3).- $(x+3)^{-1}\cos(y)\,dx - [\text{sen}(y)\,\text{Ln}(5x+15) - 1/y]\,dy = 0$

SOLUCION

a) Identificación: Como aparece la resta (Mdx- Ndy) hay que colocarla como la suma (Mdx + Ndy) lo que se hace es colocar el positivo y multiplicar por menos 1 los términos que está afectando.

$$(x+3)^{-1}\cos(y)dx + [-\text{sen}(y)\,\text{Ln}(5x+15)+1/y]dy=0$$

con lo cual ya podemos determinar M y N.

$$M=(x+3)^{-1}\cos(y) \quad ; \qquad N = \frac{1}{y} - \text{sen}(y)\,\text{Ln}(5x+15)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial[(x+3)^{-1}\cos y]}{\partial y} = -(x+3)^{-1}\,\text{sen}(y)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial[1/y-\text{sen}(y)\ln(5x+15)]}{\partial x} = -\,\text{sen}(y)\left[\frac{5}{5x+15}\right] = -\,\text{sen}(y)\left[\frac{\cancel{5}}{\cancel{5}(x+3)}\right]$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -\,\text{sen}\,y\,(x+3)^{-1}$$ Como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ La ecuación si es exacta.

b) Solución de las integrales:

$$\int M dx=\int_{y=cte}(x+3)^{-1}\cos y\,dx= \cos y\int\frac{dx}{x+3}= \cos y\,\text{Ln}(x+3)+\phi(y)$$

$$\int N dy=\int_{x=cte}\left[\frac{1}{y}-\text{sen}y\,\text{Ln}(5x+15)\right]dy=\int\frac{dy}{y}-\text{Ln}(5x+15)\int \text{sen}y\,dy=$$

$\int Ndy=\text{Ln}(y)+\text{Ln}(5x+15)\cos y+\phi(x)$ Aplicando $\text{Ln}(5x+15)=\text{Ln}[5(x+3)]$

$\text{Ln}(ab)=\text{Ln}a+\text{Ln}b$

$$\int Ndy=\text{Ln}y+\text{Ln}(5)\cos y+\text{Ln}(x+3)\cos y+\phi(x)$$

c)Obtención de los ϕ [var]

$\phi(y)=\text{Ln}y+\text{Ln}(5)\cos y$

$\phi(X)=0$

d)Sustituyendo los ϕ [var]

$\int Mdx= \cos y\,\text{Ln}(x+3)+ \text{Ln}y + \text{Ln}(5)\cos y$

$\int Ndy= \text{Ln}y + \text{Ln}(5)\cos y + \text{Ln}(x+3)\cos y$

e)Obtención de la solución general:de $\int Ndy$

$\text{Ln}y+\text{Ln}(5)\cos y+\text{Ln}(x+3)\cos y=C$ Aplicando $c\text{Ln}a+c\text{Ln}b=c\text{Ln}(ab)$

$\boxed{\text{Ln}y+\cos(y)\text{Ln}(5x+15)=C}$ SOLUCION GENERAL

PROBLEMAS PROPUESTOS PARA RESOLVERSE POR EXACTAS

Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales

1) $(2x\cos y+3x^2y)dx+(x^3-x^2\text{sen}y-y)dy=0$

2) $(x+\text{sen}y)dx+(x\cos y-2y)dy=0$

3) $\frac{dy}{dx}=\frac{2+ye^{(xy)}}{2y-xe^{(xy)}}$

4) $\frac{dy}{dx}=\frac{3yx^2}{x^3+2y^4}$

5) $2xydx+(1+x^2)dy=0$

6) $(y\text{sen}x+xy\cos x)dx+(x\text{sen}x+1)dy=0$

7) $[e^{2y}-y\cos(xy)+2y]dx+[2xe^{2y}-x\cos(xy)+2y+2x]dy=0$

8) $y^3\text{sen}(2x)dx-3y^2\cos^2x\,dy=0$

9) $\left(\frac{y^2-2x^2}{xy^2-x^3}\right)dx+\left(\frac{2y^2-x^2}{y^3-x^2y}\right)dy=0$

