los 2 diferenciales.

4.- Sustituiremos z y el diferencial que despejamos, en la ecuación diferencial.

5.- La ecuación resultante se resuelve por el método de separación de variables.

6.- Una vez encontrada la solución, sustituiremos el valor de z por el que le asignamos en el paso 2. Esta será nuestra Solución General.

Nota:

En las ecuaciones de la forma 3, 4 y 6 primero se harán las sustituciones de $r=x^2$; $dr=2xdx$; $w=y^2$; $dw=2ydy$ y después ya seguiremos con todos los pasos.

(La relación será $ar + bw$).

PROBLEMAS RESUELTOS POR EL METODO DE SIMPLE SUSTITUCION

Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales.

1) $(3x + 2y - 3)dx + (6x + 4y)dy = 0$

SOLUCION :

a) Identificación:

Checaremos si son rectas paralelas o no.

Del coeficiente de dx ; $A=3$; $B=2$; $m=-A/B=-3/2=m$

Del coeficiente de dy ; $A=6$; $B=4$; $m=-A/B=-6/4=-3/2=m$

Como las pendientes (m) son iguales entonces la ecuación diferencial si tiene la forma (rectas paralelas).

b) Obtención de las ecuaciones de sustitución :

Haremos z igual a la relación que sea el submúltiplo, en este caso:

$z=3x + 2y \Longrightarrow dz=3dx + 2dy$

Como el dy tiene el coeficiente más sencillo en la ecuación diferencial entonces será el que despejemos.

$$\boxed{dy=\frac{dz - 3dx}{2}}$$

c) Sustituciones de z y dy

$(3x + 2y - 3)dx + (6x + 4y)dy = 0$ Sustituyendo z y dy

$(z-3)dx + \dfrac{2z(dz - 3dx)}{2} = 0$ Multiplicando

$zdx - 3dx + zdz - 3zdx = 0$ Agrupando

$(z)dz - (2z + 3)dx = 0$ (I)

d) Aplicando el método de separación de variables:

$\text{Factor} = \left[\dfrac{1}{2z + 3}\right]$ Multiplicando I por el factor

$\Big[zdz - (2z + 3)dx = 0\Big]\left[\dfrac{1}{2z + 3}\right]$ Multiplicando

$\dfrac{zdz}{2z + 3} - dx = 0$ Integramos

$\displaystyle\int\frac{zdz}{2z + 3} - \int dx = \int 0$ (II)

e) Solución de integrales:

$\displaystyle\int dx = x + c$

$\displaystyle\int\frac{zdz}{2z + 3}$ función impropia por lo tanto hay que dividir.

$$\begin{array}{r|l} & 1/2 \\ \hline 2z + 3 & \cancel{z} \\ & -\cancel{z} - 3/2 \\ \hline & - 3/2 \end{array}$$

$\dfrac{z}{2z + 3} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{-3/2}{2z + 3}$ Integrando ambos lados

$$\boxed{\int\frac{zdz}{2z + 3} = \frac{1}{2}\int dz - 3/2\int\frac{dz}{2z + 3}} \quad \text{(III)}$$

f) Obtención de la solución general: De II

$\displaystyle\int\frac{z\,dz}{2z + 3} - \int dx = \int 0$

$\displaystyle\frac{1}{2}\int dz - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\int\frac{(2)\,dz}{2z + 3} - \int dx = \int 0$ integrando

$\dfrac{1}{2}(z) - \dfrac{3}{4}\ln|2z + 3| - x = C$ multiplicando por 4, aplicando $c\ln u = \ln u^c$

$2z - \ln(2z + 3)^3 - 4x = C$ de b), $z = 3x + 2y$; sustituyendo

$$2(3x+2y) - \ln[2(3x+2y)+3]^3 - 4x = c$$ desarrollando y reduciendo

$$2(x+2y) = c + \ln(6x+4y+3)^3$$

$$2x + 4y = c + \ln(6x+4y+3)^3;$$

SOLUCION GENERAL.

2) $2(x-y)dx + dy = 0$

SOLUCION:

a) Identificación:

Como el dx tiene como coeficiente la ecuación de una recta $x-y$ y el dy tiene 1 como coeficiente, sí es de simple sustitución del caso 5.

b) Obtención de las ecuaciones de sustitución:

Haremos z igual a la relación de variables, es decir

$z = x-y$ diferenciando

$dz = dx-dy$ despejando dy dado que tiene el coeficiente mas simple

$dy = dx - dz$

c) Sustituciones:

$2(x-y)dx + dy = 0$ (sustituyendo z y dy)

$2z\,dx + dx - dz = 0$ (agrupando)

$(2z+1)dx - dz = 0$ (1)

d) Aplicando el método de separación de variables.