10) $\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}+\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy=0$

11) $\frac{3y^2dx}{x^2+3x}+\left[2y\text{Ln}\left(\frac{5x}{x+3}\right)+3\text{sen}y\right]dy=0$

SOLUCIONES

1) $x^2\cos y+x^3y-y^2/2=C$

2) $\frac{1}{2}x^2+x\text{sen}(y)-y^2=C$

3) $2x+e^{(xy)}-y^2=C$

4) $x^3y+\frac{2y^5}{5}=C$

5) $(x^2+1)y=C$

6) $xy\,\text{sen}(x)+y=C$

7) $xe^{2y}-\text{sen}(xy)+y^2+2yx=C$

8) $y^3(1+\cos 2x)=C$

9) $x^2y^2(x^2-y^2)=C$

10) $x+\sqrt{x^2+y^2}=C$

11) $y^2\text{Ln}\left(\frac{5x}{x+3}\right)-3\cos y=C$

FACTORES INTEGRANTES

Una ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

puede transformarse en una ecuación diferencial exacta, multiplicándola por una expresión apropiada.Esta expresión se denomina factor integrante o factor de integración.

Un método para encontrar la solución general, es multiplicar toda la ecuación diferencial por un factor integrante, el cual se obtiene de acuerdo a las caracteristicas de los términos que aparecen en la ecuación diferencial

Utilizaremos la siguiente tabla:

RELACION	FACTOR INTEGRANTE	DIFERENCIAL EXACTA
$xdy + ydx$	1	$d(xy)$
$xdy - ydx$	$1/x^2$	$d(y/x)$
$xdy - ydx$	$1/y^2$	$d(-x/y)$
$xdy - ydx$	$1/xy$	$d(\ln y/x)$
$xdy - ydx$	$1/(x^2+y^2)$	$d(\tan^{-1} y/x)$
$xdy + ydx$	$1/(xy)^n$	$d\left[\frac{-1}{(n-1)(xy)^{n-1}}\right]$ Si $n \neq 1$.
$xdy + ydx$	$1/(xy)^n$	$d[\ln(xy)]$ Si $n = 1$
$xdy + ydx$	$1/(x^2+y^2)^n$	$d\left[\frac{-1}{2(n-1)(x^2+y^2)^{n-1}}\right]$ Si $n \neq 1$
$xdy + ydx$	$1/(x^2+y^2)^n$	$d\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right]$ Si $n = 1$
$pydx + qxdy$	$x^{p-1}\ y^{q-1}$	$d(x^p\ y^q)$

Nota: Cuando en la ecuación diferencial aparezca la relación $pydx + qxdy$ donde p y q sean diferenciales de uno o menos uno y al multiplicar la ecuación por $x^{p-1}\ y^{q-1}$, si otro término de la ecuación NO se puede integrar, multiplicaremos toda la ecuación por $\frac{1}{(x^p\ y^q)^a}$ donde <u>a</u> es la potencia que hace que se elimine la variable que no permite que se integre el otro término de la ecuación.

PROBLEMAS RESUELTOS

Ejemplo: dada la ecuación

$$xdy + ydx = 7x^6dx - 4y^7dy + \text{sen}(2x)dx$$

determine su solución general.

SOLUCION

a) Identificación:

Como aparecen los términos $xdy + ydx$, es de FACTORES INTEGRANTES, sustituiremos $xdy + ydx = d(xy)$ en la ecuación diferencial.

b) Sustitución:

$$xdy + ydx = 7x^6dx - 4y^7dy + \text{sen}(2x)dx$$

$$d(xy) = 7x^6dx - 4y^7dy + \text{sen}\,(2x)dx$$ como los demás términos ya se pueden integrar igualaremos a 0.

$$d(xy) - 7x^6dx + 4y^7dy - \text{sen}\,(2x)\,dx = 0$$

$$\int d(xy) - 7\int x^6dx + 4\int y^7dy - \int \text{sen}\,(2x)\,dx = 0$$

$$\int d(xy) - 7\int x^6\,dx + 4\int y^7\,dy - 1/2\int (2)\,\text{sen}\,(2x)\,dx = 0$$ Integrando

$$xy - x^7 + y^8/2 + 1/2\cos(2x) = c$$ Multiplicando por dos.

$$2xy - 2x^7 + y^8 + \cos(2x) = c$$

$$\boxed{y(2x + y^7) + \cos(2x) = c + 2x^7}$$ SOLUCION GENERAL

Cuando los demás términos <u>no</u> se puedan integrar porque no nos lo permite alguna variable, entonces multiplicaremos toda la ecuación por $1/(xy)^a$, donde a será la potencia de la variable que <u>no</u> nos permite que se integren los otros términos.

EJEMPLO:

Dada la ecuación $xdy + ydx = 5x^3y^5dy$. Encontrar la solución general

SOLUCION

a) Identificación:

Como aparece en la relación $xdy + ydx$ la sustituiremos por $d(xy)$. Como <u>no</u> se puede integrar (porque aparece x^3), multiplicaremos toda la ecuación por $\{1/(xy)^3\}$

b) Sustituciones:

$\underline{xdy + ydx} = 5x^3y^5dy$ Sustituyendo $xdy + ydx = d(xy)$

$d(xy) = 5x^3y^5dy$ Multiplicando por $\{ 1/(xy)^3 \}$

$\frac{d(xy)}{(xy)^3} = 5y^2dy$ Igualando a cero.

$(xy)^{-3}d(xy) - 5y^2dy = 0$ Integrando

$\int (xy)^{-3}d(xy) - 5\int y^2dy = 0$

$-\frac{(xy)^{-2}}{2} - \frac{5y^3}{3} = c$ Multiplicando por $(-6x^2y^2)$

$\underline{3 + 10y^5x^2 = c(x^2y^2)}$ SOLUCION GENERAL

EJEMPLO:

Dada la ecuación $xdy - ydx = 7x^8dx + 4x^2dx$, encontrar la solución general.

SOLUCION:

a) Identificación:

Como aparece la relación $xdy - ydx$

Utilizaremos el factor $\frac{1}{x^2}$

b) Productos y sustituciones:

$xdy - ydx = 7x^8dx + 4x^2dx$

Multiplicando por $[\frac{1}{x^2}]$

$\frac{\underline{xdy - ydx}}{x^2} = 7x^6dx + 4dx$

Aplicando $\frac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$ e igualando a cero.

$d\left(\frac{y}{x}\right) - 7x^6dx - 4dx = 0$ Integramos

$\int d\left(\frac{y}{x}\right) - 7\int x^6dx - 4\int dx = \int 0$

$\frac{y}{x} - x^7 - 4x = c$ Multiplicando por x y agrupando

$\boxed{y = x(c + x^7 + 4x)}$ Solución General.

EJEMPLO:

Dada la ecuación. $xdy - ydx = 9y^2x^2dx + 5y^2x^4dx$.

Encuentre la solución general:

SOLUCION:

a) Identificación:

Como aparece la relación $xdy - ydx$, multiplicaremos entonces toda la ecuación por el factor $\frac{1}{y^2}$

b) Productos y Sustituciones:

$xdy - ydx = 9y^2x^2dx + 5y^2x^4dx$ Multiplicamos por $\left(\frac{1}{y^2}\right)$

$\frac{\underline{xdy - ydx}}{y^2} = 9x^2dx + 5x^4dx$

$d\left(-\frac{x}{y}\right) - 9x^2dx - 5x^4dx = 0$ Integramos

$\int d\left(-\frac{x}{y}\right) - 9\int x^2dx - 5\int x^4dx = 0$ Aplicamos $\int d(-x/y) = -x/y + c$

$-\frac{x}{y} - 3x^3 - x^5 = c$ Multiplicamos por $(-y)$

$x + 3x^3y + x^5y = cy$ Agrupando

$\boxed{x + x^3y(3 + x^2) = cy}$ <u>Solución General.</u>

EJEMPLO: Dada la ecuación.