$\text{FACTOR} = \left[\dfrac{1}{2z+1}\right]$ multiplicando (1) por el factor

$$\left[(2z+1)dx - dz = 0\right]\left[\frac{1}{2z+1}\right]$$

$$dx - \frac{dz}{2z+1} = 0$$ integramos

$$\int dx - \int \frac{dz}{2z+1} = \int 0$$ completamos la segunda integral

$$\int dx - \frac{1}{2}\int \frac{2\,dz}{2z+1} = \int 0$$ integrando

$$x - \frac{1}{2}\ln|2z+1| = c$$ multiplicando por 2 y sustituyendo $z = x-y$ y despejando x

$$2x = c + \ln|2(x-y)+1|$$ SOLUCION GENERAL

3) $(2x^2 + y^2 + 6)x\,dx + (2x^2 + y^2)y\,dy = 0$

SOLUCION:

a) Transformación:

Como tiene la forma (3) haremos:

$r = x^2$; $dr = 2x\,dx$; $dr/2 = x\,dx$; $w = y^2$; $dw = 2y\,dy$; $dw/2 = y\,dy$.

Sustituyendo estas relaciones:

$$(2r+w+6)\frac{dr}{2} + (2r+w)\frac{dw}{2} = 0$$ multiplicando por 2

(1) $(2r+w+6)dr + (2r+w)dw = 0$ la cual tiene la forma

de dr $A = 2$; $B = 1$; $m = -2/1 = -2$

de dw $A = 2$; $B = 1$; $m = -2/1 = -2$

b) Ecuaciones de sustitución:

Haremos z igual a la relación de variables.

$z = 2r + w$ diferenciando ; $dz = 2dr + dw$ despejando dw ;

$dw = dz - 2dr$.

c) Sustituciones: de (1)

$(2r+w+6)dr + (2r+w)dw = 0$ sustituyendo z y dw

$(z+6)dr + z(dz-2dr) = 0$ multiplicando y agrupando

$(6-z)dr + z\,dz = 0$ (2)

d) Resolviendo por separación de variables:

$\text{Factor} = \left[\dfrac{1}{6-z}\right]$ multiplicando 2 por factor

$$\left[(6-z)dr + z\,dz = 0\right]\left[\frac{1}{6-z}\right]$$ multiplic

$$dr + \frac{z\,dz}{6-z} = 0$$ integramos

$$\int dr + \int \frac{z\,dz}{6-z} = \int 0 \qquad (4)$$

e) Solución de integrales:

$\int dr = r + c$;

$\int \frac{z\,dz}{6 - z}$; como es una fracción impropia, dividiremos:

$$\begin{array}{r|l} & -1 \\ -z+6 & \cancel{z} \\ & \underline{-\cancel{z}+6} \\ & +6 \end{array}$$

$\frac{z}{6 - z} = -1 + \frac{6}{6 - z}$ Integrando en ambos lados

$\int \frac{z\,dz}{6 - z} = -\int dz + 6\int \frac{dz}{6 - z}$ (3)

f) Obtención de la solución general: de (4)

$\int dr + \int \frac{z\,dz}{6 - z} = \int 0$ **Sustituyendo (3) ;** $\int dr - \int dz + 6(-1)\int \frac{(-1)dz}{6 - z} = \int 0$

$r - z - 6\ln(6-z) = c$:	**Sustituyendo** $z = (2r+w)$;
$r - (2r+w) - \ln(6 - 2r - w)^6 = c$	**Reduciendo y multiplicando por -1**
$r + w + \ln(6 - 2r - w)^6 = c$	**Sustituyendo** $r=x^2$; $w=y^2$
$x^2 + y^2 + \ln(6 - 2x^2 - y^2)^6 = c$	**Solución general**

PROBLEMAS PROPUESTOS PARA RESOLVERSE POR SIMPLE SUSTITUCION

Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales.

(1) $(x+2y+3)dx + (2x+4y-1)dy=0$

(2) $(x+y-3)dx + (x+y+4)dy=0$

(3) $(2x-3y+2)dx + 3(4x-6y-1)dy=0$

(4) $(2x+y)dx - (4x+2y-1)dy=0$

(5) $(x-2y+5)dx - [2(x-2y)+9]dy=0$

(6) $2dx + (2x+3y)dy=0$

(7) $(x+y)dx + (x+y-2)=0$

(8) $(3x-y+4)dx + dy=0$

(9) $(2x+3y-1)dx = (5-2x-3y)dy$

(10) $(x^2+y^2+4)ydy + (x^2+y^2-3)xdx=0$

(11) $(12x^2-18y^2-3)ydy + (2x^2-3y^2+2)xdx=0$

SOLUCIONES

(1) $x^2+4xy+4y^2+6x=c+2y$

(2) $x^2+2xy+y^2+8y=c+6x$

(3) $x+6y+\ln(2x-3y)=c$

(4) $5x-10y+\ln(10x+5y-2)=c$

(5) $(x-2y)^2+10(x-2y)+2y=c$

(6) $(2x+3y-3)e^y=c$

(7) $(x+y)^2=4y+c$

(8) $3x+7=y+ce^x$

(9) $x+y+c=4\ln(2x+3y+7)$

(10) $x^4+2x^2y^2+y^4+8y^2=c+6x^2$

(11) $x^2+6y^2+\ln(2x^2-3y^2)=c$