$xdy - ydx = 8xy^3dy$; Encuentre las solución general

SOLUCION:

a) Identificación:

Como aparece la relación $xdy - ydx$; multiplicaremos toda la ecuación por el factor $\frac{1}{xy}$

b) Productos y Sustituciones:

$xdy - ydx = 8xy^3dy$ Multiplicamos por $\left(\frac{1}{xy}\right)$

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 8y^2dy$$ Igualando a cero

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} - 8y^2dy = 0$$ Integrando

$$\int\frac{dy}{y} - \int\frac{dx}{x} - 8\int y^2dy = \int 0$$

$$\ln|y| - \ln|x| - \frac{8y^3}{3} = c$$ Multiplicando por 3 y aplicando $c \ln u = \ln u^c$, $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$

$$\ln\left(\frac{y^3}{x^3}\right) = c + 8y^3$$ Exponenciando

$$e^{\ln(y^3/x^3)} = e^{c+8y^3}$$ Aplicando $e^{\ln u} = u$; $e^{a+b} = e^ae^b$; $e^c = c$

$$\frac{y^3}{x^3} = ce^{8y^3}$$ Multiplicamos por x^3

$$\boxed{y^3 = cx^3e^{8y^3}}$$ Solución General.

Cuando en los demás términos aparezca $(ax^2 + bxy + cy^2)$ donde $a,b,c \Rightarrow R$, realizaremos los siguientes pasos.

1.- Multiplicaremos toda la ecuación por $(1/ax^2+bxy+cy^2)$.

2.- Al realizar el producto anterior, nos quedará $\frac{xdy-ydx}{ax^2+bxy+cy^2}$ ó $\frac{ydx-xdy}{ax^2+bxy+cy^2}$

En uno de los lados de la ecuación, multiplicaremos el numerador y el denominador por $[1/(\text{var.})^2]$ que será la primer variable de nuestra relación es decir, si tenemos $xdy - ydx$ multiplicaremos por $(1/x^2)$ porque primero aparece x ; si tenemos $ydx - xdy$ multiplicaremos por $(1/y^2)$.

3.- Sustituiremos por la derivada del cociente que le corresponde al numerador y se realizarán las operaciones en el denominador.

4.- Llamaremos m a la relación de la derivada, para observar más fácilmente el tipo de integral e integramos.

EJEMPLO: Dada la ecuación.

$xdy-ydx=(y^2+6yx+9x^2)\,e^xdx$: Encuentre su solución general.

SOLUCION:

a) Identificación:

Como aparece la relación $xdy-ydx$ multiplicaremos toda la ecuación por $1/(y^2+6xy+9x^2)$.

b) Productos y Sustituciones:

$$xdy-ydx = (y^2+6yx+9x^2)\,e^xdx$$ Multiplicamos por $\frac{1}{y^2+6xy+9x^2}$

$$\frac{xdy-ydx}{y^2+6yx+9x^2} = e^xdx$$ Multiplicamos numerador y denominador por $\frac{1}{x^2}$

$$\frac{\frac{xdy-ydx}{x^2}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+6\left(\frac{y}{x}\right)+9} = e^xdx$$ sustituyendo $\frac{xdy-ydx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+6\left(\frac{y}{x}\right)+9} - e^xdx = 0$$ Sustituyendo m por $\frac{y}{x}$ para visualizar más fácil la primera cantidad.

$$\frac{dm}{m^2+6m+9} - e^xdx = 0$$ Integramos, aplicando: $m^2+6m+9 = (m+3)^2$

$$\int(m+3)^{-2}dm - \int e^xdx = 0$$ Aplicando $\int(m+3)^{-2}dm \approx \int u^n du$

$$-(m+3)^{-1} - e^x = c$$ Multiplicando por $[-(m+3)]$

$$1 + (m+3)\,e^x = c\,(m+3)$$ Sustituyendo $m = \frac{y}{x}$

$$1 + \left(\frac{y}{x}+3\right)e^x = c\left(\frac{y}{x}+3\right)$$ Simplificando

$$1 + \left[\frac{(y+3x)}{x}\right]e^x = \frac{c(y+3x)}{x}$$ Multiplicando por x

$$\boxed{x + (y+3x)\,e^x = c(y+3x)}$$ SOLUCION GENERAL

EJEMPLO: Dada la ecuación

$$ydx - xdy = (9x^2+25y^2)^3(9x\,dx + 25y\,dy)$$

determine su solución general.

SOLUCION:

a) Identificación:

Como aparece la relación $ydx - xdy$ multiplicamos toda la ecuación por $\frac{1}{9x^2+25y^2}$

b) Productos y Sustituciones:

$ydx - xdy = (9x^2+25y^2)^3(9x\,dx+25y\,dy)$ Multiplicando por $\left[\frac{1}{9x^2+25y^2}\right]$

$\frac{ydx-xdy}{9x^2+25y^2} = (9x^2+25y^2)^2(9x\,dx+25y\,dy)$ Multiplicando por $\left[\frac{1}{y^2}\right]$ el numerador y el denominador de la izquierda

$\frac{\frac{ydx-xdy}{y^2}}{\frac{9x^2+25y^2}{y^2}} = (9x^2+25y^2)^2(9x\,dx+25y\,dy)=0$ Aplicamos $d(\frac{x}{y}) = \frac{ydx-xdy}{y^2}$

$\frac{d(\frac{x}{y})}{9(\frac{x}{y})^2+25} = (9x^2+25y^2)^2(9x\,dx+25y\,dy)=0$ Sustituyendo $m= x/y$

$\frac{dm}{9m^2+25} = (9x^2+25y^2)^2(9x\,dx+25y\,dy)=0$ Integramos

$\int\frac{dm}{9m+25} - \int(9x^2+25y^2)^2(9x\,dx+25y\,dy) = \int 0$ (1)

C) SOLUCION DE INTEGRALES

$\int\frac{dm}{9m+25} \approx \int\frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}tg^{-1}(\frac{u}{a})+C;$ $u^2=9m^2;\ a^2=25$ Completamos; $u=3m;\ a=5$ Multiplicamos y dividimos por 3; $du=3dm$

$\int(9x^2+25y^2)^2(9x\,dx+25y\,dy) \approx \int u\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C$ $u=9x^2+25y^2$; $du=18x\,dx+50\,dy$

Completamos, multiplicamos y dividimos entre 2.

OBTENCION DE LA SOLUCION GENERAL

$$\frac{1}{3}\int\frac{(3)dm}{9m^2+25} - \frac{1}{2}\int(9x^2+25y^2)(18xdx+50ydy) = \int 0$$

$\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{5}\right)tg^{-1}\left(\frac{3m}{5}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(9x^2+25y^2)^3 = c$ Multiplicando por 30 y sustituimos $m=\frac{x}{y}$

$\boxed{2\,tg^{-1}\left(\frac{3x}{5y}\right) - 5(9x^2+25y^2)^3 = c}$ Solución General.

Cuando la ecuación tenga la forma $xdy - ydx$ ó $ydx - xdy$ $= axdx + bydy$; a,b es IR.

Aplicaremos el hecho de que $axdx + bydy$ es la derivada de $d(\frac{a}{2}x^2+\frac{b}{2}y^2)$ y lo que haremos será multiplicar toda la ecuación por $\left(\frac{1}{\frac{a}{2}x^2+\frac{b}{2}y^2}\right)$

EJEMPLO: Dada la ecuación

$xdy- ydx=8xdx-200ydy$ Encontrar su solución general

SOLUCION:

a) Identificación :

como tiene la forma $xdy - ydx = axdx + bydy$ entonces

$8xdx - 200ydy = d(4x^2-100y^2)$

es decir, multiplicaremos toda la ecuación por $\left[\frac{1}{4x^2-100y^2}\right]$

b) Productos y Sustituciones:

$xdy-ydx = 8xdx-200ydy$ Multiplicamos por $\left[\frac{1}{4x^2-100y^2}\right]$

$\frac{xdy-ydx}{4x^2-100y^2} = \frac{8xdx-200ydy}{4x^2-100y^2}$ Multiplicamos por $\left[\frac{1}{x^2}\right]$ El numerador y el denominador de la izquierda.

$$\frac{\frac{xdy - ydx}{x^2}}{4 - 100(\frac{y}{x})^2} - \frac{8xdx - 200ydy}{4x^2 - 100y^2} = 0 \quad \text{Aplicando} \quad d(y/x) = \frac{xdy - ydx}{x^2}$$

$$\frac{d(\frac{y}{x})}{4 - 100(\frac{y}{x})^2} - \frac{8xdx - 200ydy}{4x^2 - 100y^2} = 0 \quad \text{sustituimos} \quad m = \frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dm}{4 - 100m^2} - \int \frac{8xdx - 200ydy}{4x^2 - 100y^2} = \int 0 \quad \text{Integramos}$$

c) Solución de integrales:

$$\int \frac{dm}{4 - 100m^2} \approx \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a + u}{a - u} + C \qquad u^2 = 100m^2 ;\ a^2 = 4 \quad u = 10m ;\ a = 2 \quad du = 10dm$$

Completamos multiplicando y dividiendo por 10

$$\int \frac{8x\,dx - 200y\,dy}{4x^2 - 100y^2} \approx \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C \qquad u = 4x^2 - 100y^2 \quad du = 8x\,dx - 200y\,dy$$

d).- Obtención de la solución general:

$$\frac{1}{10} \int \frac{(10)\,dm}{4 - 100m^2} - \int \frac{8x\,dx - 200y\,dy}{4x^2 - 100y^2} = \int 0$$

Multiplicando por 40

$$\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{4}\right) \ln\left(\frac{2 + 10m}{2 - 10m}\right) - \ln(4x^2 - 100y^2) = C$$

y Sustituyendo $m = \frac{y}{x}$

$$\ln\left(\frac{2 + \frac{10y}{x}}{2 - \frac{10y}{x}}\right) - 40 \ln(4x^2 - 100y^2) = C$$

Aplicando $2 + \frac{10y}{x} = \frac{2x + 10y}{x}$; $2 - \frac{10y}{x} = \frac{2x - 10y}{x}$

$$\ln\left[\frac{2x + 10y}{2x - 10y}\right] - \ln(4x^2 - 100y^2)^{40} = C \qquad \text{Aplicando } \ln\left(\frac{a}{b}\right) - \ln c = \ln\left(\frac{a}{bc}\right)$$

Exponenciando

$$e^{\ln\left[\frac{2x + 10y}{(2x - 10y)(4x^2 - 100y^2)^{40}}\right]} = e^c \qquad \text{Aplicando } e^{\ln u} = u ;\ e^c = c$$

$$\frac{2x + 10y}{(2x - 10y)(4x^2 - 100y^2)^{40}} = C \qquad \text{Despejando.}$$

$$2x + 10y = C(2x - 10y)(4x^2 - 100y^2)^{40} \qquad \text{Aplicando } 4x^2 - 100y^2 = (2x - 10y)(2x + 10y)$$

$$2x + 10y = C(2x - 10y)(2x + 10y)^{40}(2x - 10y)^{40} \qquad \text{Dividiendo } \div (2x + 10y)$$

$$1 = C(2x - 10y)^{41}(2x + 10y)^{39} \qquad \text{Simplificando.}$$

$$\boxed{1 = C(4x - 100y\ )^{39}(2x - 10y)^2} \qquad \text{SOLUCION GENERAL}$$

Cuando en la ecuación diferencial aparezca la relación $py\,dx + qx\,dy$, aplicaremos $(py\,dx + qx\,dy)\,(x^{p-1}y^{q-1}) = d(x^p y^q)$, es decir multiplicaremos toda la ecuación por el factor $x^{p-1}y^{q-1}$ y al hacer el producto, sustituiremos $(py\,dx + qx\,dy)\,(x^{p-1}y^{q-1})$ por la derivada que representa $d(x^p y^q)$.

Cuando los demás términos se pueden integrar (después de haber multiplicado por $x^{p-1}y^{q-1}$) integraremos y encontraremos la solución general

EJEMPLO: Dada la ecuación

$5ydx - 3xdy = y^4x^7dx$ Encontrar su solución general.

SOLUCION:

a) Identificación:

Como aparece la relación $py\,dx + qx\,dy$ donde $p = 5$; $q = -3$, el factor $= x^4y^{-4}$

b) Productos y Sustituciones:

$5ydx - 3xdy = y^4x^7dx$ Multiplicamos por $\boxed{x^4y^{-4}}$

$(5ydx - 3xdy)(x^4y^{-4}) = x^{11}dx$ Sustituimos $d(x^py^q)$

$d(x^5y^{-3}) - x^{11}dx = 0$ Como $x^{11}dx$ se puede integrar, Integramos

$\int d(x^5y^{-3}) - \int x^{11}dx = \int 0$

$x^5y^{-3} - \dfrac{x^{12}}{12} = c$ Multiplicamos por $12y^3$

$12x^5 - x^{12}y^3 = cy^3$ Agrupando

$\boxed{12x^5 = (c+x^{12})y^3}$ Solución General

Si después de multiplicar por $x^{p-1}y^{q-1}$, el otro término no se puede integrar, multiplicaremos toda la ecuación por $\dfrac{1}{(x^py^q)^a}$ donde esta realación puede quedar con la variable a la potencia con la cual elimine a la que no permite que se integre el otro término

EJEMPLO: dada la ecuación

$7xdy + 3ydx = x^4y^9dy$ Encontrar su solución general

SOLUCION:

a) Identificación:

Como aparece la relación $3ydx + 7xdy$, $p = 3$; $q = 7$; Factor $= x^2y^6$

b) Productos y Sustituciones:

$7xdy + 3ydx = x^4y^9dy$ Multiplicamos por x^2y^6

$(7xdy + 3ydx)(x^2y^6) = x^6y^{15}dy$ Aplicamos $d(x^py^q)$

$d(x^3y^7) - x^6y\,dy = 0$ Como x^6 no permite que se integre el 2° término multiplicamos $\left[\dfrac{1}{(x^3y^7)^2}\right]$

$\dfrac{d(x^3y^7)}{(x^3y^7)^2} - \dfrac{x^6y\,dy}{(x^3y^7)^2} = 0$ Simplificando

$(x^3y^7)^{-2}d(x^3y^7) - ydy = 0$ Integramos

$\int (x^3y^7)^{-2}d(x^3y^7) - \int ydy = \int 0$ Aplicamos $\int (x^3y^7)^{-2}d(x^3y^7) \approx \int u^n du$

$-(x^3y^7)^{-1} - y^2/2$ Multiplicamos por $\left[-2(x^3y^7)\right]$

$\boxed{2 + y^9x^3 = c(x^3y^7)}$ Solución General.

NOTA:

No siempre van a aparecer nuestros términos $pydx + qxdy$ despejados, cuando esté la ecuación toda revuelta tendremos que darle la forma, es decir, colocar nuestros términos $pydx + qxdy$ de un lado y los demás del otro.

EJEMPLO: Resolver $(y - xy^2)dx + (x + x^2y^2)dy = 0$

SOLUCION:

a) Identificación:

Como podemos ver esta ecuación no tiene la forma de ningún método de losanteriores para checar si es de FACTORES INTEGRANTES realizaremos los productos y checaremos si podemos encontrar la relación $pydx + qxdy$.

Para este ejercicio:

$ydx - xy^2dx + xdy + x^2y^2dy = 0$ Acomodándola.

$ydx + xdy = xy^2dx - x^2y^2dy$ Como aparece $xdy + ydx$; la sustituimos

$d(xy) - xy^2dx + x^2y^2dy = 0$ Checando los otros términos vemos que uno no se pyede integrar por la y^2 y el otro por x^2

$\left[d(xy) - xy^2dx + x^2y^2dy = 0\right]\left[\dfrac{1}{(xy)^2}\right]$ Multiplicaremos por $\left[\dfrac{1}{(xy)^2}\right]$

$(xy)^{-2}d(xy) - \dfrac{dx}{x} + dy = 0$ Integramos

$\int (xy)^{-2}d(xy) - \int \dfrac{dx}{x} + \int dy = \int 0$ Aplicando $\int (xy)^{-2}d(xy) \approx \int u^n du$

$-(xy)^{-1} - \ln|x| + y = c$ Multiplicando por $[-xy]$

$1 + xy\ln|x| - xy^2 = cxy$ Despejamos

$\boxed{1 + xy\ln|x| = xy(c+y)}$ Solución General